

Проф. И.П. Прокофьев

ТЕОРИЯ СООРУЖЕНИЙ

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

СТРОИТЕЛЬ НАУКОМСТРОЕ

1940

Проф. И. П. ПРОКОФЬЕВ
ДОКТОР ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК

ТЕОРИЯ СООРУЖЕНИЙ

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

*Утверждено ВКВШ в качестве учебника
для строительных вузов и путейско-строительных
факультетов*

Издание 3-е переработанное и дополненное

Рецензенты: проф. А. Н. Митинский, проф. В. И. Руднев

Редактор инж. М. С. Рудоминер

Техн. редакторы: Д. М. Медриш, Д. М. Судак

Вторая часть курса „Теория сооружений“ проф. И. П. Прокофьева представляет собой значительно переработанное и дополненное третье издание курса, вышедшего в 1933 г.

Книга обнимает все вопросы утвержденной для втузов программы курса „Статика сооружений“ в части статически неопределимых систем.

Включая много примеров и задач, книга дает возможность усвоить новейшие методы расчета арок и сводов, рам (простых и сложных), неразрезных балок и статически неопределимых ферм.

Книга предназначена для студентов строительных втузов и путейско-строительных факультетов.

ОПЕЧАТКИ

| Страница | Строка | Напечатано | Должно быть | По чьей вине |
|----------|--------------|---|--|--------------|
| 23 | 17 снизу | $\pm \alpha_3^2 s$ | $\pm \alpha_3^2 l_1$ | Автора |
| 30 | 3 снизу | распадаются | не распадаются | |
| 36 | 1 снизу | (черт. 55) | (черт. 62) | |
| 37 | 19 сверху | каждого | третьего | |
| 51 | 3 снизу | $lu^2(1-u^2)$ | $l^2u(1-u^2)$ | |
| 59 | 17 сверху | черт. 91, а | черт. 91, d | |
| 82 | 1 снизу | $q_0 l_1 =$ | $q_0 l_1^2 =$ | |
| 86 и 87 | 5 сверху | $6(1-z) + V$ | $6(1-z) - V$ | |
| 88 | 29 снизу | ось арки имеет произвольное очертание или сечение | арка имеет произвольное очертание оси или переменное сечение | |
| 102 | 5 снизу | δ_{32} | δ_{33} | |
| 142 | 3 сверху | $= 616$ | $= -616$ | |
| 153 | 14—17 сверху | U_{3-4} | U_{4-5} | |
| 209 | 3 снизу | $+\frac{\alpha_n'}{l_{n+1}}$ | $+\frac{\alpha_n'}{l_n}$ | |
| 209 | 1 снизу | $\frac{\alpha_n}{l_n}$ | $\frac{\alpha_n}{l_{n+1}}$ | |
| 210 | 7 сверху | $\beta_n' \frac{1}{l_{n+1}}$ | $\beta_n' \frac{1}{l_n}$ | |
| 210 | 9 сверху | $\beta_n \frac{1}{l_n}$ | $\beta_n \frac{1}{l_{n+1}}$ | |
| 220 | 6 снизу | $r_{nk} = -$ | $r_{nk} = +$ | |
| 218 | 20 сверху | $\delta_{31} = Z_n - \Delta l$ | $\delta_{31} = Z_n$ | |
| 273 | 9 снизу | $= r_{43} = 0$ | $= r_{42} = 0$ | |
| 273 | 7 снизу | $= \delta_{34} = 0$ | $= \delta_{24} = 0$ | |
| 274 | 10 снизу | $M_{12} = M_{43} =$ | $M_{12} = -M_{21} =$ | |
| 297 | 9 сверху | (254) | (237) | |

Черт. 53. На верхней схеме правый конец, показанный шарнирным, должен быть показан закрепленным; на нижней схеме на правой опоре должен быть приложен момент X_2 .

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | Стр. |
|---|-------|
| Предисловие | 7 |
| Введение | 8 |
| § 1. Общие понятия | 8 |
| Задачи и упражнения | 11 |
| <i>Метод сил</i> | |
| Основы расчета или расчет простейших систем | |
| § 2. Расчетная или основная система | 11 |
| § 3. Выражения для моментов, усилий и перемещений в статически неопределимой системе | 13 |
| § 4. Составление канонических уравнений для определения лишних неизвестных | 14 |
| Задачи и упражнения | 16 |
| § 5. Расчет систем с одной и двумя лишними связями | 17 |
| Примеры 1—2 | 17—18 |
| Задачи и упражнения | 19 |
| § 6. Принцип наименьшей работы | 20 |
| Задачи и упражнения | 21 |
| § 7. Влияние температуры, смещения опор и начального натяжения | 22 |
| 1. Влияние температуры | — |
| 2. Влияние смещения опор | 24 |
| 3. Влияние искусственного натяжения | 25 |
| Задачи и упражнения | 26 |
| § 8. Возможность упрощения канонических уравнений упругости | 27 |
| § 9. Упрощение канонических уравнений в симметричных системах. Парные неизвестные | 28 |
| 1. Симметричные неизвестные | — |
| 2. Прямо и обратно симметричные „парные“ неизвестные | 29 |
| 3. Обращение в нуль неизвестных при прямо и обратно симметричном нагружении. Парные неизвестные | 30 |
| § 10. Выбор направления неизвестных | 31 |
| § 11. Переход к параллельным осям. Перенос сил в центр фиктивных упругих сил | 33 |
| Примеры 3—4 | 35—38 |
| Задачи и упражнения | 39 |
| § 12. Контроль вычислений в канонических уравнениях | 41 |
| 1. Контроль вычисления коэффициентов при неизвестных | — |
| 2. Контроль вычисления известных (свободных) членов | 44 |
| § 13. Контроль окончательных эпюр в сплошных системах | — |
| § 14. Линии влияния лишних неизвестных | 46 |
| Примеры 5—7 | 47—48 |
| § 15. Таблица для вычисления ординат линий влияния в балках и рамных системах | 51 |
| 1. Стержень свободно оперт двумя концами | — |
| 2. Стержень закреплен одним концом | 52 |
| § 16. Линии влияния усилий и моментов в сечениях элементов системы | 53 |
| Пример 8 | 55 |
| § 17. Модели линий влияния | 56 |
| § 18. Объемлющая эпюра | 58 |
| Задачи и упражнения | 59 |

Арки сплошные и своды

| | |
|--|----|
| 19. Характеристика арок. Очертание оси | 61 |
| 1. Ось арки | 62 |
| 2. Нагрузка и передача ее на арку | 63 |

Бесшарнирные арки и своды

| | |
|--|-----|
| § 20. Изменение сечения арок по их длине | 64 |
| § 21. Основная система | 65 |
| § 22. Формулы для определения неизвестных и возможные упрощения в них | 67 |
| § 23. Многоугольник или кривая давлений | 72 |
| § 24. Расчет арки с параболической осью | 73 |
| 1. Сосредоточенная сила | 75 |
| 2. Сплошная нагрузка | 80 |
| Пример 9 | 82 |
| § 25. Аналитическое построение линий влияния | 83 |
| Пример 10 | — |
| § 26. Расчет арки с осью произвольного очертания путем численного интегрирования | 88 |
| Пример 11 | 89 |
| § 27. Расчет арки с осью произвольного очертания при помощи линий влияния | 93 |
| Пример 12 | 98 |
| § 28. Влияние температурных изменений и усадки бетона | 102 |
| § 29. Влияние обжатия в арках с рациональной осью | 103 |
| § 30. Расчет арки с осью, очерченной по катенонду | 106 |
| § 31. Расчет круговой арки с радиальной нагрузкой | 109 |

Двухшарнирные арки

| | |
|---|-----|
| § 32. Упрощения, возможные в расчете двухшарнирных арок | 111 |
| § 33. Многоугольник давлений | 113 |
| § 34. Аналитический расчет параболической арки | 114 |
| 1. Сосредоточенный груз | 115 |
| 2. Сплошная нагрузка | — |
| 3. Линия влияния | 117 |
| 4. Линия опорных сопротивлений | 118 |
| § 35. Расчет арки с осью произвольного очертания или с произвольным законом изменения толщины | 119 |
| § 36. Арки с затяжкой | 120 |
| § 37. Влияние упругих деформаций оси арки на величину моментов в ней | 121 |

Фермы

| | |
|--|-----|
| § 38. Основная система и упрощения в канонических уравнениях | 123 |
| Пример 13 | 127 |
| Пример 14 | 129 |
| § 39. Расчет на постоянную нагрузку | 131 |
| Пример 15 | — |
| § 40. Контроль вычислений в расчете ферм | 133 |
| § 41. Влияние изменения температурного режима | 134 |
| § 42. Предварительное определение размеров сечений стержней | 135 |
| § 43. Расчет на подвижную нагрузку | 137 |
| Пример 16 | 139 |
| § 44. Фермы со сложной решеткой | 147 |
| Пример 17 | 149 |

Сложные рамы

| | |
|--|-----|
| § 45. Выбор основной системы | 154 |
| 1. Схема основной системы | 155 |
| 2. Оценка основной системы | 156 |
| 3. Особые случаи | 159 |
| Задачи и упражнения | 160 |
| § 46. Предварительное определение вида деформированной рамной системы | 161 |
| 1. Влияние поворота узлов рамы при отсутствии смещения узлов | 162 |
| 2. Влияние перекоса системы | 164 |
| 3. Деформация при одновременном повороте узлов и перекосе системы | 166 |
| § 47. Упрощения, получаемые от использования симметрии | 167 |
| § 48. Расчет симметричных рам по условным основным системам | 170 |
| § 49. Упрощения канонических уравнений путем переноса неизвестных | 174 |
| Задачи и упражнения | 178 |
| § 50. Групповые неизвестные и перемещения | — |
| § 51. Решение канонических уравнений сокращенным способом Гаусса | 181 |
| 1. Последовательное исключение неизвестных и составление таблицы решения | — |
| 2. Порядок нумерации уравнений | 185 |
| 3. Проверка | — |
| 4. Вычисление неизвестных | 186 |
| Пример 18 | — |

| | |
|---|-----|
| § 52. Статический смысл решения уравнений способом Гаусса | 191 |
| § 53. Построение расчетной эпюры моментов по групповым единичным эпюрам | 193 |
| § 54. Обратный ход по Гауссу | 194 |
| § 55. Линии влияния | 196 |
| Пример 19 | 197 |
| § 56. Влияние изменения температурного режима | 204 |
| Пример 20 | 205 |
| Задачи и упражнения | 207 |
| § 57. Упруго оседающие опоры | 208 |
| § 58. Учет влияния переменности сечений | 211 |
| § 59. Предварительное определение поперечных сечений в рамах . | 212 |

Метод деформаций

| | |
|--|-----|
| § 60. Сущность метода и основные допущения | 214 |
| § 61. Основная система и установление числа неизвестных | 216 |
| Задачи и упражнения | 218 |
| § 62. Составление канонических уравнений | 219 |
| 1. Условные обозначения | — |
| 2. Составление канонических уравнений по условиям равновесия . | — |
| 3. Коэффициенты при неизвестных | — |
| 4. Грузовые члены | 222 |
| 5. Взаимность величин r_{mk} и δ_{km} | 223 |
| 6. Правило знаков | 223 |
| 7. Составление уравнений по теореме о взаимности работ | 226 |
| Пример 21 | 227 |
| 8. Некоторые обобщения | 229 |
| § 63. Раскрытая форма канонических уравнений | — |
| 1. Уравнение равновесия моментов при повороте узлов | — |
| 2. Уравнение равновесия сил при линейном смещении узлов . | 231 |
| Задачи и упражнения | 232 |
| § 64. Решение уравнений сокращенным способом Гаусса | 233 |
| Пример 22 | — |
| § 65. Окончательные расчетные эпюры | 234 |
| § 66. Использование симметрии | 236 |
| Пример 23 | 238 |
| § 67. Особенности в составлении уравнений для расчета рам с непараллельными стойками | 242 |
| 1. Зависимость между линейными смещениями | — |
| 2. Составление уравнений | 243 |
| § 68. Решение уравнений методом последовательного приближения (итерации) | 246 |
| Пример 24 | 247 |
| § 69. Учет влияния температуры | 249 |
| 1. Равномерный нагрев | 250 |
| 2. Неравномерный нагрев | 252 |
| 3. Составление уравнений | 253 |
| Пример 25 | 254 |
| § 70. Влияние линейных смещений и поворотов сечений в опорах . | 257 |
| § 71. Линии влияния | 258 |
| 1. Построение линий влияния неизвестных | — |
| 2. Построение линий влияния внутренних усилий и моментов . . | 261 |
| Пример 26 | 263 |
| § 72. Учет переменности сечения | 267 |

Смешанный и комбинированный приемы расчета рам

| | |
|---------------------------------------|-----|
| § 73. Общие установки | 269 |
| § 74. Составление расчетных уравнений | 270 |
| Пример 27 | 272 |
| § 75. Комбинированный прием | 276 |

Расчет неразрезных балок и рам способом моментных фокусов

| | |
|---|-----|
| § 76. Фокусные точки и фокусные отношения в неразрезных балках . | 277 |
| § 77. Опорные моменты в загруженном пролете | 280 |
| § 78. Линии влияния в неразрезной балке | 282 |
| § 79. Фокусные отношения в рамах | 284 |
| § 80. Коэффициенты распределения | 287 |
| § 81. Выражения конечных моментов в загруженном пролете | 288 |
| § 82. Расчет рам, не имеющих смещений узлов и замкнутых контуров | 289 |
| Пример 28 | — |

| | |
|---|-----|
| § 83. Расчет рам с замкнутыми контурами и не имеющих смещений узлов | 291 |
| 1. Отличие замкнутого контура от незамкнутого в отношении распространения концевых моментов от загруженного стержня | — |
| 2. Определение фокусных отношений и коэффициентов распределения моментов | 292 |
| 3. Контроль вычислений | 294 |
| 4. Расчетные моменты | — |
| § 84. Расчет рам с горизонтальными смещениями | 295 |
| § 85. Общие выводы . | 299 |

Заключительный отдел

| | |
|---|-----|
| § 86. Краткий обзор развития расчетов статически неопределимых систем | 299 |
| § 87. Современные искания в области расчетов статически неопределимых систем . | 302 |
| 1. Механический расчет | — |
| 2. Расчет по заданным напряжениям | 303 |
| 3. Расчет по предельной нагрузке | 304 |

Решение задач и ответы

Предметный указатель

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее издание части II значительно переработано и дополнено по сравнению с предыдущим. Эта часть книги подразделена на три основных главы: расчет статически неопределимых систем по методу сил, методу деформаций и способом моментных фокусов. Последний способ хотя и относится к методу сил, но ввиду своей характерности он выделен особо.

Изложение метода сил начато с общего раздела, охватывающего расчет простейших статически неопределимых систем в объеме, необходимом для специальностей с небольшим числом часов по курсу статике (теории) сооружений. Далее расположены самостоятельные разделы расчета сводов и арок, ферм и рам, которые могут быть выпущены без нарушения стройности изложения. Последнее весьма существенно в смысле использования книги в условиях того или иного развития курса строительной механики, приспособляемого к специальности втуза.

Раздел о неразрезных балках особо не выделен. Это сделано по следующим соображениям: неразрезные балки изучаются в курсе сопротивления материалов; они представляют собой систему, которую неизбежно приходится рассматривать в качестве частных примеров при изложении общего отдела. Кроме того я полагаю, что читатель, проработавший расчет рам, без затруднений справится с расчетом многопролетной неразрезной балки. К тому же в последней главе (§ 76—78) дано изложение расчета неразрезных балок и построение линий влияния для них при помощи фокусных отношений.

Книга дополнена рядом задач. Так же как и в части I, здесь даны краткие указания при тексте задач, направляющие мысль решающего; решения же задач и ответы к ним даны отдельно в конце книги. Этим подчеркивается необходимость самостоятельного продумывания и решения задач.

Считаю своим приятным долгом поблагодарить моих сотрудников: С. С. Волкова, подготовившего главу расчета способом моментных фокусов, Л. М. Емельянова и П. И. Полиевко, взявших на себя труд прорешать все задачи. Приношу также благодарность проф. А. Н. Митинскому и проф. В. И. Рудневу, рецензировавшим рукопись, и инж. М. С. Рудоминеру, редактировавшему ее, за все сделанные ими указания, использованные для улучшения качества книги.

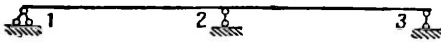
Июнь 1940 г.

И. Прокофьев.

ВВЕДЕНИЕ

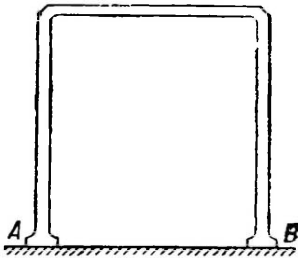
§ 1. Общие понятия

Статически неопределимыми системами называются системы, расчет которых при помощи только уравнений статики без рассмотрения упругих деформаций элементов системы невозможен. По способу образования они отличаются от систем статически определимых тем, что в них входят лишние связи (закрепления) сверх тех связей, которые необходимы для образования неизменяемых статически определимых систем. Эти связи могут быть внешние — в опорных закреплениях и внутренние — в соединении отдельных звеньев между собой и в самих звеньях.

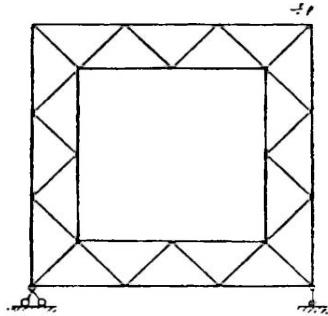


Черт. 1.

Балка, лежащая на трех опорах, из которых одна неподвижна (черт. 1), имеет четыре опорных связи и следовательно внешне статически неопределима. Ломаный брус (рама), заделанный двумя концами (черт. 2), имеет $2 \cdot 3 = 6$

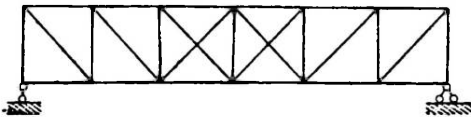


Черт. 2.



Черт. 3.

закреплений (связей) в опорах, следовательно внешне статически неопределим. Замкнутая ферма (сквозная рама) (черт. 3), свободно опирающаяся на две опоры, из которых одна подвижная, статически определима относительно опорных закреплений, но имеет три лишние внутренние связи, что легко проверить, если проследить ее образование из треугольников; следовательно она внутренне статически неопределима. Ферма, показанная на



Черт. 4.

Число лишних связей или закреплений, входящих в состав статически неопределимых систем, определяет степень их неопределимости, в соответствии с чем

они называются системами, однажды статически неопределимыми (черт. 1), трижды статически неопределимыми (черт. 2 и 3) и вообще m раз статически неопределимыми.

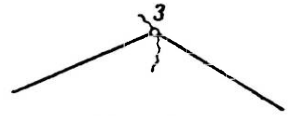
Определение степени статической неопределимости в сложных системах можно производить, основываясь на следующих соображениях.

Как известно, каждый плоский замкнутый бесшарнирный контур является трижды статически неопределимым. Это следует из того, что плоский замкнутый n -угольник дает $3n + 3$ неизвестных (по три в каждом элементе: момент, продольное и поперечное усилия и три опорные реакции), для нахождения которых имеем всего $3n$ уравнений статики, по три относительно каждой вершины n -угольника.

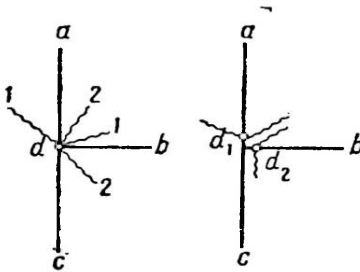
Следовательно если звенья и стержни, входящие в систему (считая в числе звеньев и землю), образуют k замкнутых контуров, то степень m ее статической неопределимости равна:

$$m = 3k. \quad (1)$$

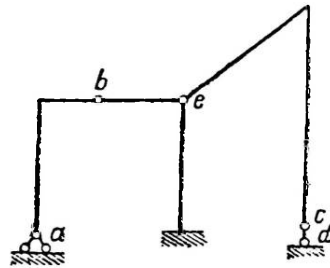
Включение в каждый контур одного или нескольких шарниров позволяет составлять дополнительные уравнения равновесия, число которых зависит от числа стержней или звеньев, сходящихся в шарнире. Если шарнир соединяет два звена (черт. 5), то можно составить одно дополнительное уравнение равновесия, приравняв нулю моменты сил и нагрузок, действующих на одну из двух частей системы, соединяемых шарниром; если шарнир соединяет три звена (черт. 6), то имеется возможность составить два дополнительных уравнения равновесия, приравняв нулю моменты сил и нагрузок, относящихся к двум из трех частей системы, сходя-



Черт. 5.



Черт. 6.



Черт. 7.

щихся в шарнире¹, и т. д. Следовательно число дополнительных уравнений статики, которое может быть составлено относительно каждого шарнира, на единицу меньше числа звеньев или стержней, сходящихся в шарнире.

Таким образом число лишних связей, определяющее степень статической неопределимости системы, равно утроенному числу замкнутых контуров системы минус число дополнительных уравнений статики, которые могут быть составлены относительно промежуточных шарниров. Это положение дает следующую зависимость:

$$m = 3k - 1u_2 - 2u_3 - 3u_4 - \dots, \quad (2)$$

где k — число замкнутых контуров в системе; u_2, u_3, u_4 — число шарниров, соединяющих два, три и т. д. стержней или звеньев, m — число лишних связей.

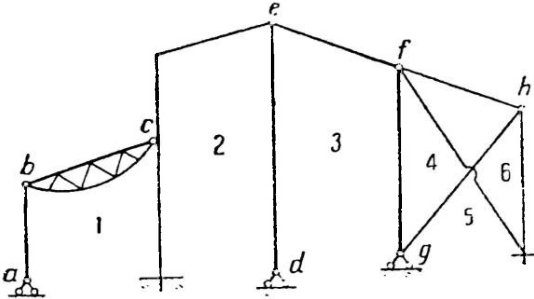
Например в системе, показанной на черт. 7, имеются два замкнутых контура, четыре шарнира (a, b, c, d); позволяющих составить по одному дополни-

¹ Шарнир можно рассматривать как бы сложившимся из двух шарниров: шарнира d_1 , относящегося к стержню ad , и шарнира d_2 , относящегося к стержню db .

тельному уравнению, и один шарнир (e), позволяющий составить два дополнительных уравнения; отсюда:

$$m = 3 \cdot 2 - 1 \cdot 4 - 2 \cdot 1 = 0,$$

т. е. система статически определима.



Черт. 8.

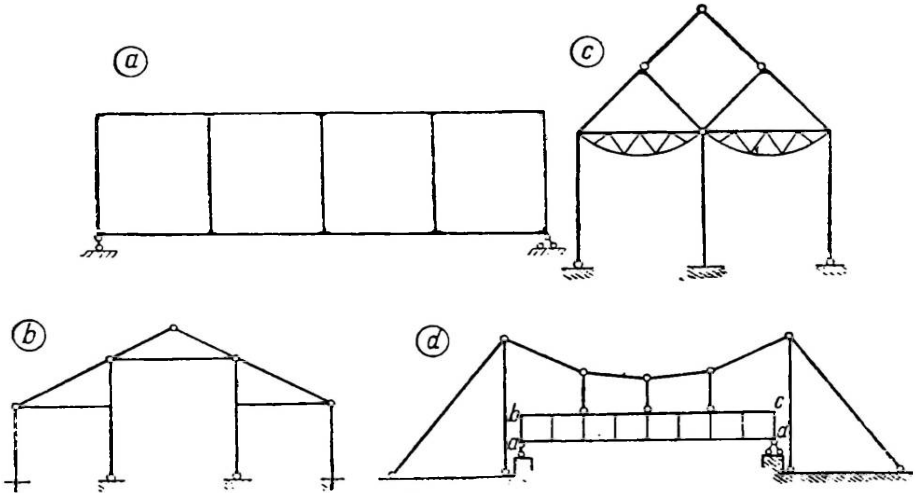
Система, показанная на черт. 8, имеет шесть замкнутых контуров (четыреугольник *gfhi* содержит три замкнутых контура; *gfi*, *hgi* и *fhi*) и восемь шарниров, причем $w_2 = 4$ (шарниры *a*, *b*, *d*, *c*), $w_3 = 3$ (шарниры *e*, *g*, *h*), $w_4 = 1$ (шарнир *f*), поэтому:

$$m = 3 \cdot 6 - 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 -$$

$$- 3 \cdot 1 = 5.$$

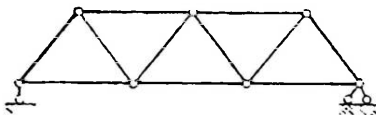
Следовательно система пять раз статически неопределима.

Для расчета статически неопределимых систем приходится составлять кроме уравнений статики дополнительные уравнения по числу m — лишних связей, вхо-



Черт. 9.

дящих в систему, и определять их из совместного решения этих m уравнений. Такой процесс связан с утомительными вычислениями, которые могут приводить к большим погрешностям; поэтому вполне естественным является стремление выработать такие приемы, которые сводили бы часть неизвестных, входящих в уравнения, заведомо к нулю или обращали бы отдельные члены этих уравнений в нуль.



Черт. 10.

Строительная механика в основе рассматривает два метода расчета статически неопределимых систем: метод сил и метод

деформаций. Все остальные приемы расчетов (способ фокусов и др.) вытекают из первых двух.

Указанные два основных метода допускают совместное применение их для расчета систем, что создает так называемый смешанный и комбинированный способы.

Задачи и упражнения

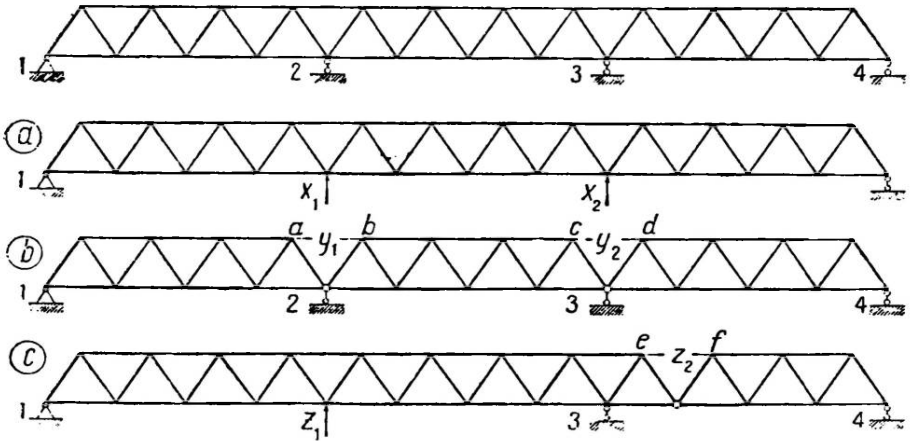
1. Определить степень статической неопределимости систем, указанных на черт. 9.
2. Как изменится степень статической неопределимости системы, показанной на черт. 9,а, если в ее верхние узлы включить шарниры?
3. Пользуясь зависимостью (2), проверить условие статической определимости системы, показанной на черт. 10.

МЕТОД СИЛ

ОСНОВЫ РАСЧЕТА И РАСЧЕТ ПРОСТЕЙШИХ СИСТЕМ

§ 2. РАСЧЕТНАЯ ИЛИ ОСНОВНАЯ СИСТЕМА

Для проведения расчета методом сил заданная статически неопределимая система приводится путем устранения в ней лишних связей к статически определимой неизменяемой системе



Черт. 11.

с введением в нее сил и моментов, заменяющих устраненные связи. Получаемая таким путем статически определимая система носит название расчетной или основной системы.

Для одной и той же заданной статически неопределимой системы устранение лишних связей может быть сделано различным путем, вследствие чего схема основной системы может достаточно широко видоизменяться. Так, показанная на черт. 11 дважды статически неопределимая ферма может быть приведена:

1) устранением двух средних опорных закреплений (черт. 11, а) к ферме, лежащей на двух опорах, с двумя добавочными силами X_1 и X_2 ;

2) устранением двух стержней ab и cd (черт. 11, б) к трем двухопорным балочным фермам с добавочными силами Y_1 и Y_2 ;

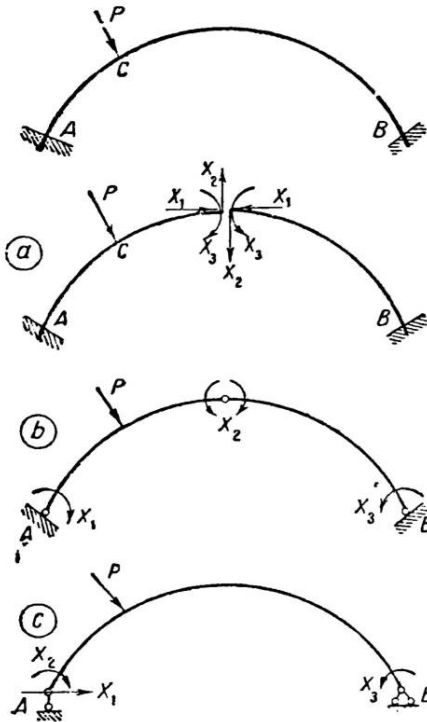
3) устранением стержня ef и одного опорного закрепления (черт. 11, в) к консольной двухопорной ферме с подвешной частью и с двумя добавочными силами Z_1 , Z_2 и т. д.

Трижды статически неопределимая арка, показанная на черт. 12, может быть приведена: к двум кривым брусам, заделанным каждый одним концом (черт. 12, а); к трехшарнирной арке (черт. 12, б); к кривому брусу, свободно лежащему на двух опорах (12, в), и т. д.

Нельзя дать определенные указания для выбора основной системы; многое здесь зависит от опыта в расчете. Вообще же при выборе основной системы необходимо руководствоваться следующими соображениями:

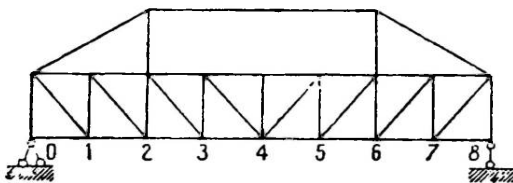
1. Основная система должна удовлетворять условиям неизменяемости.

Кроме приемов определения неизменяемости, применяемых в статически определимых системах, нужно иметь в виду, что устранение связей, усилия которых могут быть определены по уравнениям статики, нарушает неизменяемость системы.



Черт. 12.

Например, при расчете арки, показанной на черт. 12, предпочтении следует отдать основной системе, показанной на черт. 12, а, так как в этом случае влияние нагрузки на систему ограничивается участком АС, тогда как в остальных двух



Черт. 13.

основных системах, показанных на черт. 12, действие груза распространяется на всю систему.

Как указывалось выше, обычно за основную систему принимается система статически определимая. Однако не устраняется возможность выбрать в качестве расчетной системы статически неопределимую систему со сниженной степенью статической неопределимости; при этом в последнюю вводится сила или момент взамен устраненной в заданной системе лишней связи. Это делается, когда представляется возможным использовать уже хорошо изученные свойства системы с меньшим числом неизвестных.

Правило знаков

Выбор направления сил и моментов, вводимых в основную систему взамен устраняемых лишних связей, может быть сделан произвольно. Истинное напря-

Например, в системе, показанной на черт. 13, нельзя исключить какой-либо из элементов решетки между узлами 2—6, в которых усилия могут быть определены из вертикального разреза проектированием на вертикальную ось сил, действующих по одну сторону от разреза. Действительно, при удалении этих стержней получаются два звена, соединенных тремя параллельными стержнями.

2. Основная система должна быть возможно более простой по расчету. Так, если вернуться к системе, показанной на черт. 11, то предпочтении должно быть отдано фермам, лежащим на двух опорах (черт. 11, а, и 11, б), против консольной фермы (черт. 11, в), которая более сложна по расчету, чем первые две.

2. Основная система должна быть по возможности симметричной, что упрощает определение усилий и перемещений в системе (т. I, § 90), о чем подробнее сказано ниже в § 9.

4. Основная система должна выбираться так, чтобы влияние заданной нагрузки и принятых лишних неизвестных было возможно более ограниченное, что упрощает процесс расчета. Напри-

мер, при расчете арки, показанной на черт. 12, предпочтении следует отдать основной системе, показанной на черт. 12, а, так как в этом случае влияние нагрузки на систему ограничивается участком АС, тогда как в остальных двух

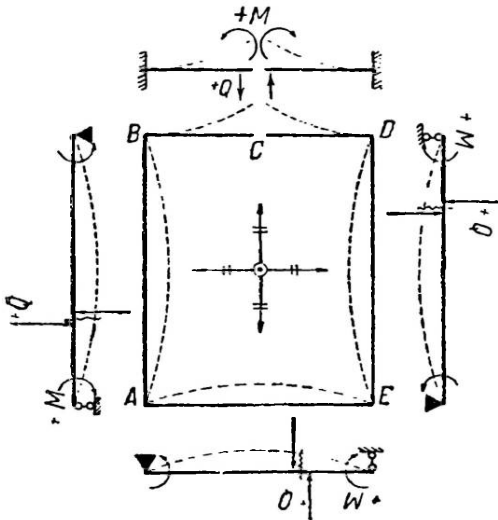
основных системах, показанных на черт. 12, действие груза распространяется на всю систему.

Как указывалось выше, обычно за основную систему принимается система статически определимая. Однако не устраняется возможность выбрать в качестве расчетной системы статически неопределимую систему со сниженной степенью статической неопределимости; при этом в последнюю вводится сила или момент взамен устраненной в заданной системе лишней связи. Это делается, когда представляется возможным использовать уже хорошо изученные свойства системы с меньшим числом неизвестных.

вление неизвестных определяется знаком, получаемым в конечном расчете. Получение результата расчета с положительным знаком показывает, что действительное направление искомого усилия или момента соответствует принятому в расчете; отрицательный же знак показывает, что принятое в расчете направление должно быть изменено на обратное.

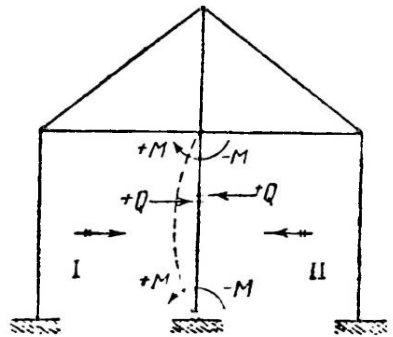
В системах с замкнутыми контурами оценка знаков перемещений и соответствующих им моментов и усилий делается с точки зрения наблюдателя, помещающегося внутри контура.

Так, в раме, показанной на черт. 14, положительные направления изгиба осей отдельных сторон показаны пунктиром.



Черт. 14.

положительные направления изгиба Действительно, наблюдатель, помещающийся внутри контура рамы и рассматривающий каждую сторону рамы, как балку с прямой осью, будет видеть, что все стороны рамы изогнуты по отношению к нему как бы книзу, что соответствует положительному направлению перемеще-



Черт. 15.

ний. Соответствующие этим изгибам направления положительных моментов показаны на черт. 14 стрелками.

Направление поперечной силы считается положительным, если она вращает часть стержня, к которой приложена, по направлению часовой стрелки. На черт. 14 эти направления показаны стрелками.

При наличии в системе нескольких замкнутых контуров (черт. 15) знаки моментов в отдельных стержнях устанавливаются путем последовательного перехода наблюдателя из контура в контур. Таким образом, моменты в среднем стержне, указанные на этом чертеже, являются для контура I положительными, а для контура II — отрицательными. Поперечные усилия в том же стержне будут иметь для обоих контуров один и тот же знак.

Положительным направлением продольных усилий при любом наклоне осей стержней считается направление, исходящее из разреза стержня.

§ 3. ВЫРАЖЕНИЯ МОМЕНТОВ, УСИЛИЙ И ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ СИСТЕМЕ

Силы и моменты, вводимые в расчетную систему вместо связей, устраняемых из заданной статически неопределимой системы, являются теми неизвестными, предварительное определение которых необходимо для полного расчета системы, т. е. для определения усилий и моментов, действующих во всех ее элементах. Для определения этих лишних неизвестных составляются добавочные уравнения по условиям упругих перемещений, возможных для данной статически неопределимой системы.

Расчетная основная система с приложенными к ней заданной нагрузкой и неизвестными $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$, заменяющими собой устраненные связи, должна работать так же, как заданная статически неопределимая система, поэтому усилия и перемещения, вызываемые в ней действием нагрузки и указанных неизвестных, должны быть равны усилиям и перемещениям, имеющим место в заданной статически неопределимой системе.

Если принять, что усилие или момент в сечении k основной системы, вызываемые действием заданной нагрузки P , равны S_k^0 и что усилие или момент, вызываемые в том же сечении силой $\bar{X}_m = 1$, приложенной по направлению неизвестного X_m , соответственно равны \bar{S}_{mk} , то полное усилие или момент в расчетной схеме определяется выражением:

$$S_k = S_k^0 + \bar{S}_{k1} X_1 + \bar{S}_{k2} X_2 + \dots + \bar{S}_{kn} X_n. \quad (3)$$

Усилие S_k , которое имеет место в основной статически определимой системе, равно усилию в том же сечении заданной статически неопределимой системы, так как оно является результатом действия нагрузки и усилий, заменяющих лишние связи.

Аналогично перемещение Δ_k по направлению усилия S_k в статически неопределимой системе равно перемещению по тому же направлению в основной системе, вычисляемому по формуле:

$$\Delta_k = \Delta_{kp} + X_1 \delta_{k1} + X_2 \delta_{k2} + \dots + X_n \delta_{kn}, \quad (4)$$

где Δ_{kp} — перемещение, вызываемое в сечении k основной системы действием заданной нагрузки P , и δ_{km} — перемещение, вызываемое в том же сечении единичным воздействием $\bar{X}_m = 1$, приложенным к той же системе по направлению неизвестного X_m .

Величина перемещений Δ_{kp} и δ_{km} вычисляется приемами, изложенными в части I настоящего курса, § 87—90.

§ 4. СОСТАВЛЕНИЕ КАНОНИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЛИШНИХ НЕИЗВЕСТНЫХ

Выражение (4) устанавливает зависимость между искомыми неизвестными X_1, X_2, \dots, X_n и перемещениями, имеющими место в заданной статически неопределимой системе. Если будут известны величины перемещений Δ_k в заданной системе, то ряд уравнений вида (4), составленных по числу неизвестных, позво-

лит определить эти неизвестные. В действительности имеем следующие условия для установления величины перемещений в заданной системе:

1) если неизвестное усилие или момент заменяет собой связь в жесткой опоре, то перемещение по направлению этого неизвестного равно нулю, так как опора не смещается;

2) если неизвестное усилие или момент заменяет собой внутреннюю связь

в сечении (черт. 16), то относительное перемещение по направлению этого неизвестного двух точек оси a и b , принадлежащих одному и тому же сечению и только мысленно разделенных воображаемым разрезом, равно нулю, так как в заданной системе нет разрыва между этими точками.

Основываясь на сказанном, можно всегда составить систему уравнений путем приравнивания нулю выражений, определяющих собой перемещения по направлению каждого из неизвестных:

$$\left. \begin{aligned} X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + X_3 \delta_{13} + \dots + X_n \delta_{1n} + \Delta_{1p} &= 0, \\ X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + X_3 \delta_{23} + \dots + X_n \delta_{2n} + \Delta_{2p} &= 0, \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \\ X_1 \delta_{n1} + X_2 \delta_{n2} + X_3 \delta_{n3} + \dots + X_n \delta_{nn} + \Delta_{np} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Эти уравнения, число которых определяется числом неизвестных, и представляют собой систему канонических уравнений; из совместного решения этих уравнений могут быть определены неизвестные $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$. Входящие в эти уравнения коэффициенты вида $\delta_{k\lambda}, \delta_{km}$ при неизвестных и грузовые члены вида $\Delta_{k,p}$ вычисляются как перемещения в статически определенных системах (см. ч. I настоящего курса).

Изложенный прием составления расчетных уравнений известен под названием приема сложения перемещений на основании принципа независимости действия сил.

Другой прием составления канонических уравнений основан на теореме о взаимности работ (см. ч. I, § 85). По этой теореме возможная работа сил первого состояния на перемещениях, вызываемых силами второго состояния, равна возможной работе сил второго состояния на перемещениях, вызываемых силами первого состояния. Отсюда следует, что для составления дополнительных уравнений надо расчетную схему рассматривать в двух предположениях: сил первого состояния и сил второго состояния.

За первое состояние принимается действительное нагружение расчетной системы заданной нагрузкой и лишними неизвестными X_1, X_2, \dots, X_n . За второе состояние принимается воображаемое нагружение той же системы воздействием, равным единице, по направлению каждого из неизвестных.

В соответствии с этими видами нагружения должны рассматриваться и деформации системы. Эти перемещения будут:

1) при первом нагружении: Δ_p — перемещения по направлению заданной нагрузки и $\Delta_1 = 0, \Delta_2 = 0, \dots, \Delta_n = 0$ — перемещения по направлениям лишних неизвестных;

2) при каждом втором (воображаемом) нагружении: δ перемещения, вызываемые рассматриваемым единичным воздействием по направлению заданных нагрузок и принятых неизвестных.

Силы и деформации в обоих состояниях могут быть представлены следующей схемой:

| Первое (действительное) состояние | Силы | | Перемещения | |
|-----------------------------------|---------------------------------------|---------------------|---|-----------------|
| | P, X_1, X_2 | $\dots X_n$ | $\Delta_p, \Delta_1 = 0, \Delta_2 = 0, \dots, \Delta_n = 0$ | |
| Второе (воображаемое) состояние: | перемещения | | силы | |
| 1 | $\delta_{p1} \delta_{11} \delta_{21}$ | $\dots \delta_{n1}$ | $\bar{X}_1 = 1$ | — |
| 2 | $\delta_{p2} \delta_{12} \delta_{22}$ | $\dots \delta_{n2}$ | — | $\bar{X}_2 = 1$ |
| . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . |
| n | $\delta_{pn} \delta_{1n} \delta_{2n}$ | $\dots \delta_{nn}$ | — | $\bar{X}_n = 1$ |

Силы, представляющие опорные сопротивления, не включены в схему, так как перемещения в их направлении как при действительном, так и воображаемом нагружении равны нулю, а следовательно и работа их равна нулю.

Исходя из указанных обозначений, можно на основании теоремы о взаимности работ составить в общем виде выражение взаимной работы:

$$X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{21} + X_3 \delta_{31} + \dots + X_n \delta_{n1} + \Delta_{p1} = \bar{X}_1 \Delta_1 = 0. \quad (6)$$

Здесь под знаком Δ_{p1} подразумевается $\sum P \delta_{p1}$, т. е. возможная работа заданных внешних нагрузок на перемещениях, вызываемых единичным воздействием $\bar{X}_1 = 1$ в направлении каждой из этих нагрузок.

Все слагаемые в этом уравнении включены с положительным знаком в предположении, что их действительный знак будет определяться знаками перемещений Δ и δ по их вычислению.

Выражения работы, аналогичные выражению (6), могут быть составлены для каждого случая воображаемого единичного воздействия и могут быть написаны в виде следующего ряда канонических уравнений, общим числом равных числу неизвестных:

$$\left. \begin{aligned} X_1\delta_{11} + X_2\delta_{21} + X_3\delta_{31} + \dots + X_n\delta_{n1} + \Delta_{p1} &= 0, \\ X_1\delta_{12} + X_2\delta_{22} + X_3\delta_{32} + \dots + X_n\delta_{n2} + \Delta_{p2} &= 0, \\ &\vdots \\ X_1\delta_{1n} + X_2\delta_{2n} + X_3\delta_{3n} + \dots + X_n\delta_{nn} + \Delta_{pn} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

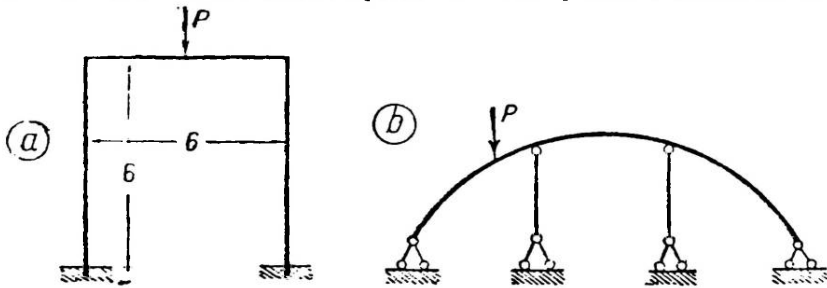
Из сопоставления этих уравнений с уравнениями (5) можно видеть, что они различаются только порядком значков при коэффициентах δ и Δ ; но по теореме о взаимности перемещений (ч. I, § 86) $\delta_{km} = \delta_{mk}$; следовательно коэффициенты при неизвестных и известные члены $\Delta_{kp} = \Delta_{pk}$ в обеих системах уравнений одинаковы. Таким образом различие между системами уравнений (5) и (7) только в принципах их составления.

Кроме описанных двух приемов составления уравнения можно использовать для той же цели теорему Кастильяно (ч. I, § 88); этот прием составления уравнения отличается несколько от первых двух, он рассмотрен особо в § 6.

Выше рассмотрены принципы составления канонических уравнений для определения лишних неизвестных, когда заданная система находится под действием нагрузки. Но во всякой статически неопределимой системе возникают внутренние усилия и моменты не только от действия нагрузки, но и от изменения температуры и от осадки опор; учет этих влияний связан с введением в систему канонических уравнений дополнительных членов, о чем см. ниже § 7.

Задачи и упражнения

4. Показать, есть ли разница в общем виде написания канонических уравнений упругости для систем, показанных на черт. 17. Если этой разницы в общем виде нет, то



Черт. 17.

появится ли она при написании коэффициентов при неизвестных канонических уравнений в развернутом виде (по формуле Мора). Какие формулы или приемы будут использованы Вами для вычисления перемещений при написании канонических уравнений в развернутом виде.

5. Два разных лица написали для расчета системы, показанной на черт. 17, b , разные группы канонических уравнений

$$\begin{aligned} X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + X_3\delta_{13} + \Delta_{1p} &= 0; & X_1\delta_{11} + X_2\delta_{21} + X_3\delta_{31} &= -\Delta_{p1}; \\ X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + X_3\delta_{23} + \Delta_{2p} &= 0; & X_1\delta_{12} + X_2\delta_{22} + X_3\delta_{32} &= -\Delta_{p2}; \\ X_1\delta_{31} + X_2\delta_{32} + X_3\delta_{33} + \Delta_{3p} &= 0; & X_1\delta_{13} + X_2\delta_{23} + X_3\delta_{33} &= -\Delta_{p3}. \end{aligned}$$

Допустимо ли это? И если допустимо, то какой смысл придавали этим уравнениям лица, писавшие их.

6. Показать, какого вида основные системы могут быть получены для статически неопределимых систем, показанных на черт. 17, путем только устранения опорных связей путем только разрезов и путем только включения шарниров. Показать также, какие силовые воздействия должны быть приложены в качестве неизвестных в каждом случае основной системы.

§ 5. РАСЧЕТ СИСТЕМ С ОДНОЙ И ДВУМЯ¹ ЛИШНИМИ СВЯЗЯМИ

При наличии одного неизвестного уравнения (5), служащие для определения неизвестных, приводятся к виду:

$$X_1 \delta_{11} + \Delta_{1p} = 0,$$

откуда

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}}. \quad (8)$$

При двух неизвестных

$$X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + \Delta_{1p} = 0,$$

$$X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + \Delta_{2p} = 0,$$

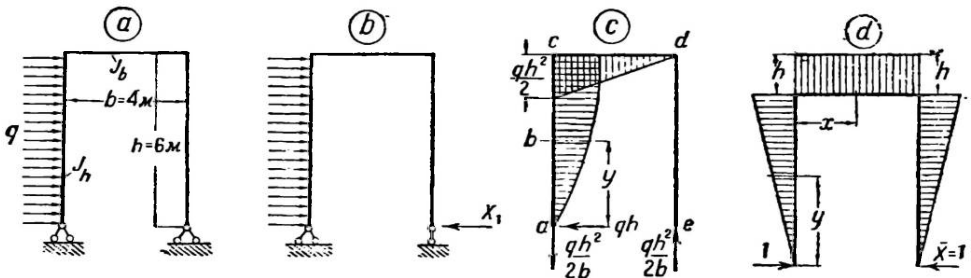
откуда

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1p}\delta_{22} - \Delta_{2p}\delta_{12}}{\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}\delta_{21}}; \quad X_2 = -\frac{\Delta_{2p}\delta_{11} - \Delta_{1p}\delta_{21}}{\delta_{22}\delta_{11} - \delta_{21}\delta_{12}}. \quad (9)$$

Для усвоения приемов последовательности расчета рассмотрим несколько конкретных примеров.

Пример 1. Требуется построить эпюру моментов в двухшарнирной раме (черт. 18), находящейся под действием горизонтальной сплошной нагрузки. Размеры рамы показаны на чертеже.

1) Устанавливаем, что рама однажды статически неопределима ($m = 3 - 2 \cdot 1 = 1$).
2) Принимаем в качестве расчетной статически определимой системы ломаный брус, свободно опирающийся на две опоры (черт. 18, б), и располагаем подвижную опору в пра-



Черт. 18.

вом опорном шарнире; такое расположение подвижной опоры сокращает длину эпюры от заданной нагрузки. Действие устраненной лишней связи (одного опорного стержня на правой опоре) заменяем неизвестной силой X_1 .

3) Строим эпюры моментов для основной системы от заданной нагрузки q (черт. 18, с) и от силы $X_1 = 1$ (черт. 18, д).

4) Вычисляем аналитически или по эпюрам перемещения Δ_{1p} и δ_{11} , входящие в выражение (8), определяющее неизвестное:

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \left(2 \frac{h^3}{3J_h} + \frac{h^2 b}{J_b} \right) \frac{1}{E}; \\ \Delta_{1p} &= \int_0^h \left(qhy - \frac{qy^2}{2} \right) (-y) \frac{dy}{EJ_h} + \int_0^b \left(-\frac{qh^2}{2b} x + qh^2 - \frac{qh^2}{2} \right) (-h) \frac{dx}{EJ_b} = \\ &= \left[-\frac{5}{24} \frac{qh^4}{J_h} - \frac{1}{4} \frac{qh^3 b}{J_b} \right] \frac{1}{E}. \end{aligned}$$

¹ Наличие в системе более двух неизвестных связано со сложными вычислениями, поэтому обычно в таких системах вносят преобразования, упрощающие вычисления и расчет (см. § 9, 10).

4) Определяем неизвестное по уравнению (8):

$$X_1 = \frac{qh}{8} \frac{5h + 6b \frac{J_b}{J_b}}{2h + 3b \frac{J_b}{J_b}}$$

Для данного частного случая при $J_b = 2J_b$, $b = \frac{2}{3}h$

$$X_1 = \frac{13}{48} qh.$$

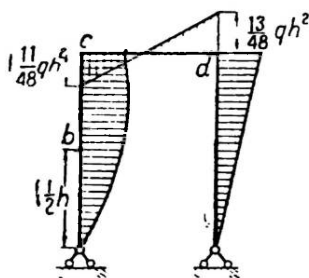
5) Пользуясь выражением (3), вычисляем моменты в характерных точках рамы:

$$M_b = \left(q \frac{h^2}{2} - q \frac{h^2}{8} \right) + \left(-\frac{h}{2} \right) \frac{13}{48} qh = \frac{23}{96} qh^2;$$

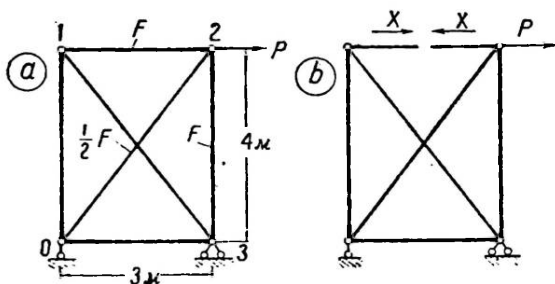
$$M_c = \left(qh^2 - q \frac{h^2}{2} \right) + (-h) \frac{13}{48} qh = + \frac{11}{48} qh^2;$$

$$M_d = (-h) \frac{13}{48} qh = - \frac{13}{48} qh^2.$$

Эпюра построена на черт. 19.



Черт. 19.



Черт. 20.

Пример 2. Требуется определить усилия в ферме, показанной на черт. 20, находящейся под действием силы P .

1) Система однажды статически неопределима.

2) В качестве основной статически определимой может быть взята система, получаемая разрезанием любого стержня. Разрезаем стержень верхнего пояса и прикладываем в разрезе неизвестное усилие X_1 (черт. 20, б).

3) Определяем усилия в стержнях фермы (включая разрезанный стержень): N_p — от заданной нагрузки и \bar{N}_1 — от единичного воздействия $\bar{X}_1 = 1$, приложенного по направлению неизвестного и вычисляем величины $\sum \frac{\bar{N}_1^2 s}{F}$ и $\sum \frac{\bar{N}_1 N_p s}{F}$.

Вычисление вносим в табл. 1.

4) Определяем неизвестное усилие по формуле (8):

$$X_1 = - \frac{\sum N_p \bar{N}_1 \frac{s}{F}}{\sum \bar{N}_1^2 \frac{s}{F}} = - \frac{341P}{6 \cdot 2} = \frac{1}{2} P.$$

5) Вычисляем усилия в стержнях фермы, пользуясь для этого формулой (3), которая приводится к виду:

$$N_k = N_{k,p} + \bar{N}_{k,1} X_1.$$

Вычисление дано в последнем столбце той же таблицы.

Вычисление усилий в стержнях и перемещений Δ_{1P} и δ_{11} для фермы примера 2

| Стержень | Длина стержня s | Площадь сечения F | $\frac{s}{F}$ | Усилие от нагрузки $\bar{X} = 1$ \bar{N}_1 | Усилие от заданной нагрузки P N_p | $\frac{\bar{N}_1 s}{F}$ | $\frac{\bar{N}_1^2 s}{F}$ | $\frac{\bar{N}_1 N_p s}{F}$ | $N_p + \bar{N}_1 X_1$ |
|----------|-------------------|---------------------|----------------|---|--|-------------------------|---------------------------|-----------------------------|-----------------------|
| | m | m^2 | m^{-1} | m | m | m/m | m^2/m | m^2/m | m |
| 0-1 | 4 | F | $\frac{4}{F}$ | $+\frac{4}{3}$ | 0 | $\frac{16}{3F}$ | $\frac{64}{9F}$ | 0 | $+\frac{4}{6}P$ |
| 1-3 | 5 | $\frac{1}{2}F$ | $\frac{10}{F}$ | $-\frac{5}{3}$ | 0 | $-\frac{50}{3F}$ | $\frac{250}{9F}$ | 0 | $-\frac{5}{6}P$ |
| 0-2 | 5 | $\frac{1}{2}F$ | $\frac{10}{F}$ | $-\frac{5}{3}$ | $+\frac{5}{3}P$ | $-\frac{50}{3F}$ | $\frac{250}{9F}$ | $-\frac{250P}{9F}$ | $+\frac{5}{6}P$ |
| 2-3 | 4 | F | $\frac{4}{F}$ | $+\frac{4}{3}$ | $-\frac{4}{3}P$ | $\frac{16}{3F}$ | $\frac{64}{9F}$ | $-\frac{64P}{9F}$ | $-\frac{4}{6}P$ |
| 0-3 | 3 | F | $\frac{3}{F}$ | +1 | $-P$ | $\frac{3}{F}$ | $\frac{3}{F}$ | $-3\frac{P}{F}$ | $-\frac{1}{2}P$ |
| 1-2 | 3 | F | $\frac{3}{F}$ | +1 | 0 | $\frac{3}{F}$ | $\frac{3}{F}$ | 0 | $+\frac{1}{2}P$ |
| Σ | | | | | | | $\frac{682}{9F} =$ | $-\frac{341}{9F}P =$ | |
| | | | | | | | $= \delta_{11} E \cdot m$ | $= \Delta_{1P} E$ | |

Задачи и упражнения

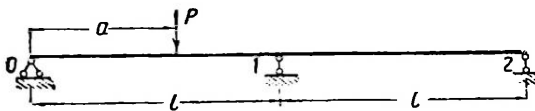
7. Построить эпюру моментов и поперечных сил для двухпролетной балки, находящейся под действием сосредоточенной силы (черт. 21).

Указание. В числе возможных вариантов основной статически определимой системы разобрать случай, когда в балку включен промежуточный шарнир.

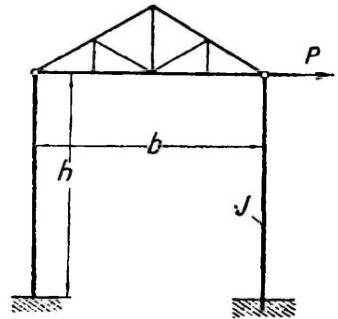
8. Построить эпюру моментов и нормальных сил в раме, показанной на черт. 18, приняв за основную систему трехшарнирную арку.

Указание. Промежуточный шарнир следует поставить посредине, что позволит использовать прямую и обратную симметрию.

Сопоставьте расчет по этой основной системе с процессом расчета по основной схеме, данной в примере 1. Следует также разобрать основную систему в виде балки с подвижной опорой в левом шарнире.



Черт. 21.



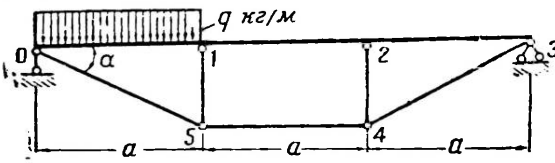
Черт. 22.

9. Определить разницу в величинах изгибающих моментов в колоннах системы, показанной на черт. 22.

Указание. Следует обратить внимание на то, какие стержни в системе не работают при действии силы P .

10. Написать выражение неизвестного в шпренгельной балке в условиях загрузки ее, показанного на черт. 23.

11. Построить эпюру моментов в параболической арке постоянного сечения при действии на нее сосредоточенного груза (черт. 24).

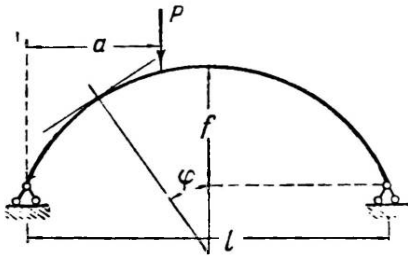


Черт. 23.

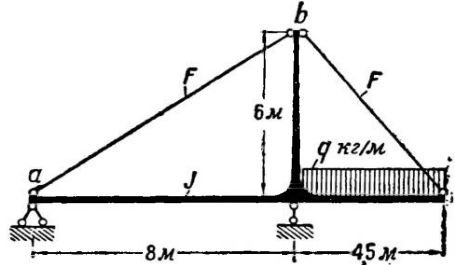
Указание. Уравнение оси арки $y = \frac{4f}{l^2} x(l-x)$.

Учитывая пологость арки, можно принять $ds = dx$. При вычислении распора целесообразно разложить нагрузку на прямо и обратно симметричную.

12. Определить величину изгибающего момента в сечении подошвы стойки в системе, показанной на черт. 25.



Черт. 24.



Черт. 25.

§ 6. ПРИНЦИП НАИМЕНЬШЕЙ РАБОТЫ

Уравнения, необходимые для определения лишних неизвестных в статически неопределимых системах, могут быть составлены на основании теоремы Кастильяно (ч. I, § 88). По этой теореме перемещение по направлению силы или момента определяется частной производной из выражения потенциальной энергии по этой силе или моменту. Учитывая установленное выше (§ 4) положение, что перемещения по направлению лишних неизвестных равны нулю, можно написать систему уравнений вида:

$$\frac{\partial U}{\partial X_1} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial X_2} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial X_n} = 0; \quad (10)$$

В каждое из этих уравнений будут входить все неизвестные, так как величина потенциальной энергии заданной системы выражается через заданную нагрузку и лишние неизвестные:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial X_k} = & \sum \int (M^0 + \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + \dots + \bar{M}_n X_n) \frac{\partial M}{\partial X_k} \frac{dx}{EI} + \\ & + \sum \int (N^0 + \bar{N}_1 X_1 + \bar{N}_2 X_2 + \dots + \bar{N}_n X_n) \frac{\partial N}{\partial X_k} \frac{dx}{EF} + \\ & + k \sum \int (Q^0 + \bar{Q}_1 X_1 + \bar{Q}_2 X_2 + \dots + \bar{Q}_n X_n) \frac{\partial Q}{\partial X_k} \frac{dx}{GF} = 0. \end{aligned}$$

Обыкновенно влиянием поперечных сил пренебрегают.

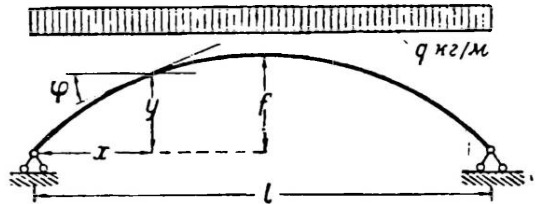
Таким образом уравнения (10) представляют собой систему канонических уравнений, из совместного решения которых определяются лишние неизвестные.

Равенство нулю частных производных потенциальной энергии по независимым переменным показывает, что потенциальная энергия имеет или наибольшее или наименьшее значение.

Так как потенциальная энергия является однородной функцией второй степени и всегда положительна (ч. I, § 83), то вторые производные от нее по независимым переменным будут положительны, из чего следует, что величина потенциальной энергии имеет наименьшую величину.

Итак, лишние неизвестные в статически неопределимой системе имеют такую величину, что вызываемая ими совместно с заданной нагрузкой внутренняя работа системы имеет наименьшую величину. Это положение, известное в технической литературе под названием „принципа наименьшей работы“, дает особый смысл работе статически неопределимой системе, которая, воспринимая нагрузку, стремится выполнить это с наименьшей затратой энергии.

Определение перемещений по теореме Кастиглиано является частным случаем определения их по теореме Мора (т. I, § 88). Поэтому изложенный прием составления расчетных уравнений является частным видом составления их по принципу сложения деформаций (§ 5), причем он связан обычно с более громоздкими алгебраическими преобразованиями. Этим объясняется, что он очень редко применяется в современных расчетах, и усвоение его имеет преимущественно принципиальное значение.



Черт. 26.

Задачи и упражнения

13. Определить величину распора в двухшарнирной параболической арке (черт. 26), находящейся под действием сплошной равномерно распределенной нагрузки.

Указание. Уравнение оси арки

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l-x).$$

В целях упрощения вычислений следует, учитывая пологость арки, принять $\sin \varphi = 0$; $\cos \varphi = 1$; $ds = dx$.

В системе имеется одно неизвестное X_1 ; для определения его имеется условие:

$$\frac{dU}{dX_1} = \int_0^s (M^0 + \bar{M}_1 X_1) \frac{\partial M}{\partial X_1} \frac{ds}{EJ} + \int_0^s (N^0 + \bar{N}_1 X_1) \frac{\partial N}{\partial X_1} \frac{ds}{EF} = 0.$$

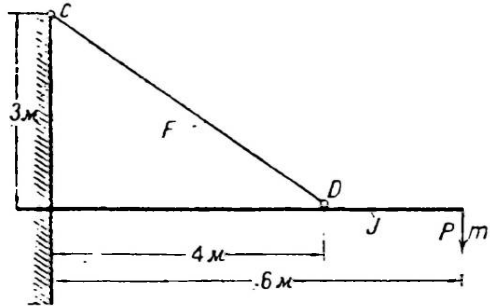
Надо составить выражения для моментов и нормальных сил, написать производные от них по неизвестному X_1 и подставить в уравнение.

14. Определить величину момента в заделанном конце балки в системе, показанной на черт. 27.

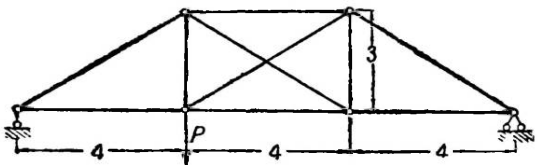
Указание. За лишнее неизвестное следует принять усилие в тяге и включить потенциальную энергию тяги в общее выражение потенциальной энергии системы. При расчете можно пренебречь учетом влияния продольной и поперечной сил в балке на величину потенциальной энергии.

15. Определить усилия в системе, показанной на черт. 28 и находящейся под действием сосредоточенного груза. Сечения всех элементов одинаковы.

Указание. Разобрать, какие стержни могут быть приняты за лишние и какие нет.



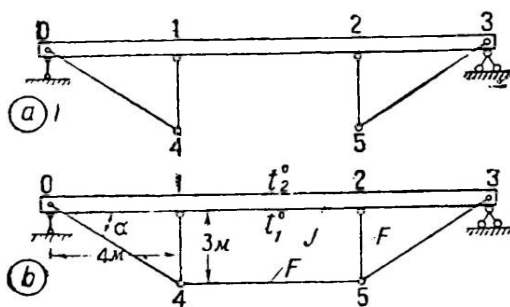
Черт. 27.



Черт. 28.

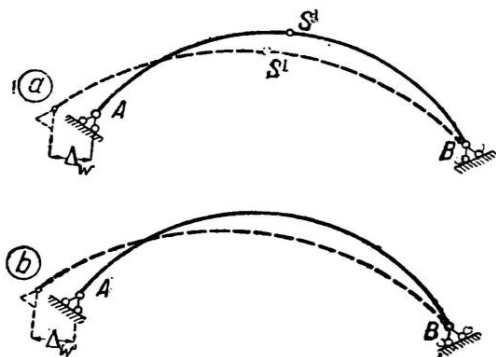
§ 7. ВЛИЯНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ, СМЕЩЕНИЯ ОПОР И НАЧАЛЬНОГО НАТЯЖЕНИЯ

Деформации в основной системе могут быть вызваны не только действием нагрузки, но и изменением температурного режима, а также смещением опор.



Черт. 29.

В статически определимых системах эти деформации не встречают препятствий в своем развитии, а потому не вызывают новых внутренних усилий или моментов в ее частях. Простая балка или ферма, лежащая на двух опорах и подвергающаяся равномерному нагреву, удлинится в сторону подвижной опоры, и в ней не возникнет температурных напряжений. То же самое будет иметь место и в системе, показанной на черт. 29, а; но как только в нее будет введен стержень 4—5 (черт. 29, б), превращающий ее в систему с внутренней статической неопределимостью, равномерный нагрев балочной части 0—3 на $+t^\circ$ повлечет изгиб ее кверху и вызовет дополнительные усилия и моменты в ее частях.



Черт. 30.

Аналогичные явления будут иметь место и при смещении опор. Если в трехшарнирной арке произойдет сдвиг одной из опор, то форма всей системы изменится без изменения кривизны отдельных звеньев и поэтому деформация не будет сопровождаться дополнительными напряжениями (черт. 30, а). Если же произойдет с двухшарнирной аркой (черт. 30, б), то под влиянием

сдвига изменится кривизна оси арки, что будет сопровождаться развитием дополнительных напряжений в ней¹.

Отсюда следует, что при расчете статически неопределимых систем особо должно учитываться развитие внутренних усилий в них под влиянием температурных колебаний и смещений опор.

1. Влияние температуры. При учете влияния температуры на развитие усилий в лишних связях статически неопределимых систем целесообразнее пользоваться приемом написания дополнительных канонических (канонических) уравнений по условию сложения перемещений [формула (5)], в которые перемещения, зависящие от температуры, входят в виде члена Δ_{kt} .

Таким образом общий вид дополнительного уравнения будет:

$$X_1 \delta_{k1} + X_2 \delta_{k2} + X_3 \delta_{k3} + \dots + X_k \delta_{kk} + \dots + X_n \delta_{kn} + \Delta_{kt} = 0. \quad (11)$$

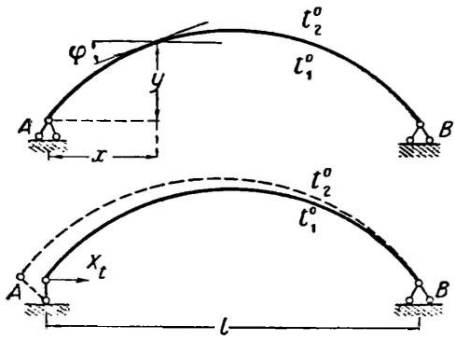
Такие уравнения могут быть написаны для перемещений по направлению каждого лишнего неизвестного; число их будет равно числу n неизвестных, что дает возможность определить величину последних.

¹ На черт. 30 это изменение формы показано в грубом виде; в действительности предполагается, что смещение опор имеет незначительную величину, определяемую в худшем случае несколькими сантиметрами, так что искажение формы самой арки должно быть ничтожно.

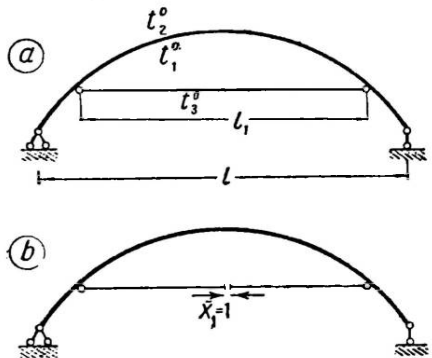
Коэффициенты δ_{km} при неизвестных зависят только от геометрических размеров элементов системы и их упругих свойств и остаются такими же, как при действии нагрузки.

Что касается члена Δ_{kt} , то в общем виде он определяется выражением (ч. I, § 91):

$$\Delta_{kt} = \sum \left(\pm \alpha \Delta t^\circ \int_s \bar{M} \frac{ds}{c} \pm \alpha t^\circ \int_s \bar{N} ds \right), \quad (12)$$



Черт. 31.



Черт. 32.

где $\Delta t^\circ = (t_2^\circ - t_1^\circ)$ — разность температур нагрева крайних волокон стержней поперек оси; $t^\circ = \frac{1}{2}(t_2^\circ + t_1^\circ)$ — температура по оси стержня; c — высота поперечного сечения стержня.

В отличие от интегралов, определяющих величины Δ_{kp} при действии на систему нагрузки, в выражении (12) нельзя пренебрегать влиянием интеграла, определяющего деформации от продольного удлинения.

Если стержень, усилие в котором принято за лишнее неизвестное, подвергнется нагреву на t_3° , то влияние его учитывается введением в выражение (12) добавочного члена, а именно в этом случае:

$$\Delta_{kt} = \sum \left(\pm \alpha \Delta t^\circ \int_s \bar{M} \frac{ds}{c} \pm \alpha t^\circ \int_s \bar{N} ds \right) \pm \alpha t_3^\circ s.$$

При $t_3^\circ = t^\circ$ добавочный член можно отдельно не выписывать, а включить в общую сумму \bar{N} , принимая в лишнем стержне системы усилие $\bar{N}_k = 1$.

В формуле (12) для величины Δ_{kt} берутся знаки плюс или минус в зависимости от того, совпадают или нет по направлению деформации, вызываемые действием температуры и единичным воздействием.

Так например, для системы, показанной на черт. 31, с одним лишним неизвестным, подвергшейся действию температуры t_2° с наружной стороны и t_1° с внутренней стороны, причем $t_2^\circ > t_1^\circ$ уравнение деформаций (11) напишется так:

$$X_1 \delta_{11} + \frac{\alpha \Delta t^\circ}{c} \int_s y ds - \alpha t^\circ \int_s \cos \varphi ds = 0. \quad (13)$$

В рассматриваемом случае деформации изгиба, вызываемые действием температуры и единичного воздействия, совпадают по направлению, а потому первый член в уравнении (13), характеризующий это влияние, введен со знаком плюс. Продольные деформации, вызываемые влиянием температуры и единичным воздействием, противоположны по направлению, и поэтому второй член в том же уравнении, характеризующий это влияние, введен со знаком минус.

Если арка имеет затяжку (черт. 32), подвергшуюся нагреву на t_3° по сравнению с температурой, которую она имела при установке ее на место, то уравнение деформации для определения неизвестного усилия в затяжке должно быть написано в виде:

$$X_1 \delta_{11} + \frac{\alpha \Delta t^\circ}{c} \int_s y ds - \alpha t^\circ \int_s \cos \varphi ds + \alpha t_3^\circ l_1 = 0.$$

2. Влияние смещения опор. Под понятием смещения опор подразумеваются как линейные перемещения опорных плоскостей или шарниров, так и повороты опорных плоскостей. В системах только с внутренней статической неопределимостью смещения опор не вызывают дополнительных усилий, так как такие системы в отношении опорных закреплений находятся в таких же условиях, как и статически определимые; но в системах с внешней статической неопределимостью при смещении опор возникнут дополнительные напряжения.

Составление дополнительных уравнений для определения лишних неизвестных с учетом смещений опор целесообразно сделать на основе теоремы о взаимности работ [по формуле (7)]. При пользовании этой теоремой нагляднее проводится учет смещений как опор, в которые входят лишние неизвестные, так и опор, в которые они не входят.

Наличие деформаций в опорах заставляет учитывать воображаемую работу опорных сопротивлений по этим деформациям.

Предположим, что рассматриваемая статически неопределимая система приведена к основной с опорными закреплениями A, B , в которых по заданию или наблюдению имеют место смещения Δ_{aw}, Δ_{bw} и что в точках приложения лишних неизвестных X_1, X_2, \dots имеют место смещения $\Delta_{1w}, \Delta_{2w}, \dots$. В этих условиях общая схема действительной и воображаемых нагрузок и соответствующих им деформаций, напишется так:

| | | |
|-----------------------------|--|--|
| Действительное состояние | Силы | Перемещения |
| | X_1, X_2, \dots, X_n | $\Delta_{aw}, \Delta_{bw}, \Delta_{1w}, \Delta_{2w}, \dots, \Delta_{nw}$ |
| Воображаемое состояние | Перемещения | Силы |
| | $\delta_{11}, \delta_{21}, \dots, \delta_{n1}$ $\delta_{12}, \delta_{22}, \dots, \delta_{n2}$ | $\bar{A}_1, \bar{B}_1, \bar{X}_1 = 1, \dots, -$ $\bar{A}_2, \bar{B}_2, - \bar{X}_2 = 1, \dots, -$ |
| первое второе и т. д. | | |

В эту схему не вводятся опорные сопротивления, вызываемые действительной нагрузкой, так как перемещения δ по ним от воображаемых „единичных“ воздействий равны нулю.

Действительное и каждое из воображаемых состояний позволяют составить уравнения возможной работы следующего вида:

$$\left. \begin{aligned} X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{21} + \dots + X_n \delta_{n1} &= \bar{A}_1 \Delta_{aw} + \bar{B}_1 \Delta_{bw} + \Delta_{1w} \\ X_1 \delta_{12} + X_2 \delta_{22} + \dots + X_n \delta_{n2} &= \bar{A}_2 \Delta_{aw} + \bar{B}_2 \Delta_{bw} + \Delta_{2w} \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Число таких уравнений равно числу неизвестных.

Входящие в эти уравнения коэффициенты при неизвестных вида δ_{km} зависят только от геометрических и упругих свойств системы и остаются такими же, как при действии нагрузки.

Что касается членов, входящих в правую сторону уравнений (14), то при указанном написании они выносятся со знаком, соответствующим выражению работы каждого члена.

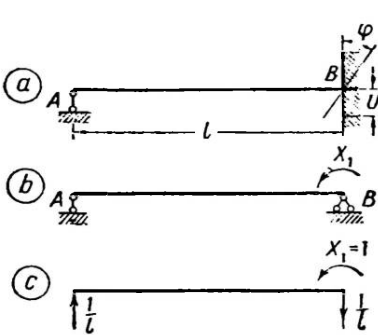
Предположим, что в показанной на черт. 33 системе правая опора получила просадку книзу $\Delta = -u$ и поворот на угол φ по ходу часовой стрелки.

Если принять за основную систему балку, лежащую на двух опорах с неизвестным в виде опорного момента (черт. 33, *b*), то для воображаемого состояния с единичным воздействием $\bar{X}_1 = 1$ опорные реакции будут $\bar{A} = \frac{1}{l}$, $\bar{B} = -\frac{1}{l}$.

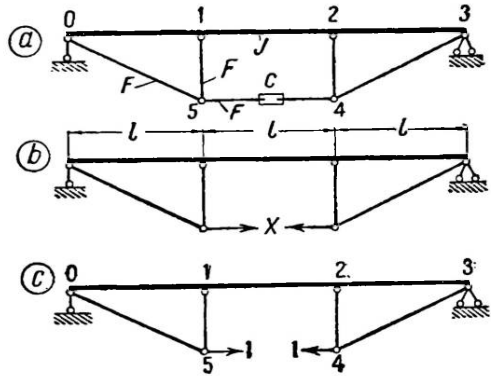
Для составления расчетного уравнения имеем:
 в действительном состоянии X_1 , $\Delta_a = 0$, $\Delta_b = -u$, $\Delta_{\varphi} = \varphi_b$
 в воображаемом состоянии δ_{11} , $\bar{A} = \frac{1}{l}$, $\bar{B} = -\frac{1}{l}$, $\bar{X}_1 = -1$.

По этим данным уравнение деформации напишется так:

$$X_1 \delta_{11} = \frac{1}{l} u - \varphi_b.$$



Черт. 33.



Черт. 34.

Первый член, входящий в правую сторону этого уравнения, введен со знаком плюс, так как направления опорной реакции \bar{B} и смещения совпадают и работа будет положительной; второй член введен со знаком минус, так как принятое направление неизвестного X_1 и заданное направление поворота не совпадают и воображаемая работа будет отрицательной.

3. Влияние искусственного натяжения. В статически неопределимых системах можно вызывать внутренние усилия и моменты путем создания в них искусственных деформаций.

Например, если в шпренгельной балке, показанной на черт. 34, *a*, вызвать при помощи муфты (*C*) укорочение стержня 4—5 на величину Δ , то в балке возникнут усилия, сопровождающиеся выгибом ее кверху. Величины этих усилий являются функциями неизвестной силы X_1 , характеризующей собой внутреннюю силу, передающуюся в узлы 4 и 5 при указанном укорочении. Величина этой силы определяется как неизвестная в статически неопределимой системе по условию деформации последней.

В рассматриваемом частном случае взаимное смещение точек 4 и 5 определяется величиной:

$$\Delta_{45(xp)} = \Delta - X_1 \frac{l}{EF}.$$

Соответственно этому уравнение, служащее для определения неизвестного, напишется так:

$$X_1 \delta_{11}' = \Delta - X_1 \frac{l}{EF}, \quad (15)$$

где величиной δ_{11}' учитываются деформации всех элементов системы за исключением элемента 4—5. Это уравнение может быть переписано так:

$$X_1 \delta_{11} = \Delta,$$

где

$$\delta_{11} = \delta_{11}' + \frac{l}{EF}.$$

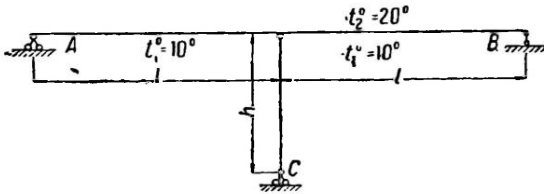
Целесообразно пользоваться в указанных условиях приемом составления расчетного уравнения по теореме взаимности работы, дающей наглядность во внесении знаков. Имеем:

в действительном состоянии X_1, Δ
 в воображаемом состоянии $\delta_{11}, \bar{X}_1 = 1$.

Отсюда

$$X_1 \delta_{11} = \Delta. \quad (16)$$

Возможность внесения в статически неопределимые системы дополнительных внутренних усилий и моментов имеет существенное значение, так как позволяет регулировать работу системы.



Черт. 35.

Задачи и упражнения

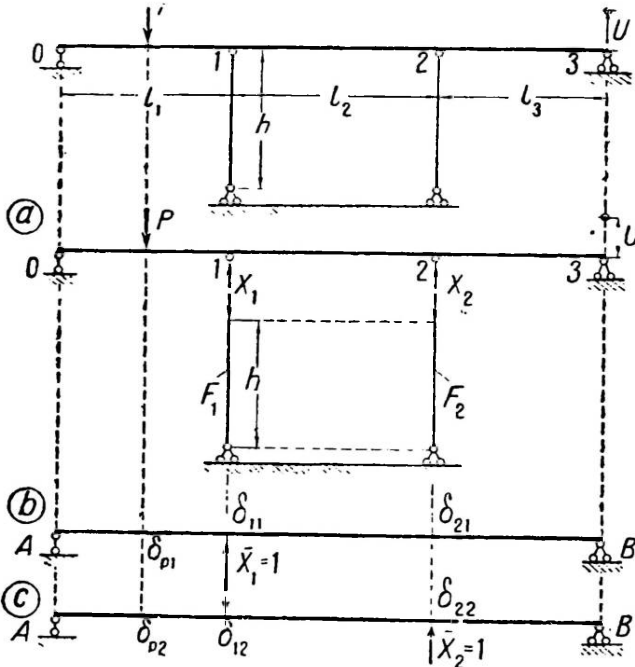
16. Определить наибольший момент в балке, показанной на черт. 35 и подвергающейся неравномерному нагреву сверху на $t_2^\circ = 20^\circ$ и снизу на $t_1^\circ = 10^\circ$.

Указание. При составлении расчетного уравнения следует рассматривать систему, состоящую из балки и опорной стойки, которая нагревается равномерно на $t^\circ = 10^\circ$.

17. Определить продольное усилие в затяжке шпренгельной балки (черт. 29) и момент в самой балке, если балка шпренгеля сверху нагревается на 10° , а низ ее и шпренгельная часть на 20° .

Указание. Величина усилия в затяжке принимается за неизвестное и определяется выражением (из задач 10):

$$X_{1t} = - \frac{\Delta_{xt} EJ}{\frac{1}{3} \left[5a^3 \operatorname{tg}^2 \alpha + 3J \left(\frac{2a}{F_1 \cos^3 \alpha} + \frac{2a \operatorname{tg}^3 \alpha}{F_2} + \frac{a}{F_3} \right) \right]}$$



Черт. 36.

Δ_{x1} в числителе этого отношения представляет перемещение от неравномерного нагрева балки, и от нагрева шпренгельной части [см. формулу (12)].

18. Составить уравнения, необходимые для расчета бабки, показанной на черт. 36, с учетом поднятия в ней опоры 3 на величину $\Delta_3 = u$ и упругих просадок средних опор.

Указание. Для написания уравнений надо составить схемы действительного и воображаемого состояний:

| | | | | | |
|---------------------|---|----------------------------------|--------------------|--------------------|----------------------------|
| Действительное | P, X_1, X_2 | $\Delta_0 = 0$ | $\Delta_1 = \dots$ | $\Delta_2 = \dots$ | $\Delta_b = u$ |
| Первое воображаемое | $\bar{\delta}_{p1}, \bar{\delta}_{11}, \bar{\delta}_{21}$ | $\bar{A} = -\frac{l_2 + l_3}{l}$ | $\bar{X}_1 = 1$ | - | $\bar{B} = -\frac{l_1}{l}$ |
| Второе воображаемое | . | . | . | . | . |

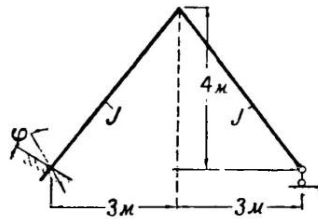
19. Как отзовется на величине распора в двухшарнирной арке вертикальная просадка одной из опор ее.

20. Построить для рамы, показанной на черт. 37, эпюру моментов, которые возникнут в ней от поворота левой опоры на угол $\varphi_n = 0,5^\circ$.

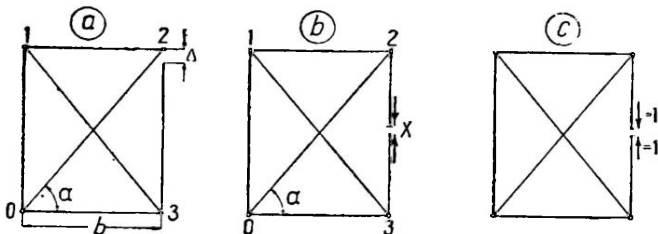
Указание. Рекомендуется в качестве неизвестного принять моментнадевой опоре.

21. Определить усилия, которые возникнут в ферме, показанной на черт. 38, если при изготовлении ее стержень 2—3 был укорочен на величину $\Delta = 0,5$ см и в таком виде введен в ферму. Площади всех стержней одинаковы.

Указание. Введение укороченного стержня равносильно введению искусственного натяжения (§ 7).



Черт. 37.



Черт. 38.

§ 8. ВОЗМОЖНОСТЬ УПРОЩЕНИЯ КАНОНИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ УПРУГОСТИ

Увеличение числа лишних неизвестных в системах сопровождается увеличением числа канонических уравнений и нарастанием вычислительного процесса при решении их. Отсюда естественным является стремление к упрощениям в канонических уравнениях без нарушения точности расчета. Идеальным решением вопроса было бы обращение каждого из канонических уравнений в уравнение с одним неизвестным.

Из рассмотрения канонических уравнений можно видеть, что если сами неизвестные не обращаются в нуль¹, то сокращение числа членов в канонических уравнениях может быть достигнуто только путем обращения в нуль коэффициентов при неизвестных. Последнее возможно в отношении так называемых побочных коэффициентов, характеризующих взаимное влияние двух неизвестных и представляющих перемещение в направлении одного неизвестного под действием другого неизвестного, равного единице; эти коэффициенты определяются выражениями вида:

$$\delta_{km} = \sum_s \int \bar{M}_k \bar{M}_m \frac{ds}{EJ} + \sum_s \int \bar{N}_k \bar{N}_m \frac{ds}{EF} + \sum_s k \int \frac{\bar{Q}_k \bar{Q}_m ds}{GF}.$$

¹ Обращение неизвестного в нуль возможно в условиях специального нагружения системы, о чем сказано ниже в § 9, п. 3.

В эти выражения могут входить положительные и отрицательные члены, что создает возможность обращения их в нуль. Обращение в нуль невозможно для прямых или главных перемещений вида:

$$\delta_{kk} = \sum \int \bar{M}_k^2 \frac{ds}{EJ} + \sum \int \bar{N}_k^2 \frac{ds}{EF} + \sum_k \int \frac{\bar{Q}_k^2 ds}{GF}$$

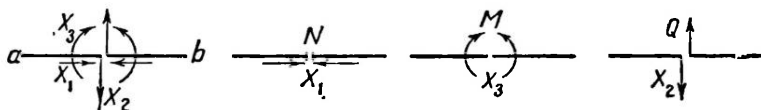
Величины \bar{M}_k , \bar{N}_k и \bar{Q}_k входят в эти суммы во второй степени, поэтому главные перемещения всегда положительны.

Обращение в нуль побочных перемещений может происходить в условиях загрузки симметричной системы прямо и обратно симметричными силами, а также может быть получено путем специальных преобразований: изменением направления неизвестных, изменением координат точек их приложения и т. д. Изучение этих возможностей в применении к простым рамам сделано в следующих параграфах.

§ 9. УПРОЩЕНИЕ КАНОНИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В СИММЕТРИЧНЫХ СИСТЕМАХ. ПАРНЫЕ НЕИЗВЕСТНЫЕ

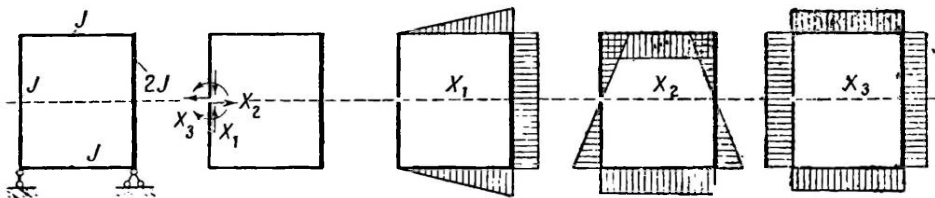
Как известно (ч. I, § 90), в системах, симметричных в геометрическом и упругом отношениях, прямо и обратно симметричная нагрузка создает прямо и обратно симметричные деформации и эпюры внутренних усилий и моментов. То же имеет место при действии на симметричную систему сил и моментов, заменяющих устраняемые лишние связи, так как эти силы и моменты являются внешними силами по отношению к основной системе.

1. **Симметричные неизвестные.** Силы и моменты, прикладываемые в сечении рассекаемых стержней, всегда имеют направление прямо или обратно симметрично



Черт. 39.

относительно разреза, что является условием их равновесия в разрезе (черт. 39). Момент и нормальная сила прямо симметричны, поперечная сила обратно симметрична. Отсюда следует, что при расположении разреза на оси симметрии системы эпюры, создаваемые силами и моментами, приложенными в разрезе, будут прямо или обратно симметричны. Благодаря этому обращаются в нуль перемещения, вызываемые действием прямо симметричной силы по направлению обратно симме-



Черт. 40.

тричной и наоборот, т. е. обращаются в нуль побочные перемещения δ_{12} и δ_{23} . Для пояснения рассмотрим вопрос, где следует сделать разрез рамы, показанный на черт. 40, чтобы хоть часть побочных перемещений в канонических уравнениях обратилась в нуль.

Рама имеет две геометрические оси симметрии и одну ось упругой симметрии¹.

¹ Так будем называть ось, по отношению к которой симметрично расположенные стержни имеют одинаковые поперечные сечения и одинаковые модули упругости.

Разрез можно расположить где угодно, но если мы хотим добиться обращения в нуль хоть части побочных перемещений, то его следует сделать на оси упругой и геометрической симметрии. Из сопоставления эпюр (черт. 40) ясно видно, что перемещения

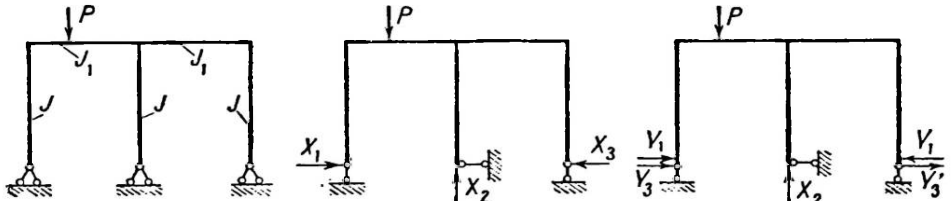
$$\delta_{12} = \delta_{21} = \delta_{23} = \delta_{32} = 0.$$

Итак, расположение разреза по оси симметрии замкнутого контура влечет обращение в нуль части побочных перемещений, что сопровождается распадением трех канонических уравнений на две группы с прямо и обратно симметричными неизвестными:

$$\begin{aligned} X_1 \delta_{11} + X_3 \delta_{13} &= -\Delta_{1p}; & X_2 \delta_{22} &= -\Delta_{2p}; \\ X_1 \delta_{31} + X_3 \delta_{33} &= -\Delta_{3p}. \end{aligned}$$

Распадение канонических уравнений на две группы будет иметь место при любом числе неизвестных в системе, если только они сами все распадаются на прямо и обратно симметричные.

2. Прямо и обратно симметричные „парные“ неизвестные. В некоторых симметричных системах выбор основной системы сопровождается введением в нее



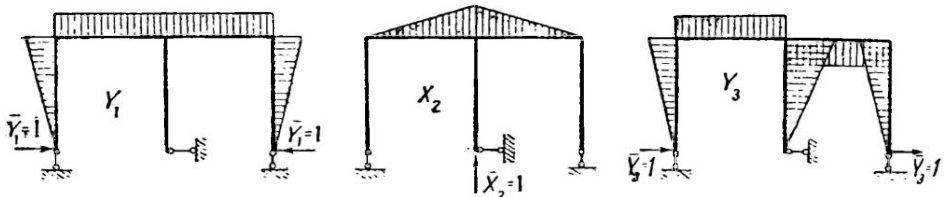
Черт. 41.

неизвестных, симметрично расположенных, но не равных по величине (черт. 41). Побочные перемещения, связывающие эти неизвестные, не равны нулю. В таких случаях обращение в нуль побочных перемещений достигается разложением каждого двух симметричных неизвестных на новые „парные“ неизвестные (черт. 41), из которых одна пара симметрична, а другая обратно симметрична. Оба новые неизвестные Y_1 и Y_3 должны удовлетворять условиям:

$$Y_1 + Y_3 = X_1 \quad \text{и} \quad Y_1 - Y_3 = X_3. \quad (17)$$

Такое разложение всегда возможно, так как оно удовлетворяется одним возможным значением неизвестных:

$$Y_1 = \frac{1}{2} (X_1 + X_3); \quad Y_3 = \frac{1}{2} (X_1 - X_3). \quad (18)$$



Черт. 42.

Так как новые неизвестные прямо и обратно симметричны, то побочные перемещения $\delta_{13} = \delta_{31}$, относящиеся к ним, обращаются в нуль. Вместе с тем, благодаря наличию прямой и обратной симметрии, в них обращается в нуль ряд побочных перемещений, относящихся к другим прямо и обратно симметричным неизвестным в той же системе.

Например в ту же систему, показанную на черт. 42, входит кроме неизвестных Y_1 и Y_3 , неизвестное X_2 , расположенное прямо симметрично, поэтому

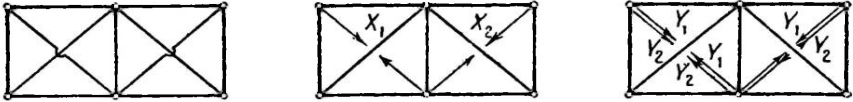
в канонических уравнениях, составляемых для этой системы, обращаются в нуль также побочные перемещения $\delta_{23} = \delta_{32}$. Благодаря этому уравнения распадаются на две группы:

$$\begin{aligned} Y_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} &= -\Delta_{1p}; \\ Y_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} &= -\Delta_{2p}; \end{aligned} \qquad Y_3 \delta_{33} = -\Delta_{3p}$$

Перемещения в них вычисляются по единичным эюграм от парных неизвестных, по этим же эюграм вычисляются ординаты окончательной расчетной эюры моментов по формуле (3):

$$M = M^p + \bar{M}_1 Y_1 + \bar{M}_2 X_2 + \bar{M}_3 Y_3.$$

Разложение неизвестного на слагаемые не изменяет работы системы в целом.



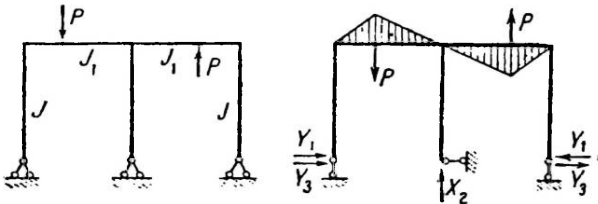
Черт. 43.

Описанный прием имеет большое применение в расчетах сложных рам (§ 45). Он может применяться и в расчетах ферм при наличии в них симметричных неизвестных (черт. 43).

3. Обращение в нуль неизвестных при прямо и обратно симметричном нагружении. Свободные грузовые члены в канонических уравнениях вычисляются по интегралам¹:

$$\Delta_{kp} = \int_s M_p \bar{M}_k \frac{ds}{EJ}.$$

Ясно, что в случае распада неизвестных на две группы прямо и обратно симметричные симметричная нагрузка обратит в нуль все свободные члены



Черт. 44.

в уравнениях с обратно симметричными неизвестными, и наоборот. Из математики же известно, что если в системе уравнений все свободные члены отсутствуют, то все неизвестные, входящие в эти уравнения, равны нулю при условии, если детерминант из коэффициентов при неизвестных

не равен нулю. Зная это положение, можно, не составляя уравнений, заранее сказать, какие неизвестные в условиях данного нагружения равны нулю.

Например в раме, показанной на черт. 44 и нагруженной обратно симметричной нагрузкой, неизвестные Y_1 и X_2 равны нулю, так как $\delta_{13} = \delta_{23} = \Delta_{1p} = -\Delta_{2p} = 0$.

То же может быть сделано по виду деформации, вызываемой нагрузкой; этот прием рассмотрен нами в разделе расчета сложных рам.

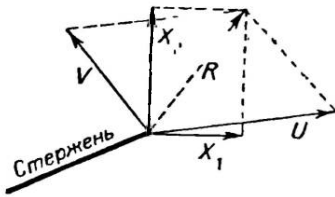
В итоге рассмотренного мы должны отметить, что разложение заданной нагрузки на прямо и обратно симметричную не создает упрощений в решении уравнений, если неизвестные распадаются на две группы прямо и обратно симметричные.

¹ Влиянием сил N и Q на перемещения пренебрегаем, так как оно незначительно по сравнению с влиянием M .

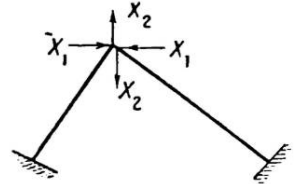
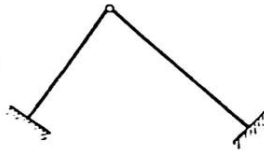
§ 10. ВЫБОР НАПРАВЛЕНИЯ НЕИЗВЕСТНЫХ

При проведении разреза через стержень принято давать направление слагающим X_1 и X_2 по ортогональным осям (черт. 45). Между тем разложение всякой силы (равнодействующей) может быть сделано на слагающие любых направлений; например на направления V и U (черт. 45) и т. д. Посмотрим на конкретных случаях простых рам, какие преимущества в расчете могут быть получены при таком преобразовании.

Предположим, что требуется рассчитать раму, показанную на черт. 46. Она дважды статически неопределима. Основная система может быть выбрана путем



Черт. 45.



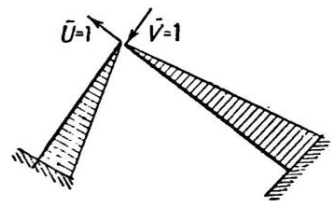
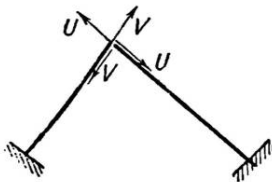
Черт. 46.

разреза по шарниру в виде двух стержней с приложенными к каждому двумя силами X_1 и X_2 . Эпюры моментов от них распространяются на оба стержня и следовательно побочные перемещения не равны нулю. Изменим разложение равнодействующей, направив слагающие по осям стержней (черт. 47). При таком разложении сила U не вызывает моментов в правом стержне, а сила V — в левом стержне; следовательно побочное перемещение $\delta_{uv} = 0$ и в каждое уравнение входит по одному неизвестному:

$$U\delta_{uu} = -\Delta_{pu}; \quad V\delta_{vv} = -\Delta_{pv}.$$

Рассмотрим другой случай рамы (черт. 48). Разложение равнодействующей, проходящей через шарнир на направления X_1 и X_2 , не влечет обращения в нуль побочного перемещения.

Разложим равнодействующую на направление X_1 и новое направление U , проходящее через проекцию на ось рамы центра тяжести треугольной эпюры от X_1 . Из сопоставления эпюр видно, что в этом случае побочное перемещение $\delta_{1u} = 0$.



Черт. 47.

Итак, мы показали, что изменение направлений слагающих сил может обращать в нуль побочные перемещения.

Побочное перемещение, вызываемое действием одной силы по направлению другой, будет равно нулю лишь тогда, когда одна из сил будет нормальна к перемещению, вызываемому другой силой.

На черт. 49 показано разложение равнодействующей R на два направления X_1 и X_2 и показано направление перемещения δ_1 , создаваемое силой X_1 . Последнее разлагается на перемещения δ_{11} и δ_{21} . Для того чтобы побочное перемещение не имело места, надо изменить направление слагающей X_2 на направление силы V , нормальное к перемещению δ_1 и образующее с силой X_2 угол:

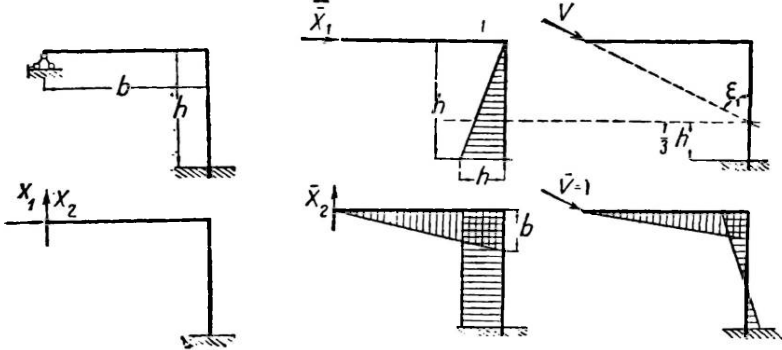
$$\operatorname{tg} \varepsilon_1 = \frac{\delta_{21}}{\delta_{11}}. \quad (19)$$

Знак тангенса определяется знаком перемещения δ_{21} , так как $\delta_{11} > 0$.

Если бы при переходе к новым осям было сохранено направление силы X_2 , то направление силы U должно быть отклонено от направления X_1 на угол ε_2 , тангенс которого определяется отношением:

$$\operatorname{tg} \varepsilon_2 = \frac{\delta_{12}}{\delta_{22}}. \quad (20)$$

Применим полученные формулы к определению новых направлений для расчета рамы, показанной на черт. 48.



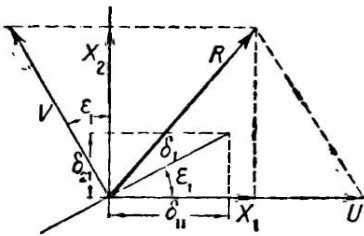
Черт. 48.

Согласно эпюрам моментов, построенным на этом чертеже для сил X_1 и X_2 , получим:

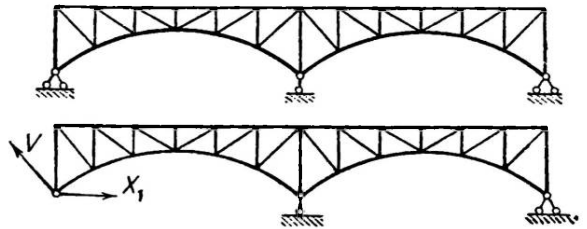
$$\operatorname{tg} \varepsilon_1 = \frac{\delta_{21}}{\delta_{11}} = \frac{\frac{1}{2} h^2 b}{\frac{1}{3} h^3} = \frac{b}{\frac{2}{3} h}$$

что соответствует направлению силы V на черт. 48.

После того как будет установлено новое направление, обеспечивающее обращение в нуль побочного перемещения, расчет производится в обычном порядке: уравнения составляются для новых неизвестных, коэффициенты при неиз-



Черт. 49.



Черт. 50.

вестных вычисляются по новым „единичным“ эпюрам моментов, и по тем же эпюрам вычисляется окончательная эпюра моментов по формуле (3).

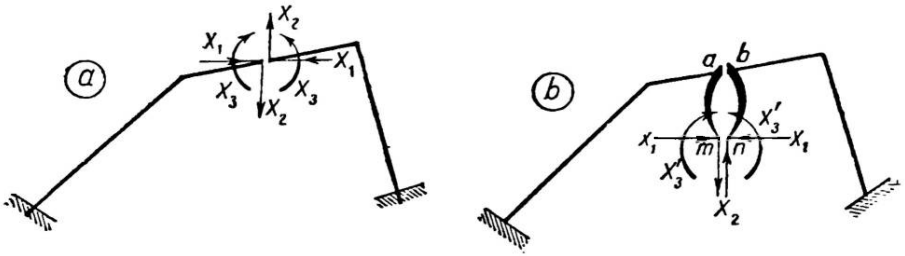
Разобранный прием в одинаковой мере применим к системам сплошным и к фермам (черт. 50), изменяются только формулы, по которым вычисляются перемещения δ . Однако мы должны отметить, что этот прием удобоприменим в тех случаях, когда искомое новое направление неизвестных легко устанавливается по виду самой системы. Сам процесс вычисления угла наклона [по формулам (19), (20)] и вычисление перемещений по новым единичным эпюрам бывает обычно сложнее, чем решение двух уравнений с двумя неизвестными.

§ 11. ПЕРЕХОД К ПАРАЛЛЕЛЬНЫМ ОСЯМ. ПЕРЕНОС СИЛ В ЦЕНТР УПРУГИХ ФИКТИВНЫХ СИЛ

Обращение в нуль побочных перемещений может быть достигнуто переносом точки приложения неизвестных в новую точку.

Наличие в разрезе равнодействующей и момента рассматривается в механике, как перенос в центр тяжести сечения равнодействующей внешних сил, приложенной где-то на плоскости.

Перенос той же равнодействующей может быть сделан в любую точку m



Черт. 51.

плоскости; но для того, чтобы этот перенос не изменил влияния равнодействующей на сечение в разрезе, надо связать точку m неизменно с рассматриваемым сечением. Это осуществляется при помощи воображаемых абсолютно жестких дисков (черт. 51), жестко связанных с сечением. Такой диск не деформируется под действием приложенных к нему сил; так как относительные смещения точек a и b равны нулю, то и относительные смещения точек m и n равны нулю.

Итак, возможность переноса сил и момента осуществимо без нарушения работы системы. Использование этого приема возможно в тех случаях, когда в делаемом разрезе имеет место момент (отсутствие шарнирности).

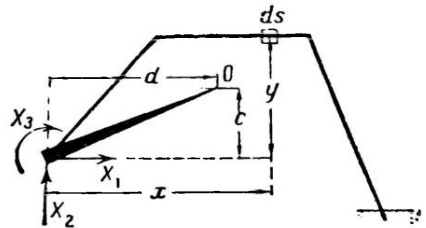
Рассмотрим теперь вопрос, каким условиям должна удовлетворять искомая точка переноса сил, чтобы действие момента не вызывало перемещения по направлению равнодействующей R . Это может иметь место лишь в том случае, если равнодействующая сил проходит через мгновенный центр вращения, вызываемого моментом. Этот центр не имеет поступательных перемещений, поэтому побочные перемещения δ_{13}' , δ_{23}' равны нулю.

Определим координаты мгновенного центра в общем случае наличия в разрезе системы двух сил X_1 , X_2 и момента X_3 . Канонические уравнения напишутся так:

$$\begin{aligned} X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + X_3 \delta_{13} &= -\Delta_{1p}, \\ X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + X_3 \delta_{23} &= -\Delta_{2p}, \\ X_1 \delta_{31} + X_2 \delta_{32} + X_3 \delta_{33} &= -\Delta_{3p}. \end{aligned}$$

Обращение в нуль побочных перемещений δ_{13} и δ_{23} связано с обращением в нуль выражений (черт. 52):

$$\delta_{13}' = \sum \int \bar{M}_1' \bar{M}_3 \frac{ds}{EJ} = 0; \quad \delta_{23}' = \sum \int \bar{M}_2' \bar{M}_3 \frac{ds}{EJ} = 0. \quad (21)$$



Черт. 52.

Моменты \bar{M}_1' и \bar{M}_2' определяют собой моменты в сечениях от действия сил $\bar{X}_1=1$ и $\bar{X}_2=1$, перенесенных в мгновенный центр, координаты которого равны c и d :

$$\begin{aligned}\bar{M}_1' &= -1(y-c) = \bar{M}_1 + 1 \cdot c, \\ \bar{M}_2' &= +1(x-d) = \bar{M}_2 - 1 \cdot d.\end{aligned}$$

Величины $1 \cdot c$ и $1 \cdot d$ представляют собой моменты; учет их влияния в выражении перемещения может быть сделан через эпюру \bar{M}_3 от действия момента $\bar{X}_3=1$, но с помножением ее ординат на постоянные множители c и d . Тогда перемещения δ_{13} и δ_{23} (21) напишутся так:

$$\begin{aligned}\delta_{13}' &= \sum \int (\bar{M}_1 + c\bar{M}_3) \bar{M}_3 \frac{ds}{EJ} = \sum \left[\int \bar{M}_1 \bar{M}_3 \frac{ds}{EJ} + c \int \bar{M}_3^2 \frac{ds}{EJ} \right] = 0, \\ \delta_{23}' &= \sum \int (\bar{M}_2 - d\bar{M}_3) \bar{M}_3 \frac{ds}{EJ} = \sum \left[\int \bar{M}_2 \bar{M}_3 \frac{ds}{EJ} - d \int \bar{M}_3^2 \frac{ds}{EJ} \right] = 0.\end{aligned}$$

Отсюда определяются координаты мгновенного центра:

$$c = - \frac{\int \bar{M}_1 \bar{M}_3 \frac{ds}{EJ}}{\int \bar{M}_3^2 \frac{ds}{EJ}} = - \frac{\delta_{13}}{\delta_{33}}, \quad (22)$$

$$d = \frac{\int \bar{M}_2 \bar{M}_3 \frac{ds}{EJ}}{\int \bar{M}_3^2 \frac{ds}{EJ}} = \frac{\delta_{23}}{\delta_{33}}. \quad (23)$$

Знаки в этих выражениях обусловлены принятыми направлениями сил X_1 и X_2 , из которых сила X_1 вызывает в сечениях отрицательные моменты.

Итак, с переносом сил X_1 и X_2 в мгновенный центр уравнения упругости упрощаются:

$$\left. \begin{aligned}X_1 \delta_{11}' + X_2 \delta_{12}' &= -\Delta_{1p}', \\ X_1 \delta_{21}' + X_2 \delta_{22}' &= -\Delta_{2p}', \\ X_3' \delta_{33} &= -\Delta_{3p},\end{aligned} \right\} \quad (24)$$

где

$$\delta_{11}' = \sum \int \bar{M}_1'^2 \frac{ds}{EJ}; \quad \delta_{22}' = \sum \int \bar{M}_2'^2 \frac{ds}{EJ}; \quad \delta_{12}' = \delta_{21}' = \sum \int \bar{M}_1' \bar{M}_2' \frac{ds}{EJ}.$$

При указанном переносе величины X_1 и X_2 не изменяются, но изменяется величина момента:

$$X_3' = X_3 - X_1 c + X_2 d.$$

Изменяются контуры эпюр от единичных сил $\bar{X}_1=1$ и $\bar{X}_2=1$, но так как перенос неизвестных не изменяет работы системы в целом, как было установлено выше, то ординаты окончательной эпюры моментов вычисляются по новым единичным эпюрам и новому значению X_3' :

$$M = M^0 + \bar{M}_1' X_1 + \bar{M}_2' X_2 + \bar{M}_3 X_3'.$$

Дальнейшее упрощение тех же уравнений (24) может быть достигнуто обращением в нуль побочных перемещений $\delta_{12} = \delta_{21}$ ¹.

Здесь прежде всего надо отметить, что если система обладает полной симметрией относительно одной из своих осей, то мгновенный центр ее лежит на оси симметрии, поэтому при переносе сил в мгновенный центр одно из неизвестных (X_1 или X_2) совпадает с осью симметрии системы, что обращает в нуль

¹ В последующем изложении мы будем обозначать эпюры моментов, получаемые при этом преобразовании, обычным написанием M и перемещения δ без штрихов

² Полная симметрия подразумевает геометрическую симметрию и одинаковые поперечные сечения в симметричных стержнях.

побочные перемещения $\delta_{12} = \delta_{21}$. В связи с этим канонические уравнения (24) обращаются в систему уравнений с одним неизвестным в каждом, т. е. все неизвестные разделяются:

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}}; \quad X_2 = -\frac{\Delta_{2p}}{\delta_{22}}; \quad X_3 = -\frac{\Delta_{3p}}{\delta_{33}}.$$

Эта особенность симметричных систем создает благоприятные условия для использования этого приема расчета в производственных условиях.

В системах несимметричных (черт. 52) дальнейшее упрощение уравнений (24) может быть достигнуто переходом к новым направлениям слагающих (§ 10), после чего уравнения (24) приведутся к уравнениям вида:

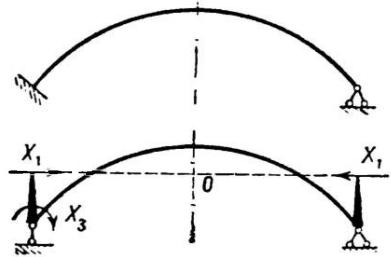
$$U = -\frac{\Delta_{up}}{\delta_{uu}}; \quad V = -\frac{\Delta_{vp}}{\delta_{vv}};$$

$$X_3 = -\frac{\Delta_{3p}}{\delta_{33}}.$$

Переход к новым направлениям неизвестных сопровождается обычно сложными вычислениями, поэтому им редко пользуются; обычно в расчетах несимметричных систем ограничиваются переносом в мгновенный центр и проводят совместное решение уравнений (24) с двумя неизвестными¹.

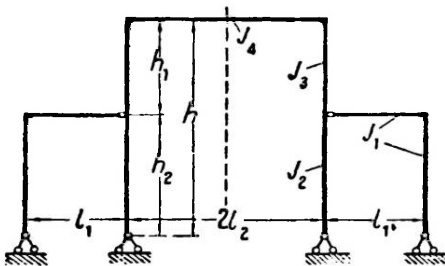
В частном случае наличия в разрезе одной слагающей силы и момента (черт. 53) можно ограничиться переносом силы параллельно самой себе на линию мгновенного центра. Координата этой линии определяется по одной из формул (22), (23), смотря по направлению силы, имеющейся в разрезе.

Координаты c и d мгновенного центра выражены через перемещения относительно к виду системы и могут быть использованы для расчета как систем со сплошными сечениями, так и ферм (см. § 38), в соответствии с чем меняется только формула, по которой вычисляются перемещения.

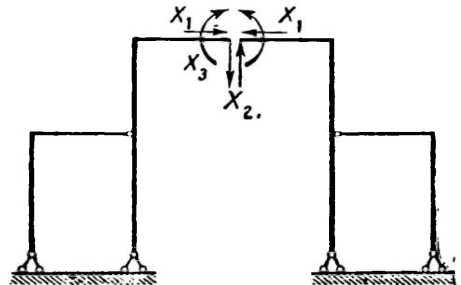


Черт. 53.

Пример 3. Пусть требуется определить неизвестные в системе, показанной на черт. 54.



Черт. 54.



Черт. 55.

Система симметрична и трижды статически неопределима; она приводится к симметричной основной системе путем разреза по оси симметрии с введением в разрез двух сил X_1 и X_2 и момента X_3 (черт. 55). По условиям симметрии побочные перемещения в ней $\delta_{12} = \delta_{21} = \delta_{32} = \delta_{23} = 0$. Сведение к нулю побочных перемещений $\delta_{13} = \delta_{31} = 0$ достигается переносом начала координат в мгновенный центр. Вычисление перемещений δ_{13} и δ_{33} .

¹ Прием перехода к косым осям заслуживает внимания при построении линий влияния в несимметричных системах (см. „Теория сооружений“, т. II, стр. 104—215, 1933).

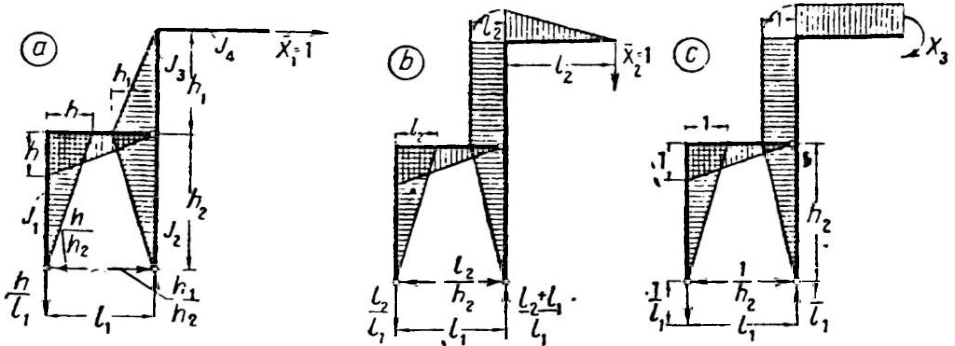
нужных для определения координаты мгновенного центра, проще всего сделать сопряженным эпор (черт. 56, а и с):

$$E\bar{\nu}_{13} = \left(\frac{1}{2} \frac{h_1^2}{J_3} + \frac{1}{3} \frac{h_2 h_1}{J_2} + \frac{1}{3} \frac{h h_2}{J_1} + \frac{1}{3} \frac{h l_1}{J_1} \right) 2,$$

$$E\bar{\nu}_{33} = \left(\frac{l_2}{2J_4} + \frac{h_1}{J_3} + \frac{h_2}{3J_2} + \frac{h_2}{3J_1} + \frac{l_1}{3J_1} \right) 2;$$

отсюда

$$c = - \frac{\frac{1}{3} \left(\frac{3}{2} \frac{h_1^2}{J_3} + \frac{h_2 h_1}{J_2} + \frac{h h_2}{J_1} + \frac{h l_1}{J_1} \right)}{\frac{l_2}{J_4} + \frac{h_1}{J_3} + \frac{h_2}{3J_2} + \frac{h_2}{3J_1} + \frac{l_1}{3J_1}}.$$

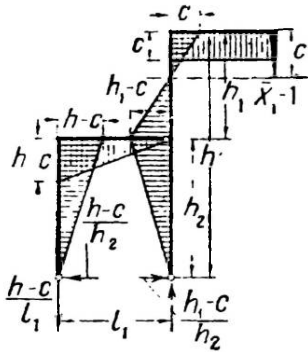


Черт. 56.

С переносом сил в мгновенный центр неизвестные определяются по отношениям:

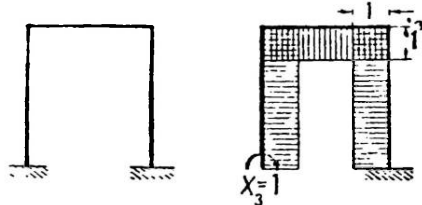
$$X_1 = - \frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}}; \quad X_2 = - \frac{\Delta_{2p}}{\delta_{22}}; \quad X_3 = - \frac{\Delta_{3p}}{\delta_{33}},$$

в которых перемещения Δ_{ip} и δ_{ii} вычисляются по новой эпюре для \bar{X}_1 (черт. 57); эпюры моментов от единичных воздействий \bar{X}_2 и \bar{X}_3 остаются без изменения (черт. 56, b и c).



Черт. 57.

Прием перехода к параллельным осям получил широкое распространение в расчетах систем с замкнутыми контурами, не имеющими шарниров на своем протяжении. В таких системах момент, приложенный в виде нагрузки, вызывает



Черт. 58.

во всех сечениях контура одинаковые моменты, равные по величине грузовому моменту. В частности момент, представляющий единичное воздействие $\bar{X}_3 = 1$ (черт. 58), вызывает во всех сечениях контура момент $\bar{M}_3 = 1$. Эта особенность замкнутых контуров значительно упрощает выражения для побочных перемещений в условиях действия на него сил X_1 и X_2 и момента X_3 (черт. 55).

Предположим, что мы имеем какой-либо замкнутый контур (черт. 59) с приложенными к нему единичными воздействиями $\bar{X}_1 = 1$, $\bar{X}_2 = 1$, $\bar{X}_3 = 1$. В условиях этого контура все побочные перемещения напишутся так:

$$\left. \begin{aligned} E\delta_{13} = E\delta_{31} &= \sum \int \bar{M}_1 \bar{M}_3 \frac{ds}{J} = \sum \int y \frac{ds}{J}, \\ E\delta_{23} = E\delta_{32} &= \sum \int \bar{M}_2 \bar{M}_3 \frac{ds}{J} = \sum \int x \frac{ds}{J}, \\ E\delta_{12} = E\delta_{21} &= \sum \int \bar{M}_1 \bar{M}_2 \frac{ds}{J} = \sum \int xy \frac{ds}{J}, \end{aligned} \right\} (25)$$

Требование обращения в нуль всех этих перемещений:

$$\sum \int y \frac{ds}{J} = 0; \quad \sum \int x \frac{ds}{J} = 0; \quad \sum \int xy \frac{ds}{J} = 0$$

придает особый смысл им в отношении величины $\frac{ds}{J}$. Если принять величины $\frac{ds}{J} = dW$ за условные фиктивные упругие грузы, то первые два интеграла (25) могут рассматриваться, как статические моменты этих упругих грузов, третий интеграл — как центробежный момент инерции тех же грузов. Обращение в нуль каждого из этих интегралов характеризует, как известно, главные оси. Начало этих главных осей лежит в центре фиктивных упругих сил. Таким образом интегралы (25), а следовательно и побочные перемещения, будут равны нулю, если начало координат (т. е. точка приложения неизвестных) будет перенесено в центр фиктивных упругих сил и сами неизвестные будут направлены по главным осям.

Итак, в статически неопределимом замкнутом контуре все побочные перемещения обращаются в нуль при переносе неизвестных сил X_1 и X_2 в центр фиктивных упругих сил и при направлении сил X_1 и X_2 по главным осям тех же грузов. В этом случае мгновенный центр совпадает с центром фиктивных упругих сил. Это условие в одинаковой степени применимо к системам сплошным и к фермам, соответственно изменяется только выражение для упругого груза (см. ниже § 37).

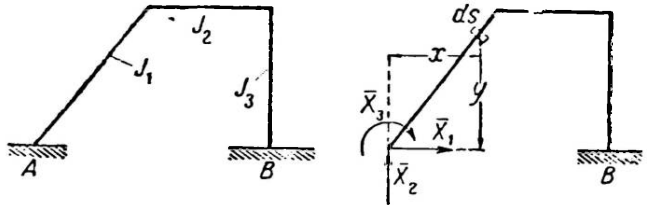
Выведенное условие о переносе сил и момента в центр фиктивных упругих сил позволяет определить координаты его по статическим моментам указанных сил и их равнодействующей:

$$c = \frac{S_y}{R} = \frac{\sum y \Delta W}{\sum \Delta W}; \quad d = \frac{S_x}{R} = \frac{\sum x \Delta W}{\sum \Delta W}. \quad (26)$$

Эти формулы аналогичны формулам (22) и (23).

Аналитический расчет по этим формулам может быть заменен, где это целесообразно, графическим определением центра фиктивных грузов при помощи построения двух веревочных многоугольников и нахождения по ним точки пересечения двух направлений равнодействующей.

Если система полностью симметрична, то центр фиктивных грузов лежит на оси симметрии, которая вместе с тем есть и главная ось. Поэтому, если перенести неизвестные в центр фиктивных грузов и направить одну силу по оси симметрии, а другую перпендикулярно к ней, то будет обеспечено обращение всех побочных перемещений в нуль.



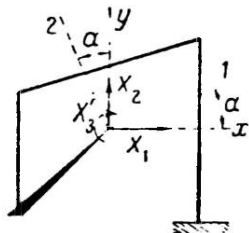
Черт. 59.

Если же система не симметрична, то для обращения в нуль перемещений $\delta_{12} = \delta_{21}$ надо изменить направление сил X_1 и X_2 , направив их по главным осям (черт. 60); направление последних определяется, как известно из курса сопротивления материалов, по формуле:

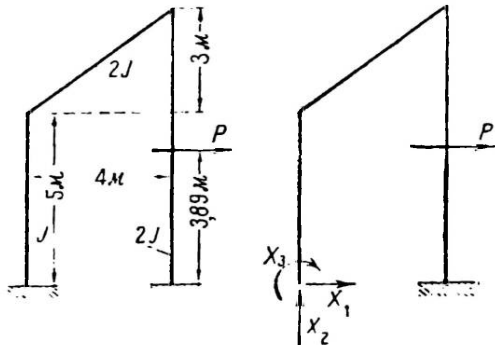
$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{-2J_{xy}}{J_x - J_y} = \frac{-2\sum x y \Delta W}{\sum x^2 \Delta W - \sum y^2 \Delta W} = \frac{-2\delta_{12}}{\delta_{11} - \delta_{22}}.$$

Однако этот переход в несимметричных системах к главным осям всегда связан со сложными вычислениями, что заставляет отказаться от обращения побочного перемещения $\delta_{12} = \delta_{21}$ в нуль и решать уравнения (24) с двумя неизвестными.

Пример 4. В качестве примера применения формул (26) опре-



Черт. 60.

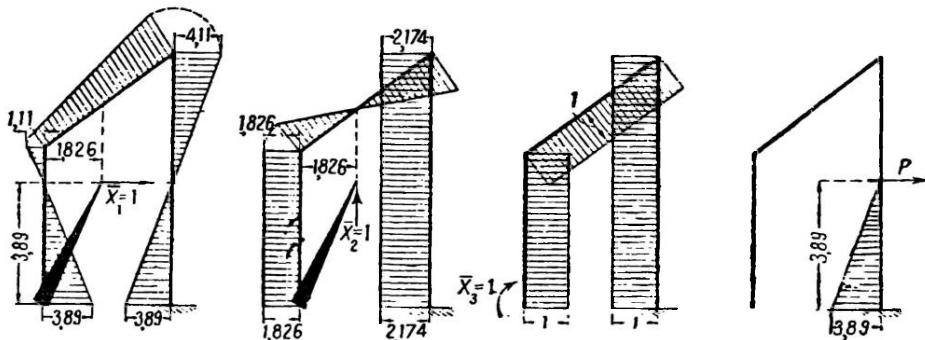


Черт. 61

делим положение центра фиктивных грузов в раме, показанной на черт. 61. Она представляет замкнутый контур и несимметрична.

Фиктивные упругие грузы в каждом из стержней, образующих ее, приводятся к равнодействующим:

$$W_1 = \frac{5}{J}; \quad W_2 = \frac{5}{2J}; \quad W_3 = \frac{8}{2J} = \frac{4}{J}.$$



Черт. 62.

Координаты центра тяжести относительно осей X и Y (черт. 61):

$$c = \frac{\sum y W}{\sum W} = \frac{2,5 \frac{5}{J} + 6,5 \frac{5}{2J} + 4 \frac{4}{J}}{\frac{5}{J} + \frac{5}{2J} + \frac{4}{J}} = 3,89 \text{ м.}$$

$$d = \frac{\sum x W}{\sum W} = \frac{\frac{5}{2J} + 4 \frac{4}{J}}{\frac{23}{2J}} = 1,826 \text{ м.}$$

Строим эпюры моментов от единичных воздействий, приложенных в центре фиктивных грузов, и вычисляем по ним коэффициенты при неизвестных и известных членах (черт. 62)

$$EJ\delta_{11} = \frac{1}{3} 3,89^3 + \frac{1}{3} 1,11^3 + \frac{1}{4} 5 \cdot 1,11 \left(\frac{2}{3} 1,11 + \frac{1}{3} 4,11 \right) +$$

$$+ \frac{1}{4} 5 \cdot 4,11 \left(\frac{1}{3} 1,11 + \frac{2}{3} 4,11 \right) + \frac{1}{6} 4,11^3 + \frac{1}{6} 3,89^3 = 60,357,$$

$$EJ\delta_{22} = 1,826^2 \cdot 5 + \frac{1}{4} 1,826 \cdot 5 \left(\frac{2}{3} 1,826 - \frac{1}{3} 2,174 \right) + \frac{1}{4} 2,174 \cdot 5 \left(\frac{2}{3} 2,174 - \frac{1}{3} 1,826 \right) +$$

$$+ \frac{1}{2} 2,174^2 \cdot 8 = 39,019,$$

$$EJ\delta_{12} = -\frac{1}{2} 3,89^2 \cdot 1,826 + \frac{1}{2} 1,11^2 \cdot 1,826 + \frac{1}{4} 5 \cdot 1,11 \left(\frac{2}{3} 1,826 - \frac{1}{3} 2,174 \right) -$$

$$- \frac{1}{4} 5 \cdot 4,11 \left(\frac{2}{3} 2,174 - \frac{1}{3} 1,826 \right) - \frac{1}{2} 4,11^2 \cdot 2,174 + \frac{1}{2} 3,89^2 \cdot 2,174 = -18,1856.$$

$$EJ\delta_{33} = 5 + \frac{5}{2} + \frac{8}{2} = 11,5,$$

$$EJ\Delta_{1P} = + \frac{1}{4} 3,89^2 \cdot \frac{2}{3} 3,89 P = 9,8106 P,$$

$$EJ\Delta_{2P} = \frac{1}{4} 3,89^2 \cdot 2,17 P = 8,209 P,$$

$$EJ\Delta_{3P} = \frac{1}{4} 3,89^2 P = 3,783 P.$$

Канонические уравнения составляют две группы:

$$60,357 X_1 - 18,1856 X_2 = -9,8106 P,$$

$$-18,1856 X_1 + 39,019 X_2 = -8,202 P; \quad 11,5 X_3 = -3,783 P.$$

Решение их проводится в обычном порядке.

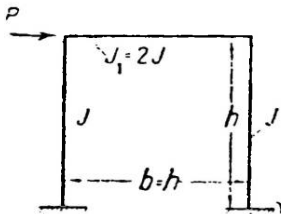
Задачи и упражнения

22. Определить положение центра фиктивных упругих грузов в раме, показанной на черт. 63, и составить уравнение, определяющее распор.

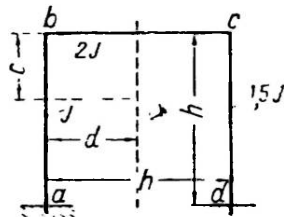
Указание. При выборе основной системы следует обратить внимание на симметричность системы. В данном случае при прямолинейности элементов рамы целесообразно зести вычисления по фиктивным упругим грузам, которые приводятся к виду:

$$W_1 = \frac{h}{J}, \quad W_2 = \frac{b}{2J}, \quad W_3 = \frac{h}{J}.$$

При выборе начальных осей следует исходить из осей, упрощающих вычислительный процесс; в данной раме это сокращение дает ось ригеля.



Черт. 63.



Черт. 64.

23. Показать, как отзовется на положении центра фиктивных грузов увеличение в 1,5 раза момента инерции правой ноги (черт. 64) и найти оси, при которых побочное перемещение δ_{12} обращается в нуль.

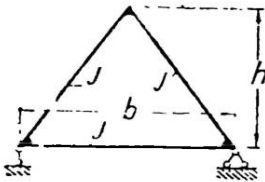
Указание. При решении задачи должны быть использованы указания, данные в задаче 22. Для определения координат c и d целесообразно за исходные оси взять оси, проходящие через середины стойки и ригеля.

Перемещения δ_{11} можно вычислять по фиктивным упругим грузам, как их момент инерции:

$$\delta_{11} = \frac{1}{3} \frac{h^3}{J} + \frac{bh}{J_1} h + \frac{1}{3} \frac{h^3}{J_2} = \frac{9.5}{9} \frac{h^3}{J}.$$

а перемещение δ_{12} , как центробежный момент инерции тех же грузов по формуле:

$$\delta_{12} = \sum (-x) y dW = -\frac{7}{12} \frac{h^3}{J_1}.$$



Черт. 65.

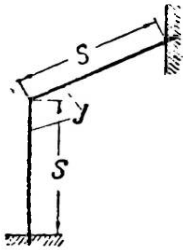
24. Определить положение центра фиктивных упругих сил в треугольной раме, показанной на черт. 65, с одинаковыми моментами инерции по всей длине.

25. Выбрать в раме, показанной на черт. 66, лишние неизвестные по положению и направлению так, чтобы каждое уравнение упругости содержало только одно неизвестное.

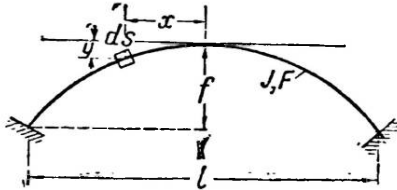
26. Принять в качестве основной системы при расчете свода, показанного на черт. 67, балку, лежащую на двух опорах; показать преобразования, приводящие к полному разделению неизвестных в канонических уравнениях, т. е. к получению уравнений с одним неизвестным в каждом.

Указание. В качестве неизвестных следует принять распор X_1 и два опорных момента X_3 и X_2 . Для обращения побочных перемещений, связывающих опорные моменты, надо использовать свойства парных неизвестных (§ 9).

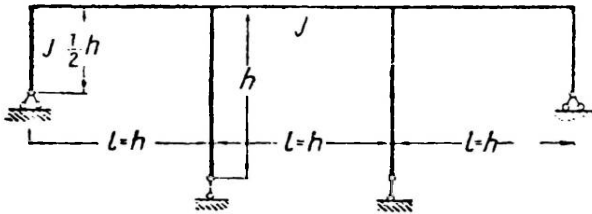
Для дальнейшего упрощения надо использовать прием изменения координат точки приложения распора, поставив условие обращения в нуль побочного перемещения, связывающего распор и прямосимметричную пару опорных моментов. Для расчета принята ось арки, очерченной по параболе



Черт. 66.



Черт. 67.



Черт. 68.

$$y = \frac{4f}{L^2} x^2; \quad F = \frac{F_c}{\cos \varphi}$$

$$\text{и } J = \frac{J_c}{\cos^3 \varphi}.$$

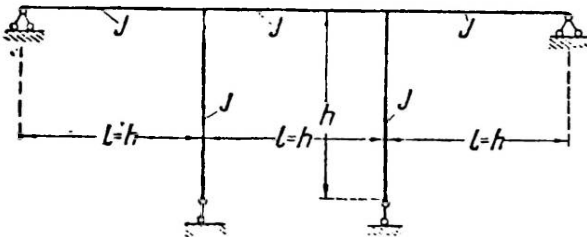
F_c и J_c — площадь и момент инерции в ключевом сечении.

27. Для системы, показанной на черт. 68, выбрать основную систему так, чтобы можно было привести канонические уравнения к уравнениям с одним неизвестным в каждом. Поперечные сечения во всех стержнях одинаковы.

Указание. Следует использовать условие симметрии и перенести неизвестные в мгновенный центр.

Сопоставить: как изменится положение мгновенного центра, если концевые стойки будут сняты (черт. 69).

28. Определить опорные реакции и моменты, возникающие в раме, показанной на черт. 70, под действием равномерного нагрева ее на 10° .



Черт. 69.

возникающие в раме, показанной на черт. 70, под действием равномерного нагрева ее на 10° .

Указание. Для составления канонических уравнений упругости надо принять основную систему в виде бруса, заделанного на правом конце; разобрать, какие смещения вызывает изменение температуры на левом конце рамы, и включить их в качестве известных членов в расчетные уравнения. Неизвестные перенести в центр фиктивных грузов.

§ 12. КОНТРОЛЬ ВЫЧИСЛЕНИЯ В КАНОНИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ

Недостаточная точность вычислений при решении уравнений с несколькими неизвестными, в частности вычислений коэффициентов при неизвестных δ и свободных членов Δ_{kp} , может повлечь за собой грубые ошибки в окончательном итоге¹. Опыт показывает, что определение неизвестных надо делать, оперируя с числами, содержащими не менее четырех точно вычисленных знаков, т. е. обеспечивая точность в сотых долях процента.

Чем больше неизвестных в системе, тем длиннее процесс вычислений и тем легче накопить погрешности в конечном результате, поэтому является необходимым проверять правильность конечных результатов. Конечно, такие проверки могут производиться путем двукратного пересчета, но часто случается, в особенности когда пересчет ведется одним и тем же лицом, что и при повторном пересчете ошибка не замечается, и получается прежний ошибочный результат. Целесообразно производить эти проверки, пользуясь для этого какими-либо другими свойствами, присущими расчетным уравнениям или самой системе.

Контрольные проверки следует делать не только в отношении конечных результатов, но и в процессе самого расчета; к числу последних относятся проверка коэффициентов при неизвестных в канонических уравнениях и проверка свободных членов в них же.

1. Контроль вычисления коэффициентов при неизвестных. Каждый коэффициент при неизвестном в составе канонических уравнений представляет собой выражение перемещения по направлению неизвестного X_k от единичного воздействия, совпадающего по направлению и точке приложения с тем же неизвестным X_k или другим неизвестным X_m . Если рассматривать суммарное перемещение от одновременного действия всех единичных воздействий

$$\bar{X}_1 = 1, \bar{X}_2 = 1, \dots, \bar{X}_k = 1, \dots, \bar{X}_n = 1$$

по направлению неизвестного X_k , то оно определится суммой вида:

$$\delta_{k1} + \delta_{k2} + \dots + \delta_{kk} + \dots + \delta_{kn} = \delta_{ks}. \quad (27)$$

В обозначении δ_{ks} под буквой s подразумевается сумма одновременного действия всех единичных воздействий, вызывающая в сечениях системы внутренние силы

$$\bar{M}_s = \bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \dots + \bar{M}_k + \dots + \bar{M}_n,$$

$$\bar{N}_s = \bar{N}_1 + \bar{N}_2 + \dots + \bar{N}_k + \dots + \bar{N}_n,$$

$$\bar{Q}_s = \bar{Q}_1 + \bar{Q}_2 + \dots + \bar{Q}_k + \dots + \bar{Q}_n.$$

¹ Действительно, при наличии в уравнении даже всего двух неизвестных величина последних определяется выражением:

$$X_1 = - \frac{\Delta_{11}\delta_{22} - \Delta_{21}\delta_{12}}{\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2},$$

в котором, при положительных значениях Δ и δ величина неизвестного определяется отношением разностей, а это может при ничтожных допусках в определении величин Δ и δ привести к грубым ошибкам в конечных вычислениях.

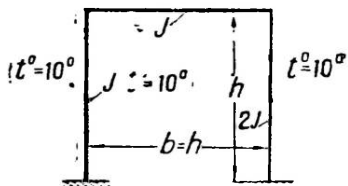
Например, если в дроби, определяемой разностями:

$$\frac{150 - 148}{250 - 248} = 1,$$

при вычислении знаменателя будет сделана ошибка величиной менее 1%:

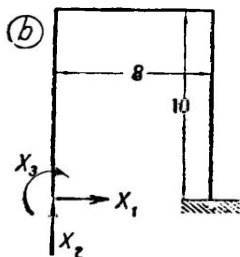
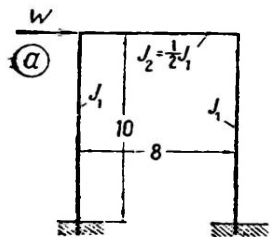
$$\frac{150 - 148}{249 - 248} = 2,$$

то ошибка в окончательном расчете может превысить 100%.



Черт. 70.

Отсюда следует, что суммарное перемещение δ_{k8} может быть получено также из сопоставления усилия или эпюры от единичного воздействия X_k с суммарным усилием или суммарной эпюрой от единичных воздействий по направлению всех неизвестных, т. е.



Черт. 71.

$$\delta_{k8} = \sum \int \overline{M}_k \overline{M}_s \frac{ds}{EJ}$$

Пусть например рассматривается система, показанная на черт. 71, а, которая приводится к основной системе, показанной на черт. 71, б с тремя неизвестными X_1 , X_2 и X_3 .

Эпюры моментов от единичных воздействий на эту систему построены на черт. 72.

Для коэффициентов δ , входящих в расчетные уравнения,

получаются по этим эпюрам следующие значения:

$$EJ_1 \delta_{11} = \frac{2}{3} 10^3 + 10^2 \cdot 8 \cdot 2 = 2266,66.$$

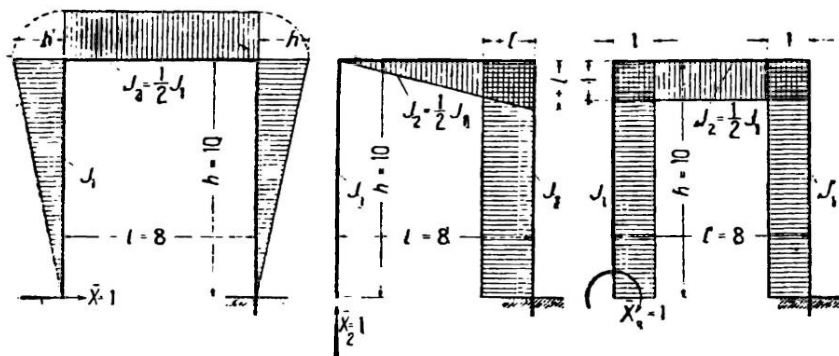
$$EJ_1 \delta_{12} = -\frac{1}{2} \cdot 10^2 \cdot 8 - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 8^2 \cdot 2 = -1040,$$

$$EJ_1 \delta_{13} = -10^2 - 80 \cdot 2 = -260,$$

$$EJ_1 \delta_{22} = 10 \cdot 64 + \frac{1}{3} 8^3 \cdot 2 = 981,3,$$

$$EJ_1 \delta_{23} = 8 \cdot 10 + \frac{1}{2} 64 \cdot 2 = 144,$$

$$EJ_1 \delta_{33} = 10 \cdot 2 + 8 \cdot 2 = 36.$$



Черт. 72.

В соответствии с этим канонические уравнения пишутся так:

$$2266,7 X_1 - 1040 X_2 - 260 X_3 = -\Delta_{1p}$$

$$-1040 X_1 + 981,3 X_2 + 144 X_3 = -\Delta_{2p}$$

$$-260 X_1 + 144 X_2 + 36 X_3 = -\Delta_{3p}$$

Сумма коэффициентов одного ряда, или, что то же, одного столбца, определяется величинами:

$$2266,7 - 1040 - 260 = 966,7,$$

$$-1040 + 981,3 + 144 = 85,3,$$

$$-260 + 144 + 36 = -80.$$

Для контрольной проверки строим суммарную эпюру моментов от всех единичных воздействий X_1, X_2, X_3 (черт. 73); ординаты ее в углах системы определяются суммой ординат единичных эпюр:

| | | |
|----------|----------|--------------------|
| в углу 0 | ордината | $0 + 0 + 1 = +1$ |
| 1 | " | $-10 + 0 + 1 = -9$ |
| 2 | " | $-10 + 8 + 1 = -1$ |
| 3 | " | $0 + 8 + 1 = +9$ |

Сопрягая эту эпюру с каждой из единичных эпюр неизвестных X_1, X_2 и X_3 , определяем величины $\delta_{1s}, \delta_{2s}, \delta_{3s}$, а именно:

$$EJ_1 \delta_{1s} = -\frac{1}{6} 10^3 + \frac{1}{3} 9 \cdot 10^2 + 5 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 2 + \frac{1}{3} 10^3 - \frac{1}{6} 9 \cdot 10^2 = 966,7,$$

$$EJ_1 \delta_{2s} = -3 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 4 - \frac{1}{3} \cdot 8 \cdot 2 \cdot 8 + 4 \cdot 10 \cdot 8 = 85,3,$$

$$EJ_1 \delta_{3s} = -4 \cdot 10 - 5 \cdot 8 \cdot 2 + 4 \cdot 10 = -80.$$

Полученные величины в точности соответствуют построчным суммам единичных перемещений.

Вместо проверки коэффициентов по отдельным рядам и столбцам можно производить более общую проверку по сумме всех коэффициентов канонических уравнений; это обосновывается следующими соображениями.

Приведем вид:

$$\delta_{ks} \cdot \bar{X}_k = 1 \delta_{ks} = \delta_{kn}$$

представляет собой выражение работы от единичного воздействия $\bar{X}_k = 1$ на перемещении, вызываемом по направлению этого неизвестного суммарным действием всех неизвестных. Полная же работа по направлению перемещений всех неизвестных, вызываемая одновременным действием всех неизвестных, выражается суммой:

$$\delta_{1s} + \delta_{2s} + \delta_{3s} + \dots + \delta_{ns} = \delta_{ss}. \quad (28)$$

Величина δ_{ss} может быть вычислена по формуле:

$$\delta_{ss} = \sum \int \bar{M}_s \frac{ds}{EJ} + \sum \int \bar{N}_s \frac{ds}{EF},$$

в которой \bar{M}_s и \bar{N}_s имеют значения, указанные выше.

Например, пользуясь данными вышеприведенного примера, можно величину δ_{ss} определить по суммарной эпюре моментов, показанной на черт. 73:

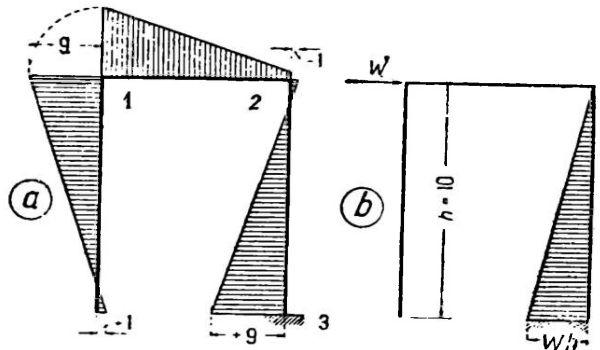
$$EJ \delta_{ss} = -5 \cdot \frac{7}{3} + 5 \cdot 9 \cdot \frac{17}{3} + 4 \cdot 9 \cdot \frac{19}{3} + 4 \cdot \frac{11}{3} \cdot 2 - 5 \cdot \frac{7}{3} + 5 \cdot 9 \cdot \frac{17}{3} = 972.$$

Сумма же всех коэффициентов при неизвестных в уравнениях равна:

$$+ (2266,7 + 981,3 + 2 \cdot 144 + 36) - (2 \cdot 1040 + 2 \cdot 260) = 972,$$

что в точности соответствует контрольной проверке.

Следует отметить, что если производится проверка готового расчета, то ее следует начинать с вычисления величины δ_{ss} , так как этой проверкой охватываются величины всех коэффициентов, и только, если получится расхождение величины δ_{ss} с суммой коэффициентов при неизвестных, надо переходить к проверке величин коэффициентов по рядам. Рекомендуется суммарную эпюру строить независимо от эпюр от единичных воздействий.



Черт. 73.

2. Контроль вычисления известных (грузовых) членов. Проверка правильности вычисления известных членов Δ_{sp} в канонических уравнениях производится, исходя из соображения, что суммарное перемещение Δ_{ps} по направлению заданной нагрузки от суммы всех единичных воздействий определяется суммой вида:

$$\Delta_{p1} + \Delta_{p2} + \dots + \Delta_{pm} = \Delta_{ps}. \quad (29)$$

Для вычисления величины Δ_{sp} могут быть использованы или суммарные усилия \overline{N}_s и моменты \overline{M}_s или суммарные эпюры тех же величин, т. е.:

$$\Delta_{ps} = \sum \int M^0 \overline{M}_s \frac{ds}{EJ} + \sum \int N^0 \overline{N}_s \frac{ds}{EF} = \sum k \int Q^0 \overline{Q}_s \frac{ds}{GF}.$$

Для пояснения рассмотрим приведение контрольного вычисления для системы, показанной на черт. 73.

По данным этой эпюры и эпюр от единичных воздействий, показанных на черт. 72, будем иметь:

$$\Delta_{p1} = -\frac{1}{6} W 10^3 = -166,66 W,$$

$$\Delta_{p2} = \frac{1}{2} W \cdot 8 \cdot 10^2 = 400,00 W,$$

$$\Delta_{p3} = \frac{1}{2} W 10^2 = 50 W,$$

$$\Delta_{ps} = 283,3 W.$$

Та же величина Δ_{ps} получается из сопряжения эпюры черт. 73, *b* с суммарной эпюрой, показанной на черт. 73, *a*.

$$\Delta_{ps} = -\frac{1}{6} W \cdot 10^3 + 3 W \cdot 10^2 = +283,3 W,$$

что подтверждает правильность вычисления известных членов.

§ 13. КОНТРОЛЬ ОКОНЧАТЕЛЬНЫХ ЭПЮР В СПЛОШНЫХ СИСТЕМАХ

Накопление ошибок в процессе вычислений может иметь место не только при вычислении коэффициентов неизвестных, но и при решении самих уравнений; поэтому существенной является проверка полученной окончательной расчетной эпюры.

Частичной проверкой правильности вычисления ординат окончательной эпюры моментов в рамках является условие равновесия узлов, вырезанных из рамы, т. е. равенство нулю суммы моментов у каждого узла.

Например это условие в узлах 1 и 3 рамы, показанной на черт. 74, напишется так:

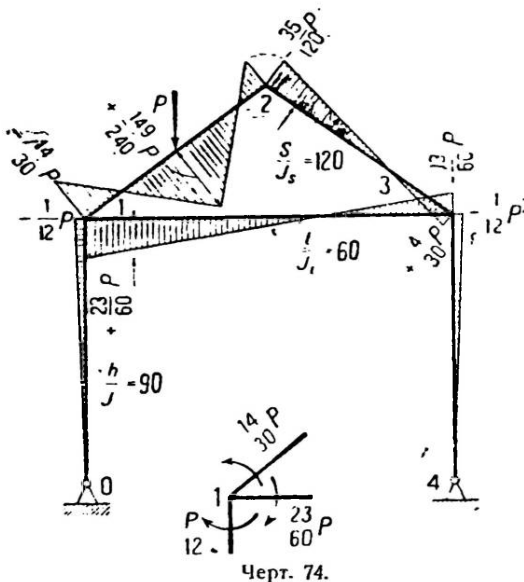
$$-\frac{14}{30} P + \frac{1}{12} P + \frac{23}{60} P = 0,$$

$$+\frac{13}{60} P - \frac{1}{12} P - \frac{1}{30} P = 0;$$

знаки поставлены с учетом направления стрелки каждого момента относительно узла.

Общей проверкой, гарантирующей как правильность определения неизвестных, так и суммирования эпюр, является проверка по условиям перемещений в статически неопределимой системе.

Для выполнения такой проверки достаточно знать какое-либо действительное перемещение в заданной статически неопределимой



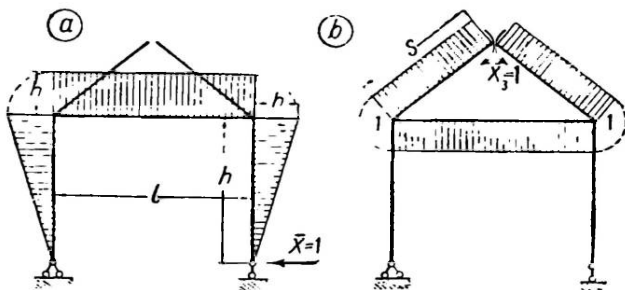
Черт. 74.

системе, чтобы сопоставить его с перемещением, вычисленным по полученной окончательной эпюре моментов. Такими заведомо известными перемещениями являются:

а) перемещения по направлению опорных связей, равные нулю;

в) относительные перемещения по направлению внутренних сил в сечениях системы, равные нулю.

Для вычисления перемещений могут быть использованы основные системы любого вида, но так как обычно в распоряжении проектировщика имеются эпюры от единичных воздействий по направлению неизвестных, то целесообразно пользоваться ими.



Черт. 75.

Пусть например требуется проверить правильность эпюры, показанной на черт. 74. Приняв основную систему, показанную на черт. 75, а, проверяем правильность эпюры перемножением ее на эпюру от единичного воздействия¹ $\bar{X} = 1$:

$$E\Delta_{1p} = \left[2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} \cdot 90 \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{13}{60} \cdot 60 \right] Ph - \frac{1}{2} \cdot \frac{23}{60} \cdot 60 Ph = 0.$$

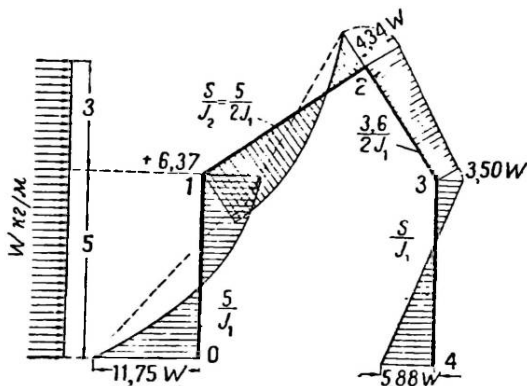
Проверка той же эпюры возможна и по условию действия момента $\bar{X}_3 = 1$ (черт. 75, б):

$$E\Delta_{3p} = \left[+\frac{1}{2} \cdot \frac{23}{60} \cdot 60 - \frac{1}{2} \cdot \frac{13}{60} \cdot 60 + \frac{1}{2} \cdot \frac{35}{120} \cdot 120 - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{30} \cdot 120 + \frac{1}{2} \cdot \frac{14}{30} \cdot 120 + \frac{1}{2} \cdot \frac{35}{120} \cdot 120 - \frac{1}{2} \left(\frac{149}{240} + \frac{91}{240} \right) \cdot 120 \right] Ph = 0.$$

В замкнутых контурах, не имеющих на своем протяжении шарниров, наиболее удобно производить проверку эпюр по углу поворота в предположении действия единичного момента. В этом случае угловое перемещение выражается формулой:

$$\Delta_{3p} = \sum \int M_p \bar{M}_3 \frac{ds}{EJ} = 0. \quad (30)$$

Так как в замкнутом контуре, во всех его сечениях моменты \bar{M}_3 , вызываемые действием момента $\bar{X}_3 = 1$, равны единице, то в этой формуле подынтегральная величина определяет собой площадь эпюры моментов, деленную на соответствующую жесткость. Отсюда следует, что в правильно вычисленных окончательных эпюрах моментов сумма ее приведенных элементарных площадей $\frac{M}{J} ds$, относящихся к каждому замкнутому контуру, равна нулю.



Черт. 76.

¹ В выражение этого перемещения не входит учет влияния угла поворота на левой опоре, так как фиктивная поперечная сила, характеризующая этот поворот, совпадает с линией опор.

На черт. 76 показана эпюра моментов, полученная из расчета рамы. Сумма ее приведенных площадей определяется величиной:

$$\begin{aligned} \Omega = \int M \frac{ds}{J} = & \left\{ -\frac{5}{2} 11,75 + \frac{5}{2} 6,37 + \frac{2}{3} 5^3 \frac{1}{8} + \right. \\ & + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} 6,37 - \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} 4,34 + \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{9}{8} - \frac{1}{2} \cdot (4,34 + 3,50) \frac{3,6}{2} + \\ & \left. + \frac{5}{2} 5,88 - \frac{5}{2} 3,50 \right\} \frac{W}{J_1} = (50,85 - 50,60) \frac{W}{J_1} = 0,25 \frac{W}{J_1}; \end{aligned}$$

ошибка $\frac{0,25}{50,85} \cdot 100 = 0,5\%$, что допустимо.

Другой способ проверки, контролирующей правильность решения уравнений и правильность вычислений, основан на условии, что сумма проекций на две взаимно перпендикулярные оси всех сил, приложенных к части рамы, отделяемой сквозным сечением, равна нулю. Эта проверка удобоприменима в рамах с вертикальными стойками и горизонтальными ригелями.

Поперечная сила в этом случае определяется выражением:

$$Q = Q^0 + \frac{M_{np} - M_{лев}}{l}, \quad (31)$$

в котором Q^0 — поперечная сила от внешней нагрузки для стержня, рассматриваемого как свободно опертая балка; M_{np} , $M_{лев}$ — концевые моменты по концам стержня, направленные положительно, т. е. они изгибают стержень в сторону наблюдателя, помещающегося внутри рамы.

Применяя этот прием для проверок эпюры моментов, показанной на черт. 76, получим в разрезе немного выше опорных концов:

$$\sum Q + P = -8W + 2,5W + \frac{6,37 + 11,75}{5} W + \frac{5,88 + 3,50}{5} W = 0;$$

в разрезе немного ниже узлов 1 и 3:

$$\sum Q + P = -3W + \left(\frac{6,37 + 11,75}{5} - \frac{5}{2} \right) W + \frac{5,88 + 3,50}{5} W = 0.$$

Этот способ проверки одновременно обеспечивает контроль правильности вычисления эпюры моментов и эпюры поперечных сил, так как последняя получается непосредственно из эпюры моментов по зависимости, имеющейся между ними:

$$Q = \frac{dM}{dX}.$$

Этой зависимостью устанавливается величина и знак поперечной силы по эпюре моментов. В то же время направление поперечных сил в сквозном разрезе, проводимом через систему, должно удовлетворять условиям равновесия между ними и нагрузкой.

После того как эпюра поперечных сил сверена с эпюрой моментов, проверка правильности эпюры нормальных сил проводится по условию равновесия вырезанных узлов под действием внешней нагрузки, приложенной к ним, и внутренних сил Q и N в сечениях на концах стержней, сходящихся в нем.

§ 14. ЛИНИИ ВЛИЯНИЯ ЛИШНИХ НЕИЗВЕСТНЫХ

Вопрос о построении линий влияния всегда связан с выражением уравнения усилия или момента в функции положения груза $P = 1$, перемещающегося вдоль системы. В соответствии с этим формула (8), определяющая величину лишнего неизвестного (в случае наличия только одного неизвестного), должна быть представлена в виде:

$$X_1 = -\frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}}, \quad (32)$$

где δ_{1p} — перемещение по направлению неизвестного усилия, вызываемое действием подвижного груза $P=1$.

Помещая груз $P=1$ в различных точках системы и вычисляя для этих положений величину δ_{1p} , мы после деления на величину δ_{11} определим ряд ординат линии влияния лишнего неизвестного. Для построения последней надо полученные ординаты отложить под соответственными точками приложения груза $P=1$. Вершинами ординат очерчивается контур линии влияния.

Величина и знак лишнего неизвестного, определяемого отношением (32), не изменятся, если на основании теоремы о взаимности перемещений его переписать так:

$$X_1 = -\frac{\delta_{1p}}{\delta_{11}} = -\frac{\delta_{p1}}{\delta_{11}}. \quad (33)$$

Но такое написание придает этому отношению особое трактование (черт. 77).

Величина δ_{p1} представляет собой перемещение (прогиб) по направлению груза P от „единичного“ воздействия, приложенного по направлению лишнего неизвестного.

Величина δ_{11} представляет собой перемещение по направлению самого неизвестного от того же единичного воздействия; это перемещение не зависит от положения груза $P=1$ и может рассматриваться, как масштабный множитель, переводящий ординату прогиба в ординату линии влияния лишнего неизвестного.

Таким образом мы приходим к выводу, что эпюра прогибов, построенная в предположении загрузки системы „единичным“ воздействием, приложенным по направлению лишнего неизвестного, может рассматриваться как линия влияния последнего при условии измерения ее в масштабе $\delta_{11}=1$.

Это положение остается справедливым как для систем сплошных (балок, рам и т. д.), так и для систем сочлененных (ферм и т. п.). Построение эпюр перемещений для них может быть сделано аналитически или графически приемами, изложенными в части I настоящего курса в разделах перемещений и построения эпюр прогибов. Мы не будем останавливаться здесь вновь на рассмотрении этих приемов; применение их для систем различного вида дано в нижеприводимых примерах и упражнениях.

Этот положение остается справедливым как для систем сплошных (балок, рам и т. д.), так и для систем сочлененных (ферм и т. п.). Построение эпюр перемещений для них может быть сделано аналитически или графически приемами, изложенными в части I настоящего курса в разделах перемещений и построения эпюр прогибов. Мы не будем останавливаться здесь вновь на рассмотрении этих приемов; применение их для систем различного вида дано в нижеприводимых примерах и упражнениях.

Отметим, что во многих случаях, особенно в применении к фермам, большие преимущества имеет прием построения эпюр перемещений по фиктивным упругим грузам.

Можно рекомендовать проводить построение эпюр перемещений в системах сплошных, образованных из прямых стержней, по уравнению ординат упругой кривой. Для стержня изгибаемого моментами, приложенными на его концах, уравнение упругой кривой приводится к однотипным выражениям в функции абсциссы, что позволяет воспользоваться для вычисления ординат таблицами (см. § 15).

То обстоятельство, что линия влияния неизвестных подобна эпюре прогибов, позволяет представлять себе ее контур без вычисления ординат, что может быть использовано для контроля вида линии влияния (см. § 17).

Пример 5. Построить линию влияния неизвестного в балке, показанной на черт. 78.

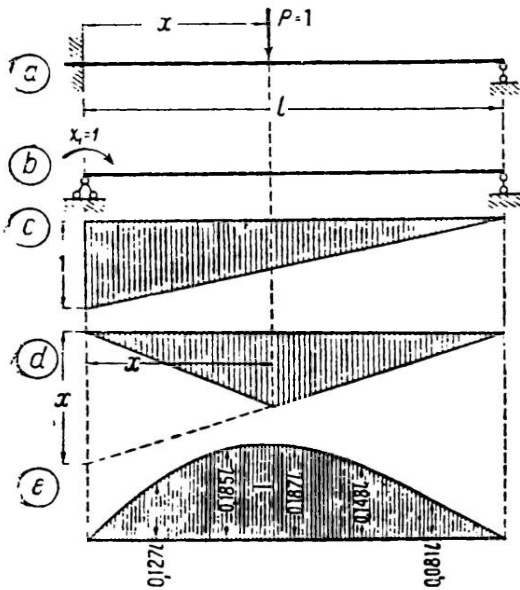
Примем за неизвестное X_1 опорный момент (черт. 78). Произведем вычисление перемещений δ_{d1} и δ_{11} при помощи эпюр моментов, показанных на том же чертеже:

$$EJ\delta_{11} = \frac{1}{2} l \frac{2}{3} = \frac{1}{3} l,$$

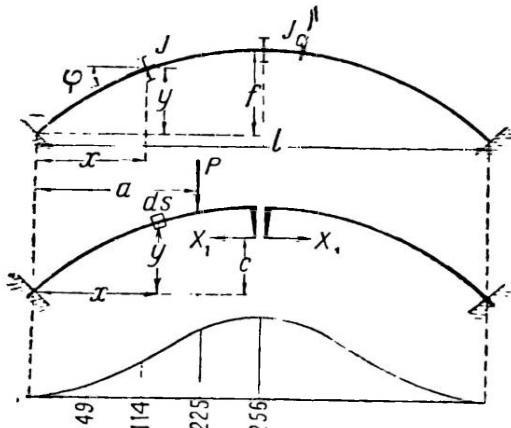
$$EJ\delta_{d1} = \frac{11}{2} lx \frac{2}{3} - \frac{1}{2} x^2 \left[\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \frac{l-x}{l} \right] = \frac{1}{6l} x (l-x) (2l-x)$$

Таким образом линия влияния опорного момента определяется уравнением:

$$X_1 = -\frac{\delta_{p1}}{\delta_{11}} = -\frac{1}{2l^2} x(l-x)(2l-x).$$



Черт. 78.



Черт. 79.

Давая x различные значения, вычисляем ряд ординат линии влияния, контур которой показан на черт. 78.

Пример 6. Построить линию влияния распора в арке с параболической осью и с заделанными концами; момент инерции арки изменяется в отношении

$$J = J_c \cdot \cos \varphi,$$

где J_c — момент инерции в ключевом сечении арки.

Арка трижды статически неопределима. Основную систему следует выбрать симметричной, разрезав арку по оси симметрии (черт. 79). Путем переноса неизвестных X_1 , X_2 и X_3 в центр фиктивных упругих грузов канонические уравнения приводятся к уравнениям, содержащим по одному неизвестному каждое, что позволяет построить линию влияния для каждого неизвестного независимо от других неизвестных.

Уравнение линии влияния распора:

$$X_1 = -\frac{\delta_{p1}}{\delta_{11}}.$$

Положение центра фиктивных упругих грузов определяется по формуле (22):

$$c = \frac{\int y \cos \varphi ds}{\int \cos \varphi ds} = \frac{4f}{l^2} \cdot \frac{\int_0^l x(l-x) dx}{\int_0^l dx} = \frac{2}{3} f.$$

Ордината прогиба δ_{p1} в точке приложения груза $P=f$ от воздействия $X_1=1$ вычисляется по формуле Мора, которая напишется так:

$$E\delta_{p1} = \int_{\kappa}^{l^*} M_p \bar{M}_1 \frac{ds}{J} = \int_0^a (a-x) \left[\frac{4f}{l^2} x(l-x) - \frac{f^2}{3} \right] \times \frac{ds \cos \varphi}{J_c}.$$

После интегрирования и приведения подобных членов получим:

$$EJ_c \delta_{p1} = \frac{-f(l-a)^2 a^2}{3f}.$$

Величина перемещения δ_{11} по направлению самого лишнего неизвестного определяется выражением 1:

$$E\delta_{11} = 2 \int_0^{\frac{1}{2}l} \left[\frac{4f}{l^2} x(l-x) - \frac{2}{3}f \right]^2 \frac{dx}{Jc}.$$

После интегрирования и приведения получим:

$$EJc\delta_{11} = \frac{4}{45}fl.$$

Ординаты линии влияния распора определяются уравнением:

$$X_1 = -\frac{\delta_{p1}}{\delta_{11}} = \frac{15}{4fl^3}(l-a)^2 a^2.$$

Давая ряд значений абсциссе a в долях пролета, получим контур линии влияния распора, показанный на черт. 79.

При наличии в системе двух лишних неизвестных уравнения линии влияния для каждого из них определяются из совместного решения канонических уравнений, составляемых для определения этих неизвестных, но с введением в эти уравнения вместо величин Δ_{p1} и Δ_{p2} величины δ_{p1} и δ_{p2} :

$$X_1\delta_{11} + X_2\delta_{21} = -\delta_{p1},$$

$$X_2\delta_{12} + X_3\delta_{22} = -\delta_{p2}.$$

Отсюда получаем:

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= -\frac{\delta_{p1}\delta_{22} - \delta_{p2}\delta_{21}}{\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}\delta_{21}} = -\frac{\delta_{p1} - \beta_2\delta_{p2}}{\delta_{11} - \beta_2\delta_{21}}, \\ X_2 &= -\frac{\delta_{p2}\delta_{11} - \delta_{p1}\delta_{12}}{\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}\delta_{21}} = -\frac{\delta_{p2} - \beta_1\delta_{p1}}{\delta_{22} - \beta_1\delta_{12}}. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

В этих уравнениях:

$$\beta_1 = \frac{\delta_{12}}{\delta_{11}}; \quad \beta_2 = \frac{\delta_{21}}{\delta_{22}}$$

— числовые коэффициенты, вычисляемые через перемещения, не зависящие от нагрузки.

Величины δ_{p1} и δ_{p2} являются ординатами линии прогибов, вызываемых единичными воздействиями, приложенными к системе по направлению неизвестных. Таким образом для получения ординат линий влияния каждого из неизвестных надо ординаты прогибов δ_{p1} и δ_{p2} умножить на числовые коэффициенты и суммировать их по формулам (34). Масштабом ординат этих линий влияния служит знаменатель правой части.

Пример 7. Требуется построить линии влияния неизвестных в трехпролетной балке, показанной на черт. 80. Основная система может быть принята в виде балки, лежащей на двух опорах с двумя приложенными к ней неизвестными X_1 и X_2 (черт. 80).

Воспользуемся для вычисления ординат эпюры прогибов уравнением ординат упругой кривой, известным из курса сопротивления материалов.

Если груз P приложен на расстоянии a от левой опоры, то ординаты эпюры прогибов определяются уравнениями:

$$EJy = \frac{P(L-a)}{6l} x(x^2 - 2La + a^2),$$

в правой части

$$EJy = \frac{P(L-a)}{6L} x(x^2 - 2La + a^2) - \frac{1}{6}(x-a)^3.$$

Применим эти уравнения к рассматриваемому нами случаю $L = 4l$.

Для случая единичного воздействия $X_1 = 1$ при $a = 1,6l$ ординаты прогибов определяются уравнениями:

в левой ветви

$$EJ\delta_{p1} = \frac{2,4l}{6 \cdot 4l}(x^2 - 2 \cdot 4 \cdot 1,6l^2 + 1,6^2l^2)x = 0,1(x^2 - 10,24l^2)x;$$

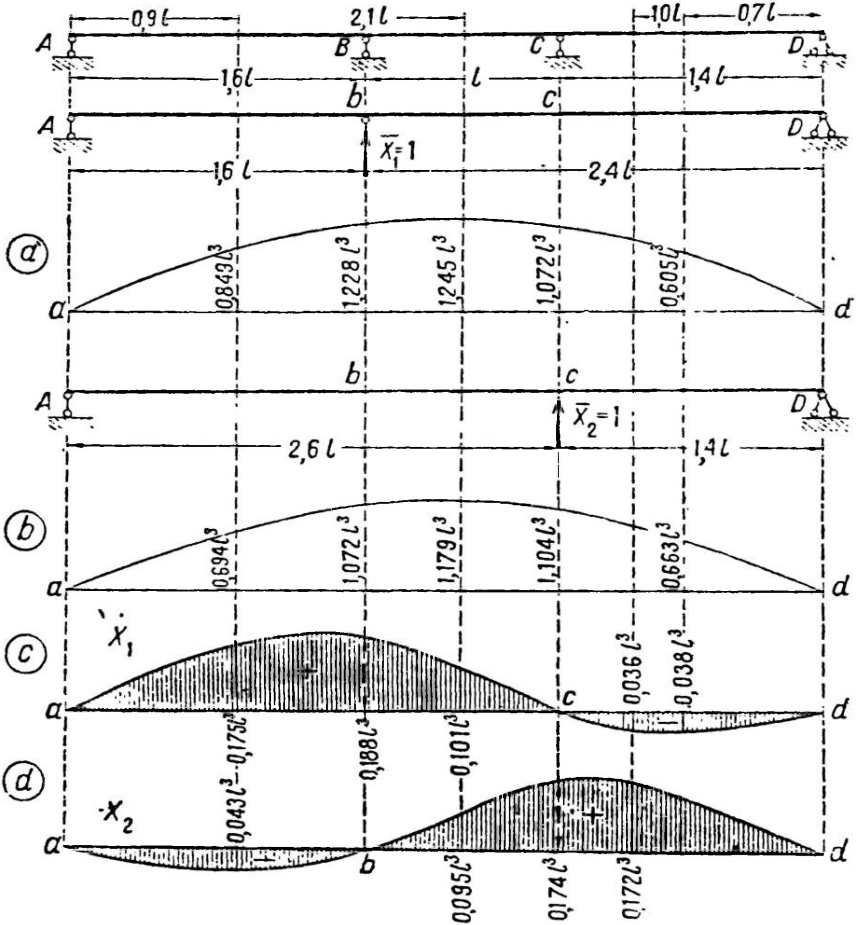
¹ Влияние продольной силы в расчет не введено.

в правой ветви

$$EJ\delta_{p1} = 0,1(x^2 - 10,24l^2)x - \frac{1}{6}(x - 1,6l)^3.$$

Для случая единичного воздействия $\bar{X}_2 = 1$ при $a = 2,6l$ ординаты прогибов определяются уравнениями:
в левой ветви

$$EJ\delta_{p2} = \frac{1,4l}{6 \cdot 4l}(x^2 - 2 \cdot 4 \cdot 2,6l^2 + 2,6^2l^2)x = 0,0583(x^2 - 14,04l^2)x;$$



Черт. 80.

в правой ветви

$$EJ\delta_{p2} = 0,0583(x^2 - 14,04l^2)x - \frac{1}{6}(x - 2,6l)^3.$$

По этим уравнениям вычислены ординаты эпюр прогибов, построенных на черт. 80, а и б.

Ординатами этих эпюр определяются также перемещения:

$$\delta_{11} = 1,228l^3, \quad \delta_{12} = \delta_{21} = 1,072l^3, \quad \delta_{22} = 1,104l^3,$$

служащие для вычисления переходных множителей:

$$\beta_2 = \frac{\delta_{12}}{\delta_{22}} = \frac{1,072}{1,104} = 0,97 \quad \text{и} \quad \beta_1 = \frac{\delta_{21}}{\delta_{11}} = \frac{1,072}{1,228} = 0,87.$$

Эпюра перемещений, служащая для определения неизвестного X_1 , получается сложением ординат эпюры от \bar{X}_1 с ординатами от эпюры \bar{X}_2 , умноженными на 0,97 согласно числителю первого выражения (34):

$$\delta'_{p1} = \delta_{1p} - 0,97\delta_{p2}$$

Эпюра перемещений, служащая для определения неизвестного X_2 , получается путем сложения ординат от эпюры \bar{X}_2 и ординат от эпюры \bar{X}_1 , умноженных на 0,87, согласно числителю второго выражения (34):

$$\delta'_{p2} = \delta_{2p} - 0,87\delta_{p1}$$

Построение этих эпюр сделано на черт. 80, *c* и *d*.

Эти эпюры подобны линиям влияния неизвестных; действительная величина ординат линий влияния получается после изменения знака эпюр и умножения ординат на масштабные множители, определяемые знаменателями в выражениях (34) для неизвестных:

а) для X_1 множитель определяется величиной:

$$\delta_{11} - 0,97\delta_{21} = 1,228l^3 - 0,97 \cdot 1,072l^3 = 0,188l^3;$$

б) для X_2 множитель определяется величиной:

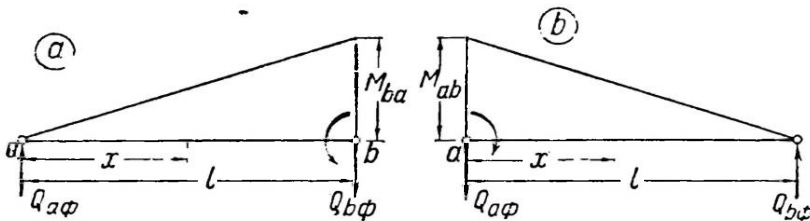
$$\delta_{22} - 0,87\delta_{12} = 1,104l^3 - 0,87 \cdot 1,072l^3 = 0,174l^3.$$

При большем числе неизвестных процесс определения ординат линий влияния остается таким же, как это было показано выше для системы с двумя неизвестными, т. е. ординаты эпюры прогибов определяются из совместного решения канонических уравнений.

§ 15. ТАБЛИЦА ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОРДИНАТ ЛИНИЙ ВЛИЯНИЯ В БАЛКАХ И РАМНЫХ СИСТЕМАХ

Единичные воздействия, прикладываемые к системам с прямолинейными стержнями сплошного сечения, создают эпюры моментов, очерченные прямыми линиями на протяжении каждого стержня, образующего систему. Благодаря этому получаются однотипные уравнения для кривых прогибов, в которые входят в виде параметров моменты, приложенные на концах стержня. Для вывода этих уравнений рассмотрим следующие характерные случаи.

1. Стержень свободно опирается двумя концами. Предположим, что эпюра моментов очерчена по треугольнику, как показано на черт. 81, *a*. Так как брус



Черт. 81.

свободно опирается по концам, то концы его не имеют прогибов, но могут поворачиваться; следовательно по концам имеют место фиктивные поперечные силы:

$$EJQ_{a\phi} = \frac{1}{6} M_{ba}l \text{ и } EJQ_{b\phi} = \frac{1}{3} M_{ba}l.$$

Ордината прогиба на расстоянии x от левого конца определяется уравнением (момент от фиктивной нагрузки):

$$EJy = EJQ_{a\phi} \cdot x - \frac{1}{2} M_{ba} \frac{x^2}{l} \cdot \frac{1}{3} x = \frac{1}{6} M_{ba} lu^2 (1 - u^2), \quad (35)$$

где

$$u = \frac{x}{l}.$$

Когда эпюра моментов имеет треугольное очертание, как показано на черт. 81, *b*, ордината кривой прогибов определяется уравнением:

$$EJy = EJQ_{эф} x - \frac{1}{2} M_{ab} \frac{2}{3} x^2 - \frac{1}{2} M_{ab} \frac{(l-x) \frac{1}{3} l^2}{l} = \frac{1}{6} M_{ab} l^2 u (1-u) (2-u). \quad (36)$$

В обеих формулах произведения

$$u(1-u^2) \quad \text{и} \quad u(1-u)(2-u)$$

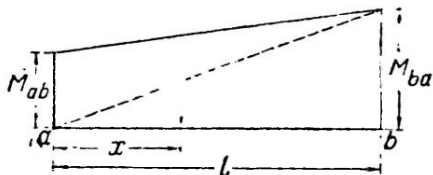
не зависят от размеров и условий загрузки стержня. Величины этих произведений выписаны в табл. 2, в которой они вычислены для значений *u* с интервалами 0,05, что обеспечивает достаточную точность построения линий влияния.

Таблица 2

Коэффициенты для построения линий влияния

| <i>u</i> | <i>u</i> ² | <i>u</i> ³ | <i>u</i> (1- <i>u</i>)(2- <i>u</i>) | <i>u</i> (1- <i>u</i> ²) | <i>u</i> ² (3- <i>u</i>) |
|----------|-----------------------|-----------------------|---------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|
| 0,00 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 0,05 | 0,0025 | 0,0001 | 0,0926 | 0,0499 | 0,0074 |
| 0,10 | 0,0100 | 0,0010 | 0,1710 | 0,0990 | 0,0290 |
| 0,15 | 0,0225 | 0,0034 | 0,2359 | 0,1466 | 0,0641 |
| 0,20 | 0,0400 | 0,0080 | 0,2880 | 0,1920 | 0,1120 |
| 0,25 | 0,0625 | 0,0156 | 0,3281 | 0,2344 | 0,1719 |
| 0,30 | 0,0900 | 0,0270 | 0,3570 | 0,2730 | 0,2430 |
| 0,35 | 0,1225 | 0,0429 | 0,3754 | 0,3071 | 0,3246 |
| 0,40 | 0,1600 | 0,0640 | 0,3840 | 0,3360 | 0,4160 |
| 0,45 | 0,2025 | 0,0911 | 0,3836 | 0,3589 | 0,5164 |
| 0,50 | 0,2500 | 0,1250 | 0,3750 | 0,3750 | 0,6250 |
| 0,55 | 0,3025 | 0,1664 | 0,3589 | 0,3836 | 0,7411 |
| 0,60 | 0,3600 | 0,2160 | 0,3360 | 0,3840 | 0,8640 |
| 0,65 | 0,4225 | 0,2746 | 0,3071 | 0,3754 | 0,9929 |
| 0,70 | 0,4900 | 0,3430 | 0,2730 | 0,3570 | 1,1270 |
| 0,75 | 0,5625 | 0,4219 | 0,2344 | 0,3281 | 1,2656 |
| 0,80 | 0,6400 | 0,5120 | 0,1920 | 0,2880 | 1,4080 |
| 0,85 | 0,7225 | 0,6141 | 0,1466 | 0,2359 | 1,5534 |
| 0,90 | 0,8100 | 0,7290 | 0,0990 | 0,1710 | 1,7010 |
| 0,95 | 0,9025 | 0,8574 | 0,0499 | 0,0926 | 1,8501 |
| 1,00 | 1,0000 | 1,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 2,0000 |

Если эпюра моментов на стержне, свободно опертом по концам, имеет очертание по трапеции (черт. 82), то последняя рассматривается состоящей из двух треугольников, и ординаты кривой прогибов получаются, как сумма двух ординат, определяемых уравнениями (35) и (36).



Черт. 82.

2. Стержень закреплен одним концом. Предположим, что эпюра моментов очерчена по треугольнику, как показано на черт. 83, *a*. Так как левый конец заделан, угол поворота его равен нулю, а следовательно и $Q_{эф} = 0$. Поэтому уравнение эпюры прогибов будет:

$$-EJy = \frac{1}{2} M_{ba} \frac{x^2}{l} \cdot \frac{1}{3} x = \frac{1}{6} M_{ba} l^2 u^3. \quad (37)$$

При очертании эпюры прогибов по треугольнику, расположенному, как показано на черт. 83, *b*, уравнение эпюры прогибов будет:

$$-EJy = \frac{1}{2} M_{ab} \frac{2}{3} x^2 + \frac{1}{2} M_{ab} \frac{l-x}{l} \cdot \frac{x^2}{3} = \frac{1}{6} M_{ab} l^2 u^2 (3-u). \quad (38)$$

В этих уравнениях u^3 и $u^2(3-u)$ не зависят от нагрузки и размеров стержня; величины их выписаны в той же табл. 2.

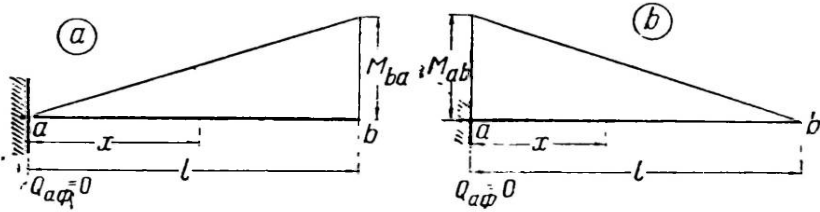
Для того чтобы определить ординату прогиба в точке с абсциссой $u = \frac{x}{l}$, надо цифровые данные, приведенные в табл. 2, помножить на числовую величину $\frac{1}{6} M^2$, где M — момент, полученный из расчета и приложенный на конце бруса.

Воспользуемся данными табл. 2 для вычисления ординат линии влияния опорного момента в балке, показанной на черт. 78.

Ординаты этой линии влияния определяются уравнением [формула (36)]:

$$X = -\frac{\partial p_1}{\partial u} = \frac{-1}{\frac{1}{3}l} \cdot \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot l u (1-u) (u-2),$$

$$X = -\frac{1}{2} l u (1-u) (u-2).$$



Черт. 83.

Давая u ряд значений $1/6, 2/6, \dots$, получим по данным столбца 4 табл. 2 следующие значения ординат линии влияния X :

$$u = 0,167 \quad 0,333 \quad 0,5 \quad 0,667 \quad 0,833$$

$$y = 0,121 l \quad 0,185 l \quad 0,187 l \quad 0,148 l \quad 0,081 l$$

Эти ординаты выписаны на черт. 78.

Изложенный прием построения линий влияния применим при постоянном моменте инерции или при принятом среднем значении его. При резком изменении момента инерции построение кривой прогибов надо делать аналитически при помощи фиктивных упругих грузов.

§ 16. ЛИНИИ ВЛИЯНИЯ УСИЛИЙ И МОМЕНТОВ В СЕЧЕНИЯХ ЭЛЕМЕНТОВ СИСТЕМЫ

После построения линий влияния усилий и моментов в лишних связях можно строить линии влияния усилий и моментов в сечениях элементов статически неопределимых систем. Для этих построений используется формула (3):

$$\bar{S} = \bar{S}^0 + \bar{S}_1 X_1 + \bar{S}_2 X_2 + \dots + \bar{S}_n X_n. \quad (39)$$

Символы, входящие в эту формулу, имеют следующий смысл: \bar{S} — искомая ордината линии влияния усилия или момента в рассматриваемом сечении при данном положении подвижного груза $P = 1$; \bar{S}^0 — ордината (y^0) линии влияния усилия или момента в рассматриваемом сечении для основной системы; $\bar{S}_1, \bar{S}_2, \dots, \bar{S}_n$ — значения усилий или моментов в том же сечении основной системы от единичных воздействий $\bar{X}_1 = 1, \bar{X}_2 = 1, \dots, \bar{X}_n = 1$, приложенных по направлению лишних неизвестных; X_1, X_2, \dots, X_n — ординаты (y_1, y_2, \dots, y_n) линий влияния лишних неизвестных под точкой приложения груза $P = 1$.

Таким образом можно ординату (y) искомой линии влияния в сечении k представить в виде следующей суммы:

$$y_k = y_k^0 + \bar{S}_{k1} y_1 + \bar{S}_{k2} y_2 + \dots + \bar{S}_{kn} y_n. \quad (40)$$

Предположим что имеются уже построенные линии влияния усилий в линиях связи X_1 и X_2 системы, показанной на черт. 84, и требуется построить линию влияния момента в сечении k той же системы.

На черт. 84 построена линия влияния момента в сечении k как системы статически определимой.

По этим данным ординаты искомой линии влияния определяются уравнениями, относящимися к отдельным пролетам:

а) в левом пролете

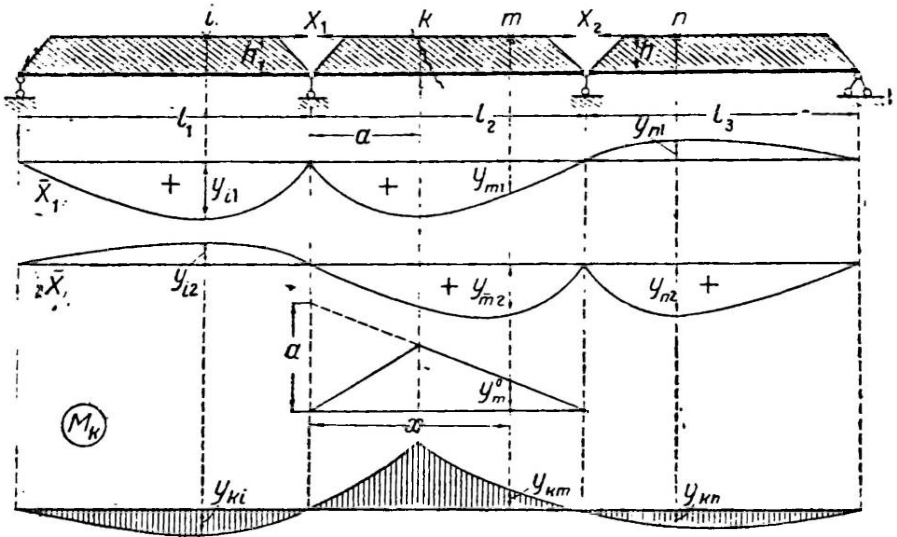
$$y_{ki} = \bar{M}_{k1} y_{i1} - \bar{M}_{k2} y_{i2} = -\frac{l_2 - a}{l_2} h y_{i1} + \frac{ah}{l_2} y_{i2};$$

б) в среднем пролете

$$y_{km} = y_m^0 + \bar{M}_{k1} y_{m1} + \bar{M}_{k2} y_{m2} = \frac{a(l_2 - x)}{l_2} - \frac{(l_2 - a)}{l_2} h y_{m1} - \frac{ah}{l_2} y_{m2};$$

с) в правом пролете

$$y_{kn} = -\bar{M}_{k1} y_{n1} + \bar{M}_{k2} y_{n2} = +\frac{l_2 - a}{l_2} h y_{n1} - \frac{ah}{l_2} y_{n2}.$$



Черт. 84.

В этих выражениях ординаты y_i , y_m , y_n взяты с учетом знака в линиях влияния лишних неизвестных.

Изложенный прием построения линий влияния применим для систем всякого вида (балок, арок, ферм и т. д.) с любым числом неизвестных; в нем изменяется только в соответствии с видом системы характер вычисления величины \bar{S}^0 , \bar{S}_1 , \bar{S}_2 и т. д.

При построении линий влияния в системах с одним неизвестным можно достигнуть некоторого упрощения. Для них формула (40) приводится к виду:

$$\bar{S} = \bar{S}^0 + \bar{S}_1 X_1$$

и может быть преобразована таким образом:

$$\bar{S} = \bar{S}_1 \left(\frac{\bar{S}_0}{\bar{S}_1} + X_1 \right).$$

Отсюда

$$y_k = \bar{S}_{k1} \left(\frac{y_k^0}{\bar{S}_{k1}} + y_1 \right). \quad (41)$$

Такое преобразование дает то преимущество, что ординаты y_{k1} криволинейной линии влияния не изменяются, а изменяются ординаты y_k^0 , прямолинейной

линии влияния, что в графическом построении делается очень просто. Но при таком построении искомая линия влияния строится в масштабе линии влияния неизвестного X_1 . Поэтому, если линия влияния неизвестного дана, например, в масштабе $\frac{1}{\delta_{11}}$, то ординаты искомой линии влияния должны измеряться в масштабе $\bar{S}_{k1} : \delta_{11}$, получаемом из условия:

$$v_k = \left(y_k^0 + \bar{S}_{k1} \frac{y_1}{\delta_{11}} \right) = \frac{\bar{S}_{k1}}{\delta_{11}} \left(y_k^0 \frac{\delta_{11}}{\bar{S}_{k1}} + y_1 \right).$$

Пусть например требуется построить линию влияния поперечной силы в сечении балки, показанной на черт. 85, для которой уже построена линия влияния опорного момента, показанная на черт. 78.

При положении груза $P=1$ справа от сечения уравнение, определяющее линию влияния поперечной силы в отмеченном сечении, напишется так:

$$Q = Q^0 + \bar{Q}_1 X_1,$$

$$y_a = \frac{l-x}{l} - \frac{1}{l} y_1,$$

или

$$y_a = \frac{1}{l} [(l-x) - y_1].$$

Первый член в этом уравнении представляет собой прямую, у которой ордината на левой опоре (при $x=0$) равна $+l$.

Этой прямой $a'b$ и параллельной ей левой прямой $a'b'$ определяется контур линии влияния поперечной силы Q^0 ; ординаты ее увеличены в l раз и отложены в масштабе линии влияния неизвестного.

Пример 8. Построить линию влияния момента в сечении трехпролетной балки, показанной на черт. 86, для которой известны линии влияния опорных реакций X_1 и X_2 (черт. 80).

Величина момента в любом сечении этой балки определяется уравнением:

$$M = M^0 + \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2,$$

а ординаты линии влияния его — уравнением:

$$y = y^0 + \bar{M}_1 y_1 + \bar{M}_2 y_2.$$

При положении груза, равного единице, справа от сечения ординаты линии влияния определяются уравнением:

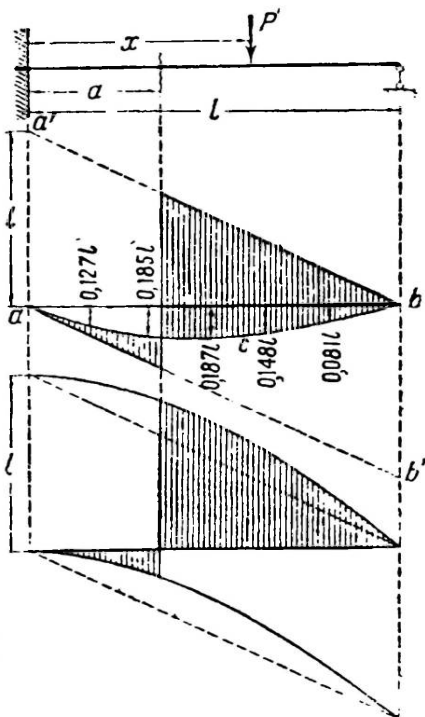
$$y = \frac{(4l-x)}{4l} a - \left[\frac{2,4}{4} a - (a - 1,6l) \right] y_1 - \frac{1,4}{4} a y_2.$$

По чертежу $a = 2l$, поэтому

$$y = \frac{1}{2} (4l-x) - 0,8 l y_1 - 0,7 l y_2.$$

При положении груза слева от сечения ординаты линии влияния определяются уравнением:

$$y = \frac{1}{2} x - 0,8 l y_1 - 0,7 l y_2.$$



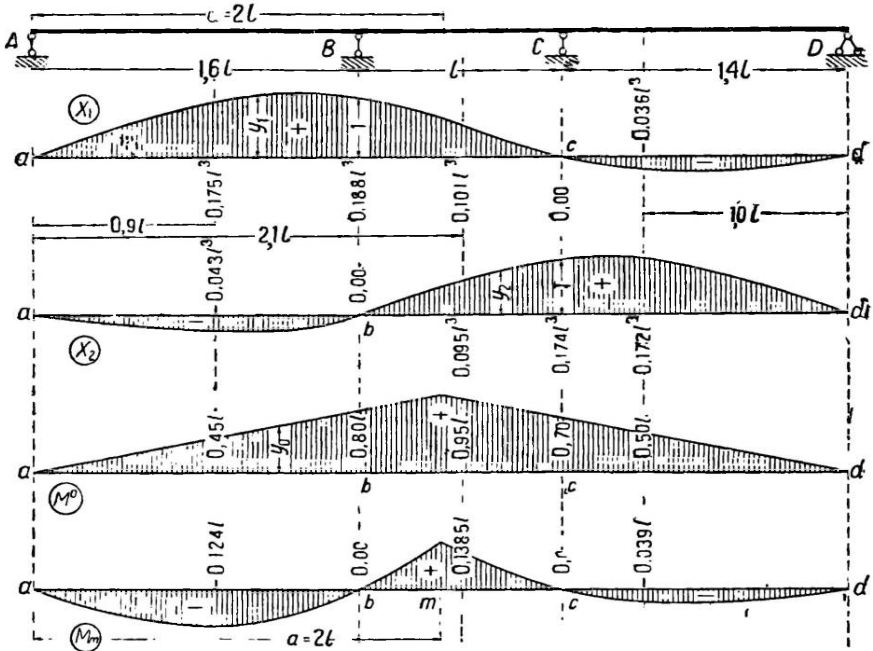
Черт. 85.

В частности:

$$\text{при } x = 0,9l \quad y = 0,45l - 0,8l \frac{0,175}{0,188} + 0,7l \frac{0,043}{0,174} = -0,124l,$$

$$\text{при } x = 2,1l \quad y = 0,95l - 0,8l \frac{0,101}{0,188} - 0,7l \frac{0,095}{0,174} = +0,139l,$$

$$\text{при } x = 3,0l \quad y = 0,5l + 0,8l \frac{0,036}{0,188} - 0,7l \frac{0,172}{0,174} = -0,039l \text{ и т. д.}$$



Черт. 86.

На черт. 86 по полученным данным построена линия влияния момента в указанном сечении. Контролем правильности вычисления служат точки на опорах B и C, где ординаты линий влияния равны нулю.

§ 17. МОДЕЛИ ЛИНИЙ ВЛИЯНИЯ

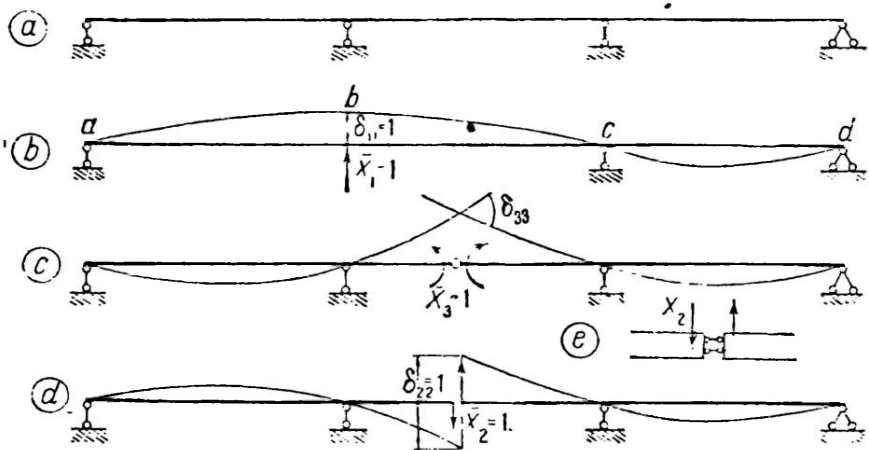
Линии влияния усилий и моментов в статически неопределимых системах представляют собой измененные в масштабе эпюры прогибов, возникающих под действием силы или момента, равного единице, прикладываемого по направлению изучаемого неизвестного; они подобны эпюрам прогибов. Это подобие позволяет, не составляя уравнения линий влияния, делать эскизные наброски контура линий влияния, каким он должен быть в условиях действия на заданную систему силы или момента, равного единице, приложенного по направлению связи, устраненной из системы. По существу это есть кинематический метод построения линий влияния (ч. I, § 8 и 37).

Пусть, например, требуется построить линию влияния реакции в трехпролетной балке (черт. 87,а). Отняв опору и приложив вместо нее силу, равную единице, получим контур упругой кривой $abcd$ (черт. 87,б), которая в масштабе δ_{11} прогиба у места отброшенной опоры представляет собой линию влияния неизвестного X_1 .

Линия влияния момента в сечении среднего пролета той же балки получится, если в это сечение включить шарнир и приложить два равных и про-

твояположных момента $\bar{X}_3 = 1$ (черт. 87, c). Введением шарнира уничтожается одна внутренняя связь. Масштаб линии влияния определяется углом δ_{33} взаимного наклона касательных, равным углу расхождения нормалей к оси балки около введенного шарнира.

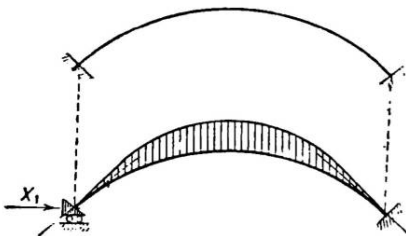
На черт. 87, d показан контур линии влияния поперечной силы в том же сечении балки. В этом сечении устранена связь, препятствующая сдвигу сечения (черт. 87, e).



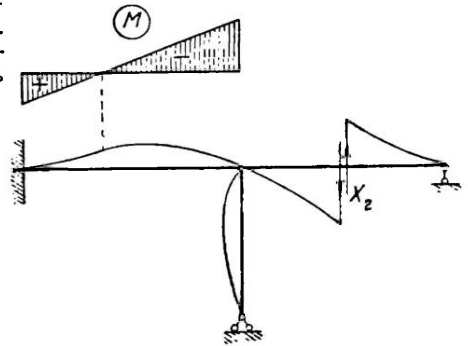
Черт. 87.

На черт. 88 показан контур линии влияния распора бесшарнирной арки. Он получается, как контур эпюры перемещений под действием сил распора на опоры, лишенные связи против скольжения, но закрепленные против поворота и перемещения по вертикали. Направление касательных к оси арки у мест заделки на опорах остается неизменным.

Такого рода контуры линий влияния могут быть получены и для более сложных систем, для чего надо уметь представить себе деформацию системы, возможную при действии на нее соответствующего единичного воздействия. Основы построения деформаций в сложных рамах даны в § 46. Укажем здесь



Черт. 88.



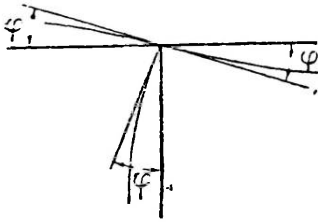
Черт. 89.

только основные положения, которые должны быть соблюдены при эскизном построении.

При отсутствии груза на балке или стержне изменение кривизны упругой кривой может иметь место только в одной точке по длине стержня. Это непосредственно следует из того, что на длине ненагруженного стержня эпюра моментов представляет прямую и следовательно может иметь только одно изменение знака (черт. 89).

Углы, образуемые пересечениями стержней, остаются без изменения в условиях деформации (черт. 90); этим устанавливается направление касательных в упругой кривой в каждом из стержней.

В заключение надо отметить, что умение делать эскизное построение контура эпюры прогибов позволяет судить о правильности вычислений, сделанных при аналитическом построении линий влияния. Оба контура, полученные вычислением и эскизным построением, должны быть подобны между собой.



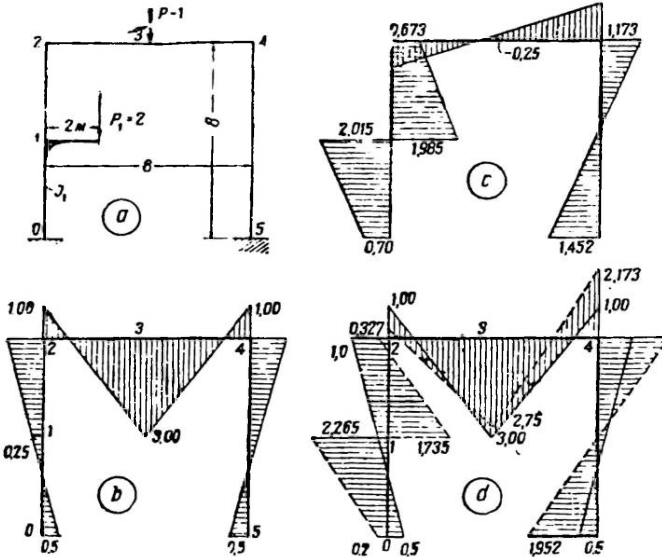
Черт. 90.

§ 18. ОБЪЕМЛЮЩАЯ ЭПЮРА

Временная нагрузка, вводимая по заданию в расчеты рам и балок, может вызывать в сечениях моменты и усилия разных знаков. Такая возможность вполне подтверждается двухзначностью линий влияния (черт. 87) и разными знаками в эпюрах, построенных отдельно для постоянной нагрузки и для каждого случая временной нагрузки (черт. 91, *b* и *c*).

Суммируя моменты и усилия разных знаков, полученные от действия временной нагрузки, с таковыми же от постоянной нагрузки, можно получить в одном и том же сечении рамы или балки окончательные моменты и усилия разных знаков, что должно учитываться при подборе поперечных сечений стержней рамы или балки.

Чтобы иметь наглядную картину распространения положительных и отрицательных моментов и усилий по длине стержней рамы или пролетов балки



Черт. 91.

строят так называемую объемлющую эпюру. Объемлющая эпюра имеет две ординаты в каждой точке оси стержня или балки. Каждая из них представляет собой результат сложения момента или усилия в рассматриваемом сечении от действия постоянной нагрузки с моментом или усилием одного знака в том же сечении, вызываемым действием временной нагрузки при невыгоднейшем расположении ее, а также действием других внешних факторов (температуры и пр.). Вершины наибольших и наименьших ординат соединяются раздельно прямыми; этими прямыми очерчивается контур объемлющей эпюры.

Для пояснения сказанного рассмотрим построение объемлющей эпюры моментов для случая рамы, показанной на черт. 91,а и находящейся под действием постоянной нагрузки в виде сосредоточенного груза $P=1\text{ т}$, приложенного по середине ригеля, и временного груза $P_1=2\text{ т}$, представляющего собой давление крана. На черт. 91,б и с показаны эпюры моментов, вызываемые действием указанных нагрузок в сечениях рамы.

На черт. 91,д построена объемлющая эпюра моментов; ее ординаты получены суммированием ординат эпюр, показанных на черт. 91, б и с, в их характерных точках. Например в сечении у точки O может иметь место момент $+0,5$ от постоянной нагрузки и момент $+0,5 - 0,7 = -0,2$ от действия постоянной и временной нагрузок. В сечении под точкой I могут иметь место два момента: $-0,25$ от одной постоянной нагрузки и $-(0,25 + 2,015) = -2,265$ от совместного действия постоянной и временной нагрузок. В сечении выше точки I могут иметь место два момента: $-0,25$ от одной постоянной нагрузки и $-0,25 + 1,965 = +1,735$ от постоянной и временной нагрузок.

В указанном порядке получают наибольшая и наименьшая величины моментов во всех характерных точках. Эти величины отложены на черт. 91,а в виде ординат. На этом чертеже пунктирной линией очерчен контур эпюры моментов, полученной от сложения постоянной и временной нагрузок; сплошной линией очерчен контур эпюры моментов от одной постоянной нагрузки. Площадь объемлющей эпюры заштрихована.

Контур объемлющей эпюры устанавливает участки, на которых моменты в сечениях двухзначны и однозначны, а также и устанавливает места наибольших положительных и отрицательных моментов.

Построение объемлющей эпюры значительно осложняется, когда наибольшему и наименьшему значению моментов в каждом сечении соответствует свое наименее выгодное расположение временной нагрузки. В этих случаях приходится использовать линии влияния и вычисление ординат объемлющей эпюры делать для нескольких сечений по длине каждого пролета балки или стержня рамы.

Задачи и упражнения

29. Построить линию влияния опорной реакции в двухпролетной балке (черт. 92) и доказать, что проведенная в ней линия $a'b$ служит основанием для построения линий влияния моментов и поперечных сил во всех сечениях левого пролета. Сечение балки постоянное.

Указание. При поставленных условиях целесообразно в качестве неизвестного принять реакцию средней опоры. Для определения ординат линии влияния этой опорной реакции удобно воспользоваться уравнением ординат упругой кривой. Для ответа на вторую часть задачи надо использовать указания, данные в соответствии с формулой (41).

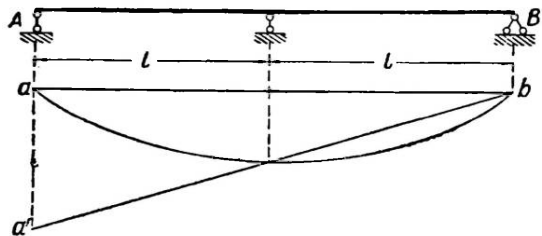
30. Построить линии влияния момента и нормальной силы в сечениях двухшарнирной параболической арки с постоянным сечением (черт. 93). Сечения взять на одной четверти и в половине пролета.

Указание. В рассматриваемом случае целесообразно основную систему взять в виде двухопорной балки.

Уравнение оси арки:

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l-x).$$

При построении линии влияния распора в целях упрощения вычислений следует при определении величин δ_{p1} и δ_{22} учитывать пологость арки ($f = \frac{1}{5}l$), т. е. принять $\sin \varphi = 0$, $\cos \varphi = 1$, $ds = dx$ (допустив этим приближенный расчет).



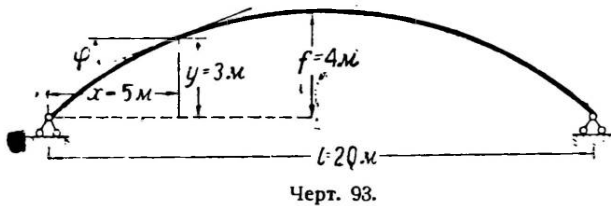
Черт. 92.

Система криволинейна, поэтому вычисление числителя и знаменателя надо провести аналитически, путем вычисления интегралов. Для получения числителя следует использовать результаты задачи 114 в части I настоящего курса:

$$\Delta_{1p} = -\frac{Pf}{3EJ} a(t-a)(t^2 + la - a^2).$$

Здесь a — переменная абсцисса точки приложения груза. При вычислении числителя и знаменателя принять:

$$\frac{J}{F} = \frac{I^2}{4800}, \text{ при } l = 20 \text{ м и } \frac{J}{F} = 0,083 \text{ м}^2.$$



При построении линий влияния M и N следует в целях сокращения вычислений сохранить линию влияния распора в виде эпюры прогибов и преобразовать выражения M и N [формула (41)]:

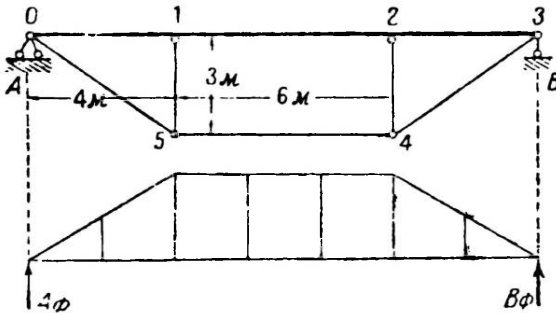
$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= 0,4; \quad \sin \varphi = 0,37 \\ \cos \varphi &= 0,928. \end{aligned}$$

31. Построить линии влияния момента и поперечных сил в шпренгельной балке (черт 94). Отношение $\frac{J}{F} = 300 \text{ см}^2$.

Указание. Из сопоставления эпюр моментов от действия груза $P = 1$ и воздействия $\bar{X}_1 = 1$ можно видеть что аналитическое вычисление ординат эпюры $\bar{v}_{\text{пл}}$ будет достаточно громоздко, поэтому для данного случая целесообразно использовать прием вычисления по упругим грузам. Величины упругих грузов легко определяются по эпюре моментов, по ней же устанавливаются их точки приложения как центры тяжести. Вычисление ординат эпюры прогибов провести аналитически, как статических моментов [ч. I, форм. (188)]:

$$f_k = Q_{\phi} a_k - \sum_1^{k-1} W(a_k - a).$$

Для вычисления знаменателя в выражении неизвестного следует воспользоваться результатом решения задачи 15; можно пренебречь влиянием продольного усилия в балочной части.



32. На черт. 95 даны линии влияния лишних неизвестных в арке с заделанными пятнами; построение их сделано в предположении переноса неизвестных в центр упругих фиктивных грузов арки. Требуется:

1) показать, соответствуют ли контуры линий влияния эпюрам прогибов, которые вызываются действием неизвестных;

2) показать на линиях влияния X_2 и X_3 единицы измерения для перехода от эпюр прогибов к линиям влияния;

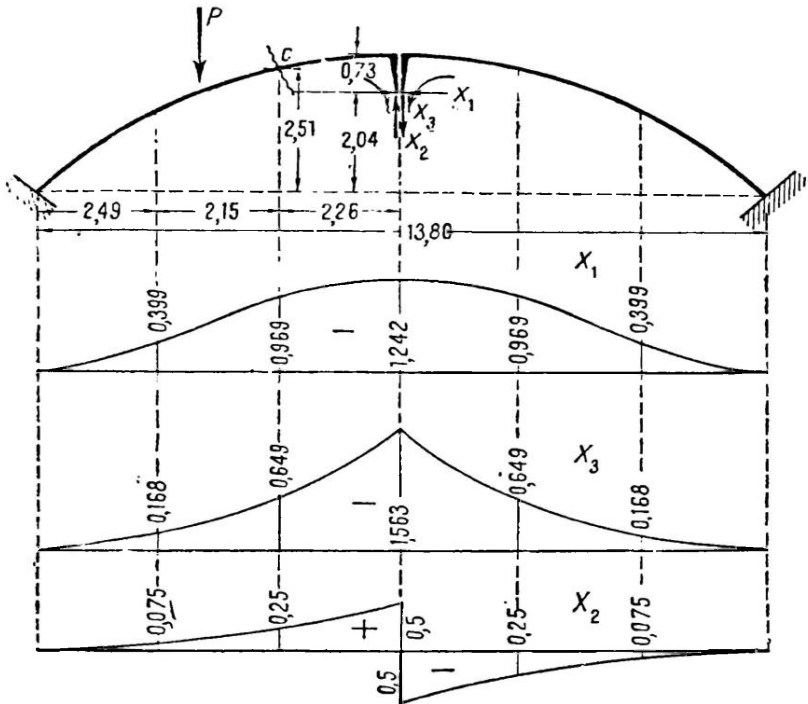
3) построить линию влияния момента в сечении C , отмеченном на черт. 95.

Указание. Для ответа на первый вопрос надо руководствоваться § 17. Ответ на второй вопрос следует из понимания, что представляют собой величины \bar{v}_{22} и \bar{v}_{33} (черт. 87). Построение линии влияния надо сделать путем вычисления ее ординат по ординатам линий влияния, данным на черт. 95, пользуясь формулой (40).

33. Определить величину наибольшей растягивающей продольной силы, возникающей в ригеле средней части пугепровода (черт. 96) при невыгоднейшем расположении на нем временной сплошной равномерно распределенной нагрузки. Сечения во всех стержнях одинаковые.

Указание. Канонические уравнения должны быть приведены к виду уравнений, содержащих по одному неизвестному каждое. Невыгоднейшее положение нагрузки надо установить по виду контура линии влияния, не выводя уравнения линии влияния.

34. Построить линию влияния поперечной силы в среднем сечении путепровода, показанного на черт. 96, используя для вычисления ординат линии влияния табл. 2.



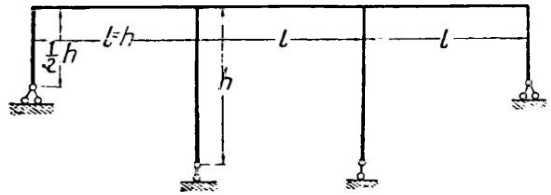
Черт. 95.

Указание. Уравнение упругой кривой в крайнем пролете [формула (35)]:

$$EJy = \frac{1}{12} h^3 u (1 - u^2).$$

Уравнение упругой кривой в пределах консоли должно быть выведено. Оно приводится к такому виду:

$$EJy = -\frac{h^3}{8} (1 - u) + \frac{h^3}{6} u (1 - u^2).$$



Черт. 96.

АРКИ СПЛОШНЫЕ И СВОДЫ

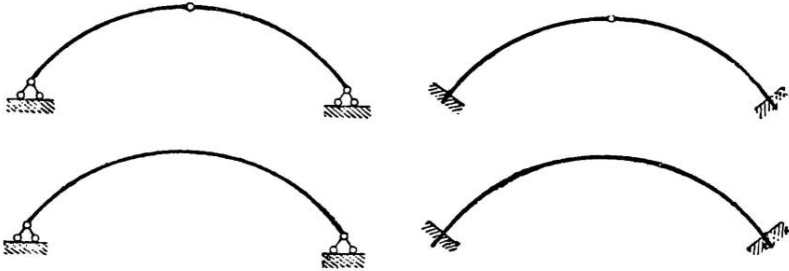
§ 19. ХАРАКТЕРИСТИКА АРОК. ОЧЕРТАНИЕ ОСИ

Арки различаются по числу шарниров в них: трехшарнирные, двухшарнирные, одношарнирные и бесшарнирные (черт. 97). Все виды арок статически неопределимы за исключением трехшарнирных, рассмотренных в первой части настоящего курса. Наличие промежуточного шарнира создает излом в упругой линии прогиба арки под нагрузкой, поэтому в мостовых сооружениях с тяжелой нагрузкой, как правило, применяются арки двухшарнирные и бесшарнирные. Арки одношарнирные, как не имеющие никаких преимуществ, нигде не применяются. Преимущество двухшарнирных арок перед бесшарнирными составляет наличие пятых шарниров, фиксирующих положение опорных реакций, что создает опре-

деленность в расчете опор. Но эти же шарниры создают неравномерность в распределении изгибающих моментов по длине арки, нарастающих к середине арки; в этом отношении преимущество остается за бесшарнирными арками.

Своды отличаются от арок тем, что имеют большие размеры в направлении, перпендикулярном к плоскости оси (черт. 98).

Расчет сводов проводится путем выделения из него двумя плоскостями AA и BB части длиной, равной единице. Так как вся нагрузка, распределенная по своду, обычно параллельна плоскости чертежа и может быть отнесена к погонной единице длины свода, то можно рассматривать выделенную часть свода как плоскую арку шириной, равной единице.

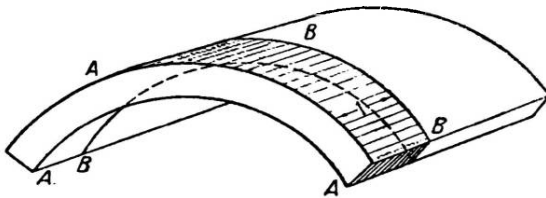


Черт. 97.

В последующем, говоря о расчетах арок, мы будем подразумевать, что этот расчет распространяется и на своды.

Арки представляют собой брус с кривой осью, но в арках, применяемых в сооружениях, высота h их сечения обычно не велика по сравнению с радиусом кривизны ρ ; обычно $\frac{\rho}{h} > 5$. При таком отношении, как известно (ч. I, § 84), можно не учитывать смещения нейтральной оси с центра тяжести сечения и определять перемещения по формуле вида:

$$\Delta_{km} = \int \frac{\bar{M}_m \bar{M}_k}{EJ} ds + \int \frac{\bar{M}_m \bar{N}_k}{EF\rho} ds + \int \frac{\bar{N}_m \bar{M}_k}{EF\rho} ds + \int \frac{\bar{N}_m \bar{N}_k}{EF} ds + k \int \frac{\bar{Q}_m \bar{Q}_k}{GF} ds. \quad (42)$$



Черт. 98.

В последующем изложении мы остановимся особо на рассмотрении влияния каждого из этих интегралов на величину лишних неизвестных в арках.

1. Ось арки. При проектировании арки всегда возникает вопрос о форме ее оси и выборе рациональной оси. Понятие о рациональной оси трехшарнирной арки было дано

нами в части I настоящего курса (§ 64). Эти понятия остаются в силе для арки любого вида, поэтому рациональная ось двухшарнирных и бесшарнирных арок также должна очерчиваться по кривой давления от заданной нагрузки. Однако вследствие отсутствия промежуточного шарнира в двухшарнирных и бесшарнирных арках невозможно точно определить распор в них, не зная деформации; поэтому вопрос о значении рациональной оси арок этих видов, даже в условиях постоянной нагрузки, решается всегда приближенно; в них всегда имеет место отклонение кривой давления от оси, создающее моменты в сечениях арки¹.

В современных проектировках пологих арок обычно задаются формой оси по кривым Легея или Штрасснера, выведенным ими для трехшарнирных арок

¹ Вопросу о рациональной оси арки при различных условиях загрузки посвящена большая литература, разбор ее выходит за пределы настоящего курса.

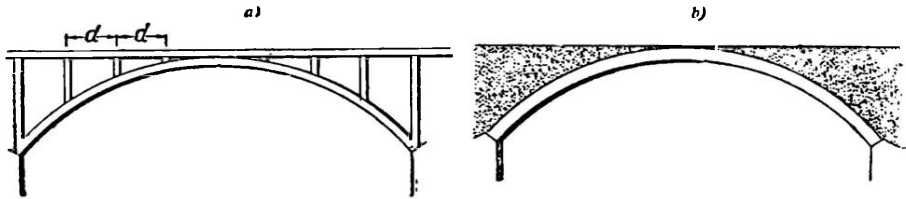
(ч. I, § 64), или вычерчивают ось арки по параболе и затем, выправив ее по полуциркулю из расчета кривой давления, делают новый расчет.

Кривая Легея выведена в предположении сплошного нагружения арки; в действительности нередко приходится иметь дело с арками, воспринимающими нагрузку через колонны (черт. 99, а). Ось таких арок, обычно пологих, также назначается по кривой Легея, которая вычерчивается по „приведенной“ сплошной нагрузке; последняя получается путем отнесения величины давления, передаваемого колонной, на единицу длины расстояния d между колоннами.

Наличие подвижной нагрузки на арке создает еще более сложные условия для назначения формы ее оси. В этих условиях остаются в силе соображения, указанные нами при рассмотрении вопроса о рациональной оси трехшарнирной арки. Если величина погонной подвижной нагрузки велика по сравнению с постоянной, то ось арки следует назначить так, чтобы при нагружении одной половины арки подвижной нагрузкой вызываемая ею кривая давлений имела в обеих половинах одинаковое отклонение от оси арки.

2. Нагрузка и передача ее на арку. Мы останавливаемся на этом вопросе особо, так как часто встречается, что на бесшарнирные своды нагрузка передается не через стойки и подвески, как это обычно имеет место в арочных системах, а через земляную засыпку или через забутку (черт. 99, б). Засыпка арок землей создает вертикальное и горизонтальное давление на них.

Первое определяется весом засыпки и представляет собой неравномерную сплошную нагрузку, величина которой изменяется в зависимости от контура свода. В расчетах при-



Черт. 99.

ходится или учитывать эту нагрузку приближенно, расчленяя ее на отдельные части, или задаваться каким-либо законом изменения ее по длине свода, позволяющим провести аналитический расчет арки (§ 24).

Что касается горизонтального давления от засыпки, то оно учитывается как разность двух давлений сыпучего тела, по плоскостям, ограничивающим выделенную часть свода (черт. 100), т. е. определяется по формуле:

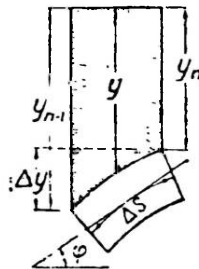
$$E = \frac{1}{2} \gamma [y_{n-1}^2 - y_n^2] \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right).$$

Эта формула может быть преобразована в приближенную

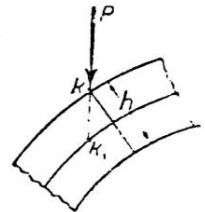
$$E = \gamma \Delta y \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right).$$

В пологих сводах величина $\Delta y = \Delta s \sin \varphi$ становится незначительной; поэтому в сводах со стрелой $f < \frac{1}{5} l$ можно этого давления не учитывать.

Все нагрузки передаются на внешнюю поверхность арки; в расчетах же приходится относить их к оси арки (черт. 101). Это создает некоторую погрешность в расчете арки. Влияние этой погрешности будет тем меньше, чем меньше величина переноса, зависящая от толщины арки и чем меньше отстояние толщины h арки к ее пролету. В тонких арках с отношением $\frac{h}{l} < \frac{1}{10}$ перенос нагрузки по вертикали на ось арки создает погрешность в величине распора меньшую 1% его величины, что вполне допустимо.



Черт. 100.



Черт. 101.

БЕСШАРНИРНЫЕ АРКИ И СВОДЫ

§ 20. ИЗМЕНЕНИЕ СЕЧЕНИЯ АРОК ПО ИХ ДЛИНЕ

Бесшарнирные арки и своды часто применяются при устройстве мостовых перекрытий, предназначенных поддерживать земляную засыпку или так называемую забутку, и еще чаще применяются в трубах под землей, в туннелях и тому подобных сооружениях. В указанных видах сооружений бесшарнирные арки встречаются весьма разнообразных подъемов от $f:l=1:1$ в трубах и туннелях, до $f:l=1:12$ в мостовых перекрытиях.

В последнее время бесшарнирные арки чаще проектируются из железобетона, особенно в перекрытиях больших пролетов, но раньше они делались обычно из камня, бетона и т. д., т. е. из материалов слабо воспринимающих растягивающие усилия, что заставляло придавать сечениям арок такие размеры, при которых кривая давлений проходила бы внутри ядра сечений.

Бесшарнирная арка подобно балке с заделанными концами имеет нарастание моментов к пятам; в связи с этим является необходимость увеличения толщины арок к пятам.

Площадь F поперечного сечения арки и момент инерции ее J входят в подынтегральные величины формул (42), применяемых для расчета арок, поэтому вполне понятно стремление ввести известную закономерность в изменение этих величин по длине арки. Из целого ряда предложений по этому вопросу можно рекомендовать пользоваться формулой Риттера¹:

$$\frac{J_c}{J \cos \varphi} = 1 - (1 - n) \frac{x}{l_1}. \quad (43)$$

В ней: J_c — момент инерции сечения в ключе арки, равный $\frac{h_c^3}{12}$;

J — момент инерции сечения арки, расположенного на расстоянии x от ключевого и наклоненного под углом φ к вертикали; $n = \frac{J_c}{J_0 \cos \varphi_0}$, где J_0 и φ_0 относятся к пятовому сечению арки; l_1 — длина полупролета. Ширина арки предполагается постоянной по ее длине.

Преимущество этой формулы заключается в том, что она устанавливает связь между пятовым и ключевым сечениями арки при любой стреле подъема и дает возможность варьировать закон нарастания сечения, благодаря чему ею охватываются другие предложения, делавшиеся по этому вопросу.

При $n = 1$ получаем закон изменения сечения:

$$J = \frac{J_c}{\cos \varphi}, \quad (44)$$

часто применяющийся в расчетах.

При уменьшении величины n толщина арки нарастает, и закон изменения сечения приближается к условию:

$$F = \frac{F_c}{\cos \varphi} \quad \text{и} \quad J = \frac{J_c}{\cos^3 \varphi}.$$

Например в условиях параболической арки со стрелой $f = \frac{1}{4} l$ и наклоном пятового сечения под углом $\varphi_0 = 45^\circ$ толщине сечения в пятах будет:

$$\text{при } n = 1 \quad h_0 = 1,13 h_c,$$

$$\text{при } n = \frac{1}{2} \quad h_0 = 1,41 h_c,$$

$$\text{при } n = \frac{1}{4} \quad h_0 = 1,78 h_c.$$

¹ В формуле Риттера отношение $\left(\frac{x}{l_1}\right)^k$; но величина показателя, изменяемая в пределах от 1 до 2, мало влияет на изменение толщины арки, поэтому можно принимать $k = 1$.

Толщина в пяте той же арки, получаемая по условию

$$F = \frac{F_c}{\cos \varphi_0}, \text{ будет } h_0 = 1,41 h_c.$$

Сказанного достаточно, чтобы судить о преимуществах формулы (43).

Отметим, что наличие в ее знаменателе величины $\cos \varphi_0$ приводит к тому, что с приближением угла φ_0 к 90° толщина начинает быстро расти.

При $h_c = 1$ и угле $\varphi_0 = 82^\circ$, $h_0 = 2 h_c$. Увеличение толщины арки более чем вдвое против толщины в ключе является обычно излишним, поэтому в сильно подъемистых арках обычно ограничиваются доведением толщины до $2 h_c$, а далее или оставляют без изменения или изменяют по соображению.

Принятие формулы (44) как закона изменения момента инерции и высоты сечения создает затруднения в вычислении интегралов формулы (42), так как входящая в знаменатель площадь в условиях прямоугольного поперечного сечения одинаковой ширины должна изменяться по закону:

$$F = \sqrt[3]{\frac{F_c}{\cos \varphi}}.$$

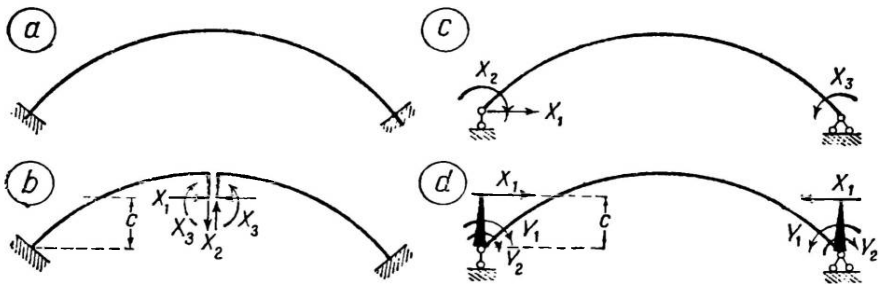
Однако сравнительные подсчеты показывают, что замена в подинтегральных выражениях величины $F = \frac{F_c}{\sqrt{\cos \varphi}}$ величиной $F = \frac{F_c}{\cos \varphi}$ и даже $F = F_c$ создает ошибку в величине распора и моментов, не превышающую 10% их действительной величины.

В пологих арках со стрелой $f < \frac{1}{8} l$ можно принимать $\cos \varphi = 1$ и $ds = dx$.

§ 21. ОСНОВНАЯ СИСТЕМА

Бесшарнирные арки трижды статически неопределимы и представляют собой замкнутый контур; это позволяет при их расчете приводить канонические уравнения к уравнениям с одним неизвестным в каждом.

Основная система для расчета бесшарнирной арки произвольного вида (черт. 102, а) может быть выбрана в виде бруса, заделанного одним концом,



Черт. 102.

с отнесением неизвестных в центр упругих фиктивных сил. В симметричных арках целесообразно основную систему выбирать в виде двух брусьев, заделанных концами, с разрезом арки посередине; в этом случае центр упругих фиктивных сил лежит на оси симметрии и для определения его нужно вычислить только координату c (черт. 102, б). В расчетах симметричных арок выбирают также в качестве основной системы балку, лежащую на двух опорах (черт. 102, с), вводя в нее в качестве неизвестных распор X_1 и два опорных момента X_2 и X_3 . В этом случае приведение канонических уравнений к уравнениям с одним неизвестным каждое обеспечивается разложением опорных моментов на парные Y_1 и Y_2 (черт. 102, d) и переносом распора на уровень центра фиктивных упругих сил.

Координата c центра фиктивных упругих сил определяется по формуле (22):

$$c = -\frac{\delta_{13}}{\delta_{33}} = -\frac{\int_s \bar{M}_1 \bar{M}_3 \frac{ds}{J} + \int_s \bar{N}_1 \bar{M}_3 \frac{ds}{F_p}}{\int_s \bar{M}_3^2 \frac{ds}{J}}$$

Второй член в числителе представляет собой учет продольной силы \bar{N}_1 от действия лишнего неизвестного $\bar{X}_1 = 1$ (распора арки), вызывающего обжатие оси арки. После подстановки значений \bar{M} и \bar{N} получим:

$$c = -\frac{\int_s \frac{y}{J} ds + \int_s \frac{\cos \varphi}{F_p} ds}{\int_s \frac{ds}{J}} \quad (45)$$

Сравнительные подсчеты, производившиеся для арок с круговой и параболической осью, показали, что только в пологих арках с большой толщиной в ключе учет влияния сжатия оси изменяет величину координаты c на $+5\%$ по сравнению с ее величиной, определяемой с учетом только первого члена знаменателя по формуле:

$$c = -\frac{\int_s \frac{y ds}{J}}{\int_s \frac{ds}{J}} \quad (46)$$

Таблица 3

Результаты определения координаты c центра фиктивных упругих сил по формулам (45) и (46)

| $f:l$ | По приближенной формуле (46) | По точной формуле (45) | |
|----------------|------------------------------|--|--|
| | | при $\frac{h}{\rho} = \frac{1}{10}$ в % | при $\frac{h}{\rho} = \frac{1}{20}$ в % |
| $\frac{1}{12}$ | 0,3287 | +5 | +1,25 |
| $\frac{1}{8}$ | 0,3358 | +2,2 | +0,55 |
| $\frac{1}{4}$ | 0,3435 | +0,5 | +0,1 |
| $\frac{1}{2}$ | 0,3634 | +0,1 | +0 |

В табл. 3 сопоставлены величины координаты c , получаемые по точной формуле (45) и приближенной (46) в предположении одинаковой кривизны $\frac{1}{\rho}$ и разных отношений $f:l$; высота h арки одинакова по всей длине и определяется отношением $h:\rho$.

Это позволяет вообще отказаться от учета второго члена в числителе формулы (45) и проводить вычисление координаты c по упрощенной формуле (46).

Большее влияние на положение искомого центра оказывает изменение высоты или момента инерции сечения по длине арки.

Для характеристики влияния изменения момента инерции арки на положение центра фиктивных упругих сил рассмотрим параболическую арку; уравнение сси ее (черт. 103):

$$y = \frac{4f}{l^2} x^2 = \frac{f}{l^2} x^2;$$

моменты инерции сечений изменяются по закону (43):

$$\frac{J_c}{J \cos \varphi} = 1 - (1-n) \frac{x}{l}$$

При этих данных отношение $\frac{ds}{J}$, входящее под интегралы в формуле (46), приводится к виду:

$$\frac{ds}{J} = \frac{1}{J_c} \left[1 - (1-n) \frac{x}{l} \right] ds \cos \varphi = \frac{1}{J_c} \left[1 - (1-n) \frac{x}{l} \right] dx \quad (47)$$

Соответственно этому интегралы, входящие в формулу (46), имеют значения:

$$\int_s y \frac{ds}{J} = \int_0^{l_1} \frac{f}{J_c} \frac{x^2}{l_1^2} \left[1 - (1-n) \frac{x}{l_1} \right] dx = \frac{1+3n}{12} \cdot \frac{f l_1}{J_c},$$

$$\int_s \frac{ds}{J} = \frac{1}{J_c} \int_0^{l_1} \left[1 - (1-n) \frac{x}{l_1} \right] dx = \frac{1+n}{2} \cdot \frac{l_1}{J_c}.$$

Отсюда

$$c = -\frac{1}{6} \frac{(1+3n)}{(1+n)} f. \quad (48)$$

Давая n ряд значений, получим:

при

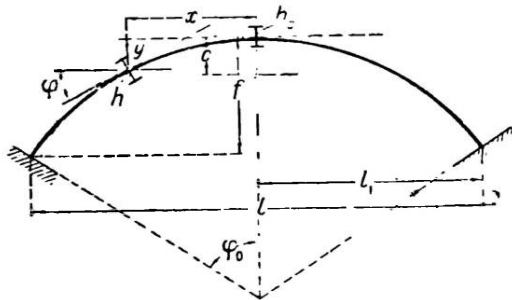
$$n = 1 \quad c = -\frac{30}{90} f = -0,333 f,$$

при

$$n = \frac{1}{2} \quad c = -\frac{25}{90} f = -0,278 f,$$

при

$$n = \frac{1}{4} \quad c = -\frac{21}{90} f = -0,233 f.$$



Черт. 103.

Произведенный расчет показывает, что заметное опускание центра фиктивных упругих сил происходит в подъемистых арках, в которых увеличение угла φ_0 сопровождается большим нарастанием толщины и момента инерции пятового сечения.

Кроме указанных выше двух видов основных систем можно принять основную систему для расчета бешарнирной арки в виде трехшарнирной арки, но расчет при такой основной системе несколько сложнее, чем при разобранных выше.

Если арка не симметрична, то все соображения, изложенные выше, остаются в силе, но процесс расчета осложняется необходимостью или переходить к главным осям (§ 11), что позволяет привести к нулю побочное перемещение δ_{12}^1 , или решать уравнения с двумя неизвестными.

§ 22. ФОРМУЛЫ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НЕИЗВЕСТНЫХ И ВОЗМОЖНЫЕ УПРОЩЕНИЯ В НИХ

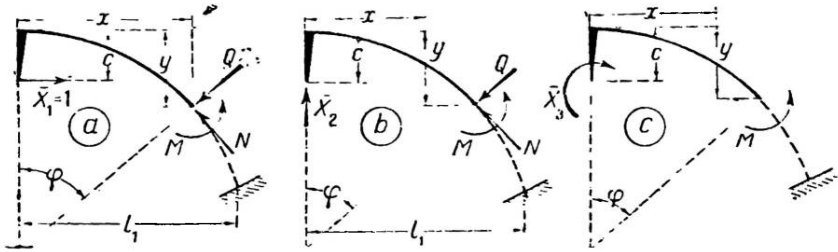
Примем в качестве основной системы для расчета бешарнирной арки брус, заделанный одним концом, и перенесем неизвестные в центр фиктивных упругих сил. После переноса неизвестных величины их определяют выражениями:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\delta}_{11}^1 &= \frac{\int M_p \frac{\bar{M}_1}{J} ds + \int M_p \frac{\bar{N}_1}{F_p} ds + \int N_p \frac{\bar{N}_1}{F} ds + \int N_p \frac{\bar{M}_1}{F_p} ds + k \frac{E}{G} \int Q_p \frac{\bar{Q}_1}{F} ds}{\int \frac{\bar{M}_1^2}{J} ds + 2 \int \bar{M}_1 \frac{\bar{N}_1}{F_p} ds + \int \frac{\bar{N}_1^2}{F} ds + k \frac{E}{G} \int \frac{\bar{Q}_1^2}{F} ds}; \\ \bar{\delta}_{22}^2 &= \frac{\int M_p \frac{\bar{M}_2}{J} ds + \int M_p \frac{\bar{N}_2}{F_p} ds + \int N_p \frac{\bar{N}_2}{F} ds + \int N_p \frac{\bar{M}_2}{F_p} ds + k \frac{E}{G} \int Q_p \frac{\bar{Q}_2}{F} ds}{\int \frac{\bar{M}_2^2}{J} ds + 2 \int \bar{M}_2 \frac{\bar{N}_2}{F_p} ds + \int \frac{\bar{N}_2^2}{F} ds + k \frac{E}{G} \int \frac{\bar{Q}_2^2}{F} ds}; \\ \bar{\delta}_{33}^3 &= \frac{\int M_p \frac{\bar{M}_3}{J} ds + \int N_p \frac{\bar{M}_3}{F_p} ds}{\int \frac{\bar{M}_3^2}{J} ds}. \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

1 Разбор расчета несимметричного свода был сделан в издании нашего курса в 1934 г.; см. также Митропольский Н. М., Графический расчет несимметричного свода. Труды МИИТ, вып. 3, 1927.

В эти формулы кроме обычного учета влияния нормальной и поперечной сил введен учет влияния кривизны, так как арка представляет собой кривой брус.

Точный расчет с учетом всех интегралов приводит к очень сложному вычислительному процессу. Между тем сравнительный подсчет, производившийся для параболических и круговых арок¹ при различных отношениях стрелы подъема к пролету ($f:l$) и при различных отношениях толщины в ключе к пролету ($h:l$), показали, что влияние одних интегралов, входящих в выражения (49), невелико по сравнению с влиянием других из них. Это позволяет поставить вопрос о целесообразности не учитывать этих интегралов.



Черт. 104.

Рассмотрим сначала интегралы, входящие в знаменатели неизвестных, они зависят только от размеров самой арки. Согласно черт. 104 получим²:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} E \delta_{11} &= \int_0^s (y-c)^2 \frac{ds}{J} + 2 \int_0^s (y-c) \cos \varphi \frac{ds}{Fp} + \int_0^s \cos^2 \varphi \frac{ds}{F} + k \frac{E}{G} \int_0^s \sin^2 \varphi \frac{ds}{F}; \\ \frac{1}{2} E \delta_{22} &= \int_0^s x^2 \frac{ds}{J} - 2 \int_0^s x \sin \varphi \frac{ds}{Fp} + \int_0^s \sin^2 \varphi \frac{ds}{F} + k \frac{E}{G} \int_0^s \cos^2 \varphi \frac{ds}{F}; \\ \frac{1}{2} E \delta_{33} &= \int_0^s \frac{ds}{J}. \end{aligned} \right\} (50)$$

В табл. 4 сопоставлены результаты вычислений, сделанных для арки с параболической осью и с толщиной, изменяющейся по закону $h_c = h \cos \varphi$, где h_c — толщина в ключе. Сопоставление выражено в процентах по отношению к влиянию момента, принятому за 100%.

Из табл. 4 видно, что влияние на общую величину знаменателя интегралов, зависящих от кривизны арки, очень невелико; оно больше в подъемистых и толстых арках, но и в этом случае учет его увеличивает величины δ_{11} и δ_{22} не более как на 3%. Это позволяет пренебрегать учетом влияния кривизны в арках.

Влияние поперечной силы Q не велико в тонких арках и становится заметным при $\frac{h}{l} > \frac{1}{20}$; оно нарастает в подъемистых арках, в которых оно больше, чем влияние интегралов, зависящих от продольной силы, поэтому нельзя пренебрегать учетом влияния поперечных сил при вычислении знаменателей в выражениях для неизвестных в расчетах арок подъемистых и толстых.

Учет продольной силы N оказывает большое влияние на величину δ_{11} в расчетах пологих арок, когда $f:l < \frac{1}{5}$. Это влияние нарастает с увеличением толщины арок в ключе и очень значительно при толщинах $h > \frac{l}{20}$. В подъемистых арках влияние продольной силы меньше, чем влияние поперечных. Поэтому при

¹ Прокофьев С. А., Теория расчета сплошных упругих арок, стр. 239—241 и др., Киев 1912.

² Тимошенко С. П., Расчет упругих арок, стр. 65, 85 и др., 1933.

³ Продольная сила в выводах и на чертежах принимается сжимающей; получение отрицательного знака будет означать, что она является растягивающей силой. Величиной S обозначена половина длины дуги арки.

Влияние величин $\frac{1}{\rho}$, Q и N на величину знаменателей δ_{11} и δ_{22} в выражениях для неизвестных в параболической бесшарнирной арке

| $\frac{f}{l}$ | $\frac{h_c}{l}$ | Знаменатель δ_{11} | | | Знаменатель δ_{22} | | |
|----------------|-----------------|---------------------------|-------|--------|---------------------------|--------|------|
| | | $\frac{1}{\rho}$ | Q | N | $\frac{1}{\rho}$ | Q | N |
| $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{8}$ | +0,1 | - 7,3 | -63,4 | +0,1 | - 4,9 | -0,1 |
| $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{30}$ | - | - 1,5 | -13,1 | - | - 0,36 | - |
| $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | +0,24 | -11,1 | -44,1 | +0,2 | - 5,1 | -0,1 |
| $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{30}$ | - | - 1,6 | - 6,4 | - | - 0,4 | - |
| $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | +0,8 | -15,9 | -18,4 | +0,7 | - 5,8 | -0,5 |
| $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{30}$ | +0,08 | - 1,6 | - 1,9 | +0,05 | - 0,4 | - |
| $\frac{1}{1}$ | $\frac{1}{8}$ | +2,2 | -17,6 | - 2,7 | +2,9 | -11,2 | -7,1 |
| $\frac{1}{1}$ | $\frac{1}{30}$ | +0,2 | - 1,5 | - 0,23 | +0,2 | - 0,9 | - |

вычисления знаменателей в выражениях для неизвестных можно пренебрегать учетом продольной силы в расчетах арок подъемистых и арок с небольшой толщиной.

На основании всего вышесказанного можно принять следующие комбинации интегралов для вычисления знаменателей в выражениях для неизвестных.

В арках с подъемом $f < \frac{1}{5}l$ и с толщиной в ключе $h_c > \frac{1}{10}l$, что встречается в очень редких случаях, следует считать:

$$\left. \begin{aligned} E\delta_{11} &= \int_s \bar{M}_1^2 \frac{ds}{J} + \int \bar{N}_1^2 \frac{ds}{F} + k \frac{F}{G} \int \bar{Q}_1^2 \frac{ds}{F}, \\ E\delta_{22} &= \int_s \bar{M}_2^2 \frac{ds}{J} + k \frac{E}{G} \int \bar{Q}_2^2 \frac{ds}{F}. \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

В арках с подъемом $f < \frac{1}{5}l$ и с толщиной в ключе $\frac{l}{10} > h_c > \frac{l}{30}$, встречающихся в мостах и других сооружениях, следует считать:

$$\left. \begin{aligned} E\delta_{11} &= \int_s \bar{M}_1^2 \frac{ds}{J} + \int \bar{N}_1^2 \frac{ds}{F}, \\ E\delta_{22} &= \int_s \bar{M}_2^2 \frac{ds}{J}. \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

При том же подъеме, но при $h < \frac{1}{30}l$ можно в выражении для δ_{11} пренебречь учетом продольной силы \bar{N}_1 .

В арках с подъемом $f > \frac{1}{4}l$ и с толщиной $h > \frac{1}{10}l$, встречающихся в туннелях, следует считать:

$$\left. \begin{aligned} E\delta_{11} &= \int_s \bar{M}_1^2 \frac{ds}{J} + \int_s \bar{N}_1^2 \frac{ds}{F} + k \frac{E}{G} \int \bar{Q}_1^2 \frac{ds}{F}, \\ E\delta_{22} &= \int_s \bar{M}_2^2 \frac{ds}{J} + k \frac{E}{G} \int \bar{Q}_2^2 \frac{ds}{F}. \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

В арках с тем же подъемом, но при толщине $h < \frac{1}{30} l$ можно пренебречь учетом влияния N и Q .

Перейдем теперь к рассмотрению влияния учета кривизны $\frac{1}{\rho}$, поперечной силы Q и нормальной силы N , входящих в числители выражений (49), на величины неизвестных и в первую очередь на величину распора X_1 .

Сопоставление влияния учета N и Q на величину распора затрудняется тем, что они зависят от вида нагрузки и ее положения на арке, поэтому приводимые ниже сопоставления сделаны в условиях загрузки арки сосредоточенным грузом посредине или сплошной равномерно распределенной нагрузкой. Оба эти случая, хотя они являются частными случаями, позволяют сделать выводы о влиянии учета отдельных интегралов.

Сравнительные вычисления величин интегралов числителя, производившиеся для арок с параболической и круговой осями при различных отношениях стрел арки к ее пролету ($f:l$) и при различных толщинах $h_c:l$ в ключе¹ позволяют сделать следующие выводы.

Отказ от учета влияния кривизны и поперечной силы мало отзывается на величине распора. Если проводить сравнение с точной величиной распора, получаемой при учете всех факторов, то неучет влияния кривизны и поперечной силы оказывает заметное влияние только в арках с большой толщиной в ключе $h_c > \frac{1}{10} l$; оно нарастает с увеличением подъема, но даже в арках с подъемом $f > \frac{1}{2} l$ оно не превосходит 4%.

Учет продольной силы оказывает существенное влияние на величину распора; в очень пологих арках при $f < \frac{1}{5} l$ оно нарастает с увеличением пологости и толщины арки. Если провести сравнение величины распора, получаемой при определении его по полной формуле:

$$X_1 = - \frac{\int_s M_p \bar{M}_1 \frac{ds}{J} + \int_s N_p \bar{N}_1 \frac{ds}{F}}{\int_s \bar{M}_1^2 \frac{ds}{J} + \int_s \bar{N}_1^2 \frac{ds}{F}}, \quad (54)$$

с его величиной, получаемой при неучете вторых интегралов в числителе и знаменателе, то оказывается, что существенное влияние на величину распора имеет неучет влияния продольной силы в знаменателе, тогда как неучет ее в числителе мало отзывается на величине распора.

Например в арке с подъемом $f = \frac{1}{8} l$, нагруженной сосредоточенным грузом посредине, учет влияния продольной силы характеризуется цифрами, приведенными в табл. 5.

Таблица 5

Влияние учета нормальной силы на величину распора параболической бесшарнирной арки с подъемом $f = \frac{1}{8} l$ при действии сосредоточенного груза посредине

| Способ расчета | $\frac{h}{l} = 0,1$ | | $\frac{h}{l} = 0,2$ | |
|---|---------------------|--------------------|---------------------|--------------------|
| | величина распора | разница в % от P | величина распора | разница в % от P |
| С учетом всех интегралов (M и N) | 1,096 P | — | 1,654 P | — |
| Без учета влияния N в числителе | 1,140 P | + 4,6 | 1,673 P | + 1,2 |
| Без учета влияния N в числителе и знаменателе | 1,960 P | + 80 | 1,960 P | + 19 |

¹ Прокофьев С. А., Теория расчета упругих арок, стр. 242, 1912; Тимошенко С. П., Расчет упругих арок, стр. 79.

На основании приведенных соображений представляется возможным определять распор без учета в числителе формулы (54) интеграла, характеризующего влияние нормальной силы; это вполне допустимо в расчетах первого приближения.

Таким образом при всех указанных упрощениях формулы для определения неизвестных в бесшарнирных пологих арках приводятся к следующему виду:

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} = -\frac{\int_s M_p \bar{M}_1 \frac{ds}{J}}{\int_s \bar{M}_1^2 \frac{ds}{J} + \int_s \bar{N}_1^2 \frac{ds}{F}} = -\frac{\int_s M_p \bar{M}_1 \frac{ds}{J}}{(1 + \mu) \int_s \bar{M}_1^2 \frac{ds}{J}}; \quad (55)$$

$$X_2 = -\frac{\Delta_{2p}}{\delta_{22}} = -\frac{\int_s M_p \bar{M}_2 \frac{ds}{J}}{\int_s \bar{M}_2^2 \frac{ds}{J}}; \quad (56)$$

$$X_3 = -\frac{\Delta_{3p}}{\delta_{33}} = -\frac{\int_s M_p \bar{M}_3 \frac{ds}{J}}{\int_s \bar{M}_3^2 \frac{ds}{J}}. \quad (57)$$

Нельзя пренебрегать влиянием продольной силы в арках, если ось совпадает с рациональной осью трехшарнирной арки для заданной нагрузки (параболическая кривая при сплошной нагрузке, круговая ось при радиальной и т. д.). В таких арках обжатие бесшарнирной оси продольными силами вызывает дополнительный распор и моменты в сечениях арки (см. § 29).

Величина μ , входящая в знаменатель выражения (55) для распора, определяется отношением:

$$\mu = \frac{\int_s \cos^2 \varphi \frac{ds}{F}}{\int_s \bar{M}_1^2 \frac{ds}{J}} \quad (58)$$

и характеризует собой влияние продольных сил. Учетом ее, как указывалось выше, можно пренебрегать в арках, толщина которых в ключе $h < \frac{1}{40} l$ (пролета).

В арках подъемистых ($f > \frac{1}{2} l$) следует знаменатель вычислять с учетом продольных и поперечных сил, как это указывалось выше [см. формулу (53)].

Неточности в вычислении распора могут сильно отзываться на величинах моментов в ключевом и пятых сечениях арки. Это можно усмотреть из выражения моментов в этих сечениях.

Например момент в ключевом сечении арки, нагруженной симметрично, определяется выражением (черт. 104, а)

$$M = X_3 - X_1 c.$$

Величина X_3 , как видно из формулы (57), не зависит от продольных и поперечных сил, поэтому разность, входящая в правую сторону, будет изменяться в зависимости от степени точности определения величины X_1 . Неточность ΔX_1 , допущенная в величине X_1 , может сильно изменить величину разности в выражении момента, и ошибка ΔM , определяемая отношением

$$\frac{M + \Delta M}{M} = \frac{X_3 - (X_1 + \Delta X_1) c}{X_3 - X_1 c},$$

может оказаться весьма значительной.

Сравнительные подсчеты показывают, что ошибка в несколько процентов в величине распора вызывает ошибку в несколько десятков процентов в величине ключевого момента и даже может изменить знак момента. Это особенно сильно

сказывается в пологих арках с большой толщиной и в арках, ось которых близка к вервочной кривой от заданной нагрузки.

Все указанные в настоящем параграфе упрощения были приняты в предположении большого влияния на деформацию моментов, имеющих место в сечениях арки. В арках с рациональной осью, совпадающей с кривой давления или очень близкой к ней, $M=0$ и $Q=0$, поэтому влияние продольных сил на величину деформаций и следовательно на величину неизвестных становится значительным, так что им пренебрегать нельзя. В расчетах таких арок следует учитывать изменение величины распора, происходящее под влиянием обжатия оси арки продольными силами (§ 29).

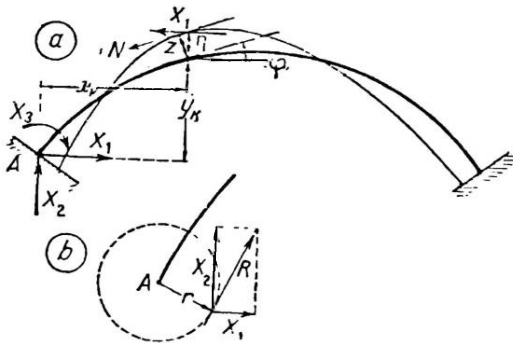
§ 23. МНОГОУГОЛЬНИК ИЛИ КРИВАЯ ДАВЛЕНИЙ

После того как будут определены неизвестные X_1 , X_2 и X_3 в опорном или ключевом сечении, можно определить моменты и нормальные силы в сечениях арки по формулам (черт. 105):

$$M_k = M_k^0 + X_3 + X_2 x_k - X_1 y_k,$$

$$N_k = N_k^0 + X_2 \sin \varphi + X_1 \cos \varphi.$$

В них M_k^0 — статический момент от заданной нагрузки, лежащей слева от сечения, N_k^0 — проекция той же нагрузки на нормаль к сечению.



Черт. 105.

же точки кривой, получим кривую давлений. Последняя сторона определяется направлением равнодействующей:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{X_2}{X_1}. \quad (60)$$

Когда на арку действует только вертикальная нагрузка, то построение многоугольника давления упрощается, если вычислять расстояния от многоугольника давления до оси арки по вертикали; эти расстояния будут определяться из условия:

$$\eta = \frac{M_k}{X_1} = \frac{M_k^0 + X_3 + X_2 x_k}{X_1} - y_k. \quad (61)$$

Ордината η откладывается сверху, если она положительна.

В точке на опоре ордината (черт. 105, б)

$$\eta_0 = \frac{X_3}{X_1}$$

и направление стороны многоугольника параллельно равнодействующей; угол наклона этой стороны определяется формулой (60).

Построение многоугольника давления может быть сделано также графически при помощи вервочного многоугольника.

Положение полюса в силовом многоугольнике определяется величиной и направлением сил X_1 и X_2 , которые должны быть вычислены; известно также направление и первого луча.

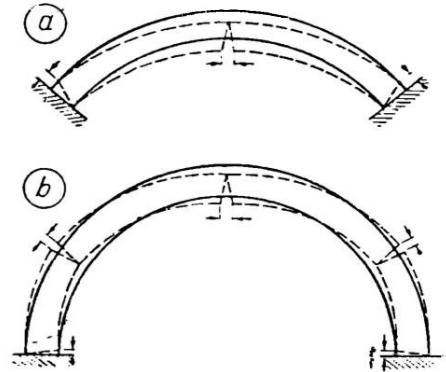
Положение этого луча относительно оси свода определится, как касательная к окружности, описанной вокруг опорной точки оси свода радиусом (черт. 105, б):

$$r = \frac{X_3}{R} = \frac{X_3}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2}}.$$

Направление этой стороны должно быть проведено до пересечения с первой силой, действующей на арку.

Многоугольник давления характеризует собой величины моментов в сечениях арок и служит, как указывалось в § 19, основанием для выправления оси арки и приближения ее к рациональному очертанию.

В арках, проектируемых из материалов, слабо сопротивляющихся растяжению (бетон, камень и т. п.), выход многоугольника давления из ядра сечения может вызвать образование трещин в арке¹. В пологих арках такие трещины обычно появляются в ключевом сечении со стороны внутренней поверхности арки (черт. 106, а) и в пятовых сечениях со стороны внешней поверхности. В арках подъемистых кроме трещин в указанных сечениях часто появляются трещины в швах, наклоненных примерно под углом 60° к вертикали (черт. 106, б).



Черт. 106.

§ 24. РАСЧЕТ АРКИ С ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ОСЬЮ

Расчет арки с параболической осью приводится нами с целью разобрать аналитический процесс разрешения отдельных интегралов и построения расчетных эпюр и линии влияния. Разбор арки с параболической осью имеет значение и потому, что эта схема применяется для приближенного расчета бесшарнирных арок с любым очертанием оси.

Будем рассматривать симметричную арку, ось которой задана уравнением параболы, отнесенным к вершине (черт. 107).

$$y = \frac{4f}{l^2} x^2 = \frac{f}{l^2} x^2.$$

В такой арке угол φ наклона касательной в любой точке ее оси определяется тангенсом:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{8f}{l^2} x = \frac{1}{p} x, \quad \text{где } p = \frac{l^2}{8f};$$

соответственно:

$$\sin \varphi = \frac{x}{\sqrt{p^2 + x^2}} \quad \text{и} \quad \cos \varphi = \frac{p}{\sqrt{p^2 + x^2}}.$$

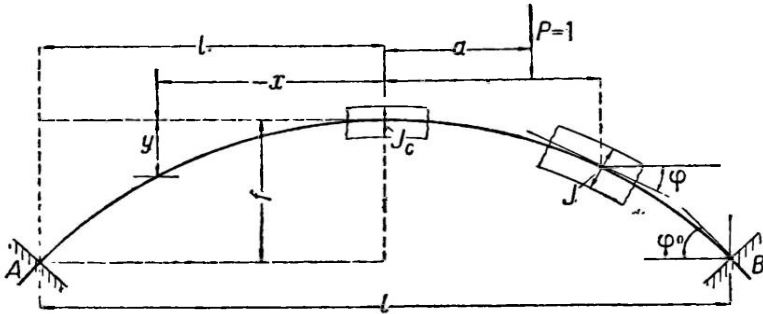
¹ Условие прохождения многоугольника давлений через крайние точки ядра сечений в ключевом и пятовом сечениях арки являлось в свое время основой для расчета арок по способу „предельного равновесия“. В настоящее время, когда установлено, что арки из всех материалов (каменя, кирпича и т. д.) работают как упругие, расчет по предельному равновесию потерял всякое значение. Арки из материалов всякого вида должны рассчитываться как упругие, но очертание оси их должно приближаться к многоугольнику давлений.

Примем, что сечение арки переменное и изменяется по закону:

$$\frac{J_c}{J \cos \varphi} = 1 - (1-n) \frac{x}{l_1}. \quad (a)$$

При

$$n = 1 \quad J = \frac{J_c}{\cos \varphi}.$$



Черт. 107.

Выбираем основную систему в виде балки, лежащей на двух опорах (черт. 108); лишними неизвестными будем считать распор X_1 и два симметрично расположенных момента X_2 и X_3 . Для приведения побочных перемещений к нулю симметричные опорные моменты должны быть

заменены парными прямо и обратно симметричными неизвестными U , V и сила X_1 должна быть перенесена на линию центра фиктивных упругих сил, положение которого определяется ординатой:

$$c = \frac{\int y \frac{ds}{J}}{\int \frac{ds}{J}}.$$

При данном очертании оси и законе изменения толщины арки ордината c определяется выражением (48):

$$c = \frac{1}{6} \frac{(1+3n)}{(1+n)} f.$$

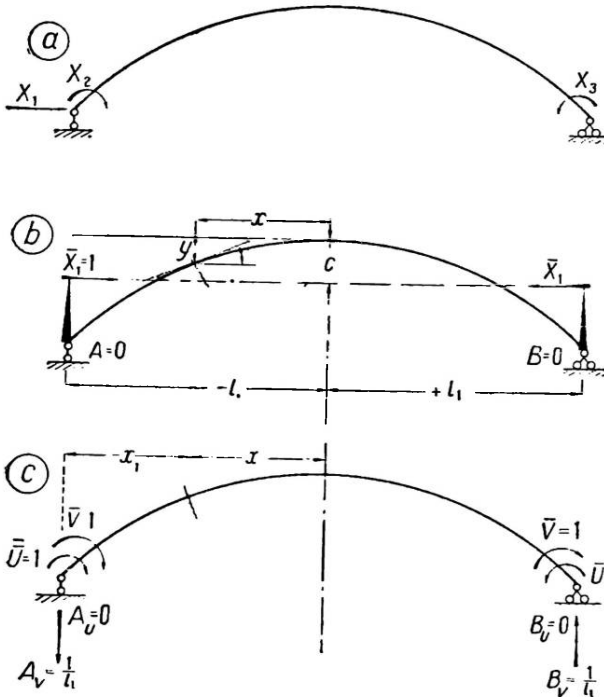
При $n = 1$

$$c = \frac{1}{3} f.$$

Указанные преобразования приводят все побочные перемещения к нулю, и неизвестные определяются отношениями:

$$X_1 = -\frac{\Delta_{12}}{\delta_{11}}; \quad U = -\frac{\Delta_{12}}{\delta_{111}};$$

$$V = -\frac{\Delta_{12}}{\delta_{112}}.$$



Черт. 108.

1. **Сосредоточенная сила.** В целях упрощения процесса расчета рассматриваем арку в условиях прямо и обратно симметричного нагружения (черт. 109). Неизвестное X_1 (распор) определяем по его выражению (55):

$$X_1 = -\frac{\Delta_{12}}{\delta_{11}} = -\frac{\int_s M_p \overline{M}_1 \frac{ds}{J}}{\int_s \overline{M}_1^2 \frac{ds}{J} + \int_s \overline{N}_1^2 \frac{ds}{F}}$$

Для вычисления интегралов, входящих в знаменатель, подставляем в них значения (черт. 108):

$$\overline{M}_1 = (c - y) = \frac{1 + 3n}{6(1+n)}f - f \frac{x^2}{l^2},$$

$$\overline{N}_1 = \cos \varphi,$$

$$\frac{ds}{J} = \frac{1}{J_c} \left[1 - (1-n) \frac{x}{l} \right] dx.$$

Первый интеграл знаменателя дает:

$$\begin{aligned} \int_s \overline{M}_1^2 \frac{ds}{J} &= 2 \int_{s/2} (c-y)^2 \frac{ds}{J} = 2 \frac{f^2}{J_c} \int_0^{l/2} \left[\frac{1+3n}{6(1+n)} - \frac{x^2}{l^2} \right]^2 \cdot \left[1 - (1-n) \frac{x}{l} \right] dx = \\ &= \frac{f^2 l}{360 J_c} \cdot \frac{15n^2 + 42n + 7}{1+n}. \end{aligned}$$

Для вычисления второго интеграла примем, что площадь поперечных сечений арки изменяется по закону:

$$F = \frac{F_c}{\cos \varphi}.$$

Хотя это не соответствует принятому условию изменения момента инерции, но, как указывалось в § 20, эта неувязка ничтожно влияет на величину распора.

$$\int_s \overline{N}_1^2 \frac{ds}{F} = 2 \int_{s/2} \cos^2 \varphi \frac{ds}{F} = 2 \frac{p}{F_c} \int_0^{l/2} \frac{d-x}{1 + \frac{x^2}{p^2}} = \frac{2p}{F_c} \operatorname{arctg} \frac{l}{2p} = \frac{f^2}{4fF_c} \operatorname{arctg} \frac{4f}{l}.$$

Таким образом знаменатель в выражении для распора:

$$E\delta_{11} = \frac{f^2 l}{360 J_c} \frac{15n^2 + 42n + 7}{1+n} (1 + \mu). \quad (62)$$

При $n = 1$

$$E\delta_{11} = \frac{4}{45 J_c} f^2 l (1 + \mu).$$

В этих выражениях:

$$\mu = \frac{\int_s \cos^2 \varphi \frac{ds}{F}}{\int_s (c-y)^2 \frac{ds}{J}} = \frac{90 J_c l (1+n) \operatorname{arctg} \frac{4f}{l}}{F_c f^3 (15n^2 + 42n + 7)}. \quad (63)$$

При $n = 1$

$$\mu = \frac{45 J_c l}{16 F_c f^3} \operatorname{arctg} \frac{4f}{l}. \quad (64)$$

Величина μ характеризует влияние продольных сил на величину распора. Из выражений (64) видно, что она зависит от отношений:

$$\frac{J_c}{F_c f} = \frac{1}{12} \frac{h_c^2}{f^3} \text{ и } \frac{l}{f}$$

и уменьшается с увеличением f , т. е. в подъемистых арках.

В пологих же арках со стрелой $f < \frac{1}{5}l$ величина $\cos \varphi$ в сечениях арки приближается к единице. Это позволяет принять для вычисления второго интеграла в знаменателе $\cos \varphi = 1$ и $ds = dx$; тогда:

$$2 \int_{s/2} \cos^2 \varphi \frac{ds}{F} = \frac{2l_1}{F} = \frac{l}{F}.$$

В соответствии с этим выражение (64) для коэффициента μ упрощается:

$$\mu = \frac{360J_c(1+n)}{F_c f^2(15n^2 + 42n + 7)}. \quad (65)$$

При $n = 1$

$$\mu = \frac{45}{4} \cdot \frac{J_c}{F_c f^2}. \quad (66)$$

Получающаяся при этом допущении ошибка в величине знаменателя не превосходит 1% и так же мало отзывается на величине распора. Это позволяет принимать в расчетах арок упрощенную формулу (66) для вычисления δ_{11} .

В табл. 6 приведены значения μ , вычисленные по формулам (63) и (65) для параболических арок со стрелами $f = \frac{1}{6}l$ и $f = \frac{1}{8}l$ и с толщиной в ключе $h_c = \frac{1}{30}l$; в той же таблице путем вычисления множителя $\frac{1}{1+\mu}$ показано влияние изменения величины μ на величину распора.

Таблица 6

Значения коэффициента μ по формулам (63) и (65) для параболических бесшарнирных арок при толщине в ключе $h_c = \frac{1}{30}l$

| Подъем арки | Значение коэффициента n | Коэффициент μ | | Множитель $1:(1+\mu)$ | | Ошибка в % |
|--------------------|---------------------------|-------------------|-----------------|-----------------------|-----------------|------------|
| | | по формуле (63) | по формуле (65) | по формуле (63) | по формуле (65) | |
| $f = \frac{1}{6}l$ | 1 | 0,0331 | 0,0375 | 0,963 | 0,960 | 0,3 |
| $f = \frac{1}{6}l$ | 0,5 | 0,0501 | 0,0567 | 0,952 | 0,946 | 0,6 |
| $f = \frac{1}{6}l$ | 0,25 | 0,0720 | 0,0814 | 0,932 | 0,926 | 0,7 |
| $f = \frac{1}{8}l$ | 1 | 0,0612 | 0,0667 | 0,942 | 0,937 | 0,5 |
| $f = \frac{1}{8}l$ | 0,5 | 0,0925 | 0,1008 | 0,915 | 0,908 | 0,75 |
| $f = \frac{1}{8}l$ | 0,25 | 0,1328 | 0,1440 | 0,882 | 0,874 | 0,9 |

Переходим к вычислению числителя в выражении для распора X_1 .

При разложении груза на прямо и обратно симметричную нагрузку величина Δ_{1p} будет зависеть только от симметричного нагружения (черт. 109).

На участке от пят арки до точки приложения груза

$$M_p = \frac{1}{2} P (l_1 - x),$$

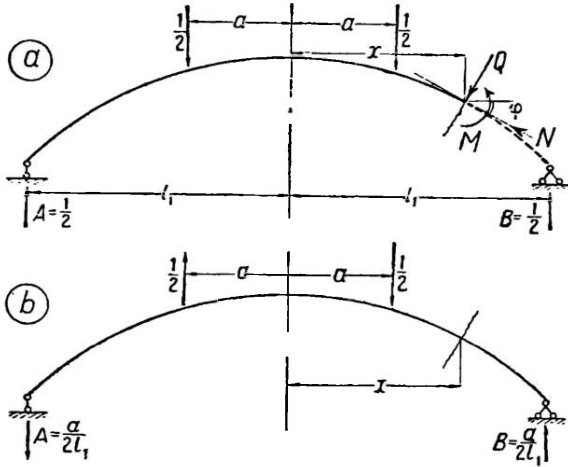
на участке от точки приложения груза до оси арки

$$M_p = \frac{1}{2} P (l_1 - a).$$

Подставив значения M_p и ранее указанные значения \overline{M}_1 и $\frac{ds}{J}$ в интеграл числителя, получим:

$$E\Delta_{1p} = -\frac{2f}{J_c} \int_0^a \frac{P}{2} (l_1 - a) \left[\frac{1+3n}{6(1+n)} - \frac{x^2}{4l_1^2} \right] \cdot \left[1 - (1-n) \frac{x}{l_1} \right] dx -$$

$$- 2 \frac{f}{J_c} \int_a^{l_1} \frac{P}{2} (l_1 - x) \left[\frac{1+3n}{6(1+n)} - \frac{x^2}{4l_1^2} \right] \cdot \left[1 - (1-n) \frac{x}{l_1} \right] dx.$$



Черт. 109.

После интегрирования и приведения подобных членов получим:

$$E\Delta_{p1} = -\frac{Pfl(1+3n)}{12J_c(1+n)} \left[\frac{l_1^2 - a^2}{2l_1} - (1-n) \frac{l_1^3 - a^3}{6l_1} \right] +$$

$$+ \frac{Pfl}{2} \left[\frac{l_1^4 - a^4}{12l_1^3} - (1-n) \frac{l_1^5 - a^5}{20l_1^4} \right].$$

Обозначив $\frac{a}{l_1} = z$ и сделав приведение, получим:

$$E\Delta_{1p} = -\frac{Pfl^2}{48J_c} \left\{ \frac{1+3n}{1+n} \left[1 - z^2 - \frac{1}{3}(1-n)(1-z^3) \right] - \right.$$

$$\left. - \left[1 - z^4 - \frac{3}{5}(1-n)(1-z^5) \right] \right\}.$$

Таким образом распор в параболической арке, вызываемый действием сосредоточенного груза, определяется выражением:

$$X_1 = \frac{15Pl}{2f(15n^2 + 42n + 7)(1+\mu)} \left\{ (1+3n) \left[(1-z^2) - \frac{1}{3}(1-n)(1-z^3) \right] - \right.$$

$$\left. - (1+n) \left[(1-z^4) - \frac{3}{5}(1-n)(1-z^5) \right] \right\}. \quad (67)$$

При $n=1$

$$X_1 = \frac{15P \cdot l}{64f} \cdot \frac{(1-z^2)^2}{(1+\mu)}. \quad (68)$$

Из полученных формул видно, что величина распора существенно зависит от отношения $\frac{f}{l}$, т. е. от пологости арки.

Неизвестное U . Величина неизвестного U определяется уравнением:

$$U = -\frac{\Delta_{up}}{\delta_{uu}} = -\frac{\int_s M_p \bar{M}_u \frac{ds}{J}}{\int_s \bar{M}_u^2 \frac{ds}{J}}.$$

Обратно симметричное действие груза дает суммарное перемещение $\Delta_{pu} = 0$, так как эпюра M_p будет обратно симметрична, а эпюра M_u — прямо симметрична.

Единичное воздействие $\bar{U} = 1$ вызывает в сечениях арки моменты $\bar{M}_u = 1$.

После подстановки значений M_p , \bar{M}_u и $\frac{ds}{J_c}$ в уравнение, определяющее неизвестное, и сокращения его на J_c получим:

$$U = -\frac{\Delta_{up}}{\delta_{uu}} = -\frac{\frac{1}{2} P \left\{ \int_0^a (l_1 - a) \left[1 - (1-n) \frac{x}{l_1} \right] dx + \int_a^{l_1} (l_1 - x) \left[1 - (1-n) \frac{x}{l_1} \right] dx \right\}}{\int_0^{l_1} \left[1 - (1-n) \frac{x}{l_1} \right] dx}$$

Производя интегрирование, получим

а) в числителе:

$$\frac{EJ_c}{2} \Delta_{up} = \frac{Pl_1^2}{2} \left\{ \left(1 - \frac{a}{l_1} \right) \left[\frac{a}{l_1} - (1-n) \frac{a^2}{2l_1^2} \right] + \right. \\ \left. + \left[\frac{l_1 - a}{l_1} - (1-n) \frac{l_1^2 - a^2}{2l_1^2} \right] - \left[\frac{l_1^3 - a^2}{2l_1^2} - (1-n) \frac{l_1^3 - a^3}{3l_1^3} \right] \right\}.$$

После подстановки $z = \frac{a}{l_1}$ и приведения подобных членов получим:

$$\frac{EJ_c}{2} \Delta_{up} = \frac{Pl_1^2}{12} [3(1 - z^2) - (1-n)(1 - z^3)].$$

б) В знаменателе:

$$\frac{EJ_c}{2} \delta_{uu} = \int_0^{l_1} \left[1 - (1-n) \frac{x}{l_1} \right] dx = \frac{l_1(1+n)}{2}.$$

Таким образом неизвестное U определяется выражением:

$$U = -\frac{Pl}{12(1+n)} [3(1 - z^2) - (1-n)(1 - z^3)]. \quad (69)$$

При $n = 1$

$$U = -\frac{Pl}{8} (1 - z^2). \quad (70)$$

Неизвестное V . Величина неизвестного V определяется уравнением:

$$V = -\frac{\Delta_{pv}}{\delta_{vv}} = -\frac{\int_s M_p \bar{M}_v \frac{ds}{J}}{\int_s \bar{M}_v^2 \frac{ds}{J}}.$$

Разложив действие груза на прямо и обратно симметричное (черт. 109), будем иметь при обратно симметричном действии его на участке от пят до точки приложения груза:

$$M_p = \frac{1}{2} P \frac{a}{l_1} (l_1 - x),$$

на участке от точки приложения до середины свода:

$$M_p = \frac{1}{2} P \frac{a}{l_1} (l_1 - x) - \frac{P}{2} (a - x).$$

При прямо симметричном действии груза суммарное перемещение $\Delta_{pv} = 0$. Момент в сечениях арки от единичного воздействия:

$$\overline{M}_v = -\frac{1}{l_1} (l_1 - x) + 1 = \pm \frac{x}{l_1}; \quad N_v = \frac{1}{l_1} \sin \varphi.$$

Влияния продольных сил не учитываем по его незначительности в сравнении с влиянием моментов.

Подставив значения M_v , \overline{M}_v , $\frac{ds}{J_c}$ в выражение для неизвестного V и сократив его на J_c , получим:

$$V = -\frac{\Delta_{pv}}{\delta_{vv}} = -\frac{\frac{1}{2} P \left\{ \int_0^a \left[\frac{a}{l_1} (l_1 - x) - (a - x) \right] \cdot \left[1 - (1 - n) \frac{x}{l_1} \right] \frac{x}{l_1} dx \right\}}{\int_0^{l_1} \frac{x^2}{l_1^2} \left[1 - (1 - n) \frac{x}{l_1} \right] dx} - \frac{\frac{1}{2} P \left\{ \frac{a}{l_1} \int_a^{l_1} (l_1 - x) \frac{x}{l_1} \left[1 - (1 - n) \frac{x}{l_1} \right] dx \right\}}{\int_0^{l_1} \frac{x^2}{l_1^2} \left[1 - (1 - n) \frac{x}{l_1} \right] dx}.$$

Производя интегрирование, получим:

а) В числителе

$$\frac{EJ_c}{2} \Delta_{pv} = \frac{P}{2} \left\{ \left(1 - \frac{a}{l_1} \right) \left[\frac{a^3}{3l_1} - \frac{a^4(1-n)}{4l_1^2} \right] + \frac{a}{l_1} \left[\frac{l_1^2 - a^2}{2} - \frac{l_1^3 - a^3}{3l_1} - \frac{(l_1^3 - a^3)(1-n)}{3l_1} + \frac{l_1^4 - a^4}{4l_1^2} (1-n) \right] \right\}.$$

После подстановки $z = \frac{a}{l_1}$ и приведения подобных членов получим:

$$\frac{EJ_c}{2} \Delta_{pv} = \frac{Pl^2}{48} z [2(1 - z^2) - (1 - n)(1 - z^3)].$$

в) В знаменателе

$$\frac{EJ_c}{2} \delta_{vv} = 2l_1 \left[\frac{1}{3} - (1 - n) \frac{1}{4} \right] = \frac{(1 + 3n)l}{12}.$$

Таким образом неизвестное V определяется выражением:

$$V = \frac{Pl}{4(1 + 3n)} z [2(1 - z^2) - (1 - n)(1 - z^3)]. \quad (71)$$

При $n = 1$

$$V = \frac{Pl}{8} z (1 - z^2). \quad (72)$$

После того как определены лишние неизвестные, легко найти моменты, продольные и поперечные силы в сечениях арки по следующим формулам (черт. 110).

Момент в точке k на оси арки с координатами x_k и y_k определяется выражением:

$$M_k = M_k^0 - X_1(y_k - c_1) + U + V \frac{l - 2x_k}{l}.$$

Продольная сила в том же сечении:

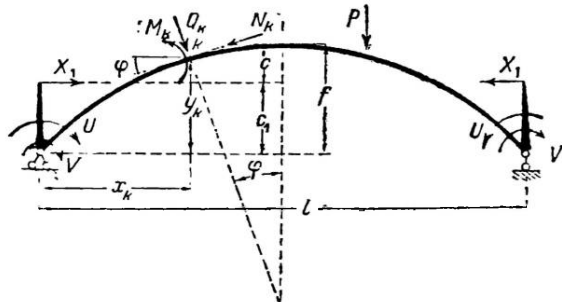
$$N_k = Q_k^0 \sin \varphi + X_1 \cos \varphi - \frac{2}{l} V \sin \varphi.$$

Поперечная сила:

$$Q_k = Q_k^0 \cos \varphi - X_1 \sin \varphi - \frac{2}{l} V \cos \varphi.$$

В этих формулах M_k^0 , Q_k^0 — момент и поперечная сила в сечениях арки, рассматриваемой как балка того же пролета.

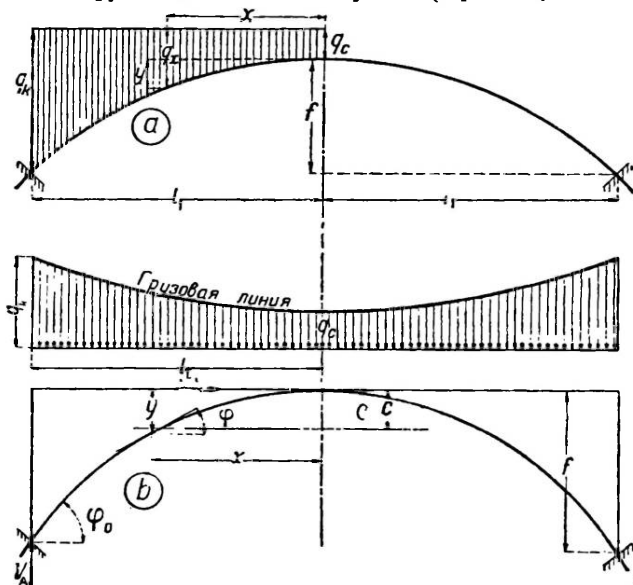
2. **Сплошная нагрузка.** Сплошная нагрузка на арку складывается из веса самой арки и надарочного строения. Интенсивность этой нагрузки на погонную единицу изменяется в соответствии с изменением контура оси арки, поэтому в процессе аналитического расчета приходится устанавливать закон изменения нагрузки по сообразию с видом оси арки.



Черт. 110.

ционально ординатам ее оси, но оно позволяет увязать закон нарастания нагрузки с уравнением оси арки.

В условиях параболической арки предложенный закон изменения интенсивности нагрузки представляется суммой (черт. 111):



Черт. 111.

$$q_x = q_c + \gamma y = q_c + \gamma f \frac{x^2}{l^2}, \quad (73)$$

где q_c — интенсивность постоянной нагрузки в ключе; γ — коэффициент, величина которого определяется величиной нагрузки над пятой:

$$q_k = q_c + f\gamma,$$

откуда

$$\gamma = \frac{q_k - q_c}{f}.$$

Подставив значение γ в формулу (73), получим:

$$q_x = q_c + (q_k - q_c) \frac{x^2}{l^2}. \quad (74)$$

Такого вида нагрузка обычно принимается для учета забутки над сводами.

Для вывода формул, определяющих величины лишних неизвестных, вызываемых этой нагрузкой, воспользуемся выражениями, выведенными для неизвестных при действии сосредоточенного груза, и при $n=1$, заменив в них силу P величиной $q_x dx$, проинтегрируем их, приняв $a=x$.

Неизвестное — распор X_1 . При действии сосредоточенного груза неизвестное X_1 определяется уравнением (68):

$$X_1 = \frac{15l_1(1-z^2)^2}{32f(1+\mu)} p.$$

При действии указанной сплошной нагрузки выражение, определяющее величину распора, напишется так:

$$X_1 = \frac{2 \cdot 15l_1}{32f(1+\mu)} \int_0^1 l_1 [q_c + (q_k - q_c)z^2] (1-z^2)^2 dz.$$

Здесь $dz = \frac{dx}{l_1}$.

Произведя интегрирование, получим:

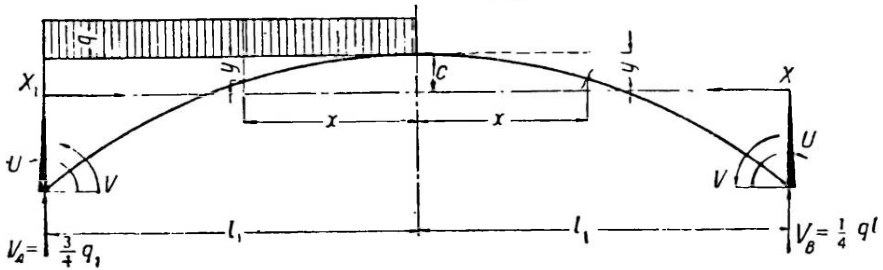
$$X_1 = \frac{2 \cdot 15l_1^2}{32f(1+\mu)} \left[\frac{8}{15} q_c + \frac{8}{105} (q_k - q_c) \right],$$

отсюда

$$X_1 = \frac{l^2}{56(1+\mu)f} (6q_c + q_k). \quad (75)$$

При $q_k = q_c$, что соответствует загрузению арки сплошной равномерной нагрузкой:

$$X_1 = \frac{q_c l^2}{8f(1+\mu)}. \quad (76)$$



Черт. 112.

Следовательно распор, возникающий в параболической арке с заделанными концами, при действии на нее сплошной равномерной нагрузки отличается от распора в трехшарнирной арке наличием в знаменателе множителя $(1+\mu)$.

Неизвестное—момент U . При действии сосредоточенного груза неизвестное U определяется уравнением (70):

$$U = -P \frac{l}{8} (1-z^2).$$

Выражение, определяющее величину момента, при действии сплошной нагрузки q_x напишется так:

$$U = -2 \frac{l}{8} \int_0^1 l_1 [q_c + (q_k - q_c)z^2] (1-z^2) dz.$$

Произведя интегрирование, получим:

$$U = -\frac{l^2}{60} (4q_c + q_k). \quad (77)$$

При $q_k = q_c$, т. е. при сплошном равномерном загрузении:

$$U = -\frac{q_c l^2}{12}, \quad (78)$$

что соответствует опорному моменту балки с заделанными концами, нагруженной сплошной равномерно распределенной нагрузкой. На черт. 112 направление U показано с учетом отрицательного знака.

Неизвестное—момент V . При симметричном загрузении, очевидно, $V=0$.

Для случая же загрузения половины арки сплошной временной нагрузкой q_c (черт. 112) выражение для этого неизвестного напишется так (72):

$$V = \mp \frac{l}{8} \int_0^1 l_1 q_c z (1-z^2) dz.$$

Знак (—) относится к загрузке левой половины арки, а знак (+) — к загрузке правой половины.

Произведя интегрирование, получим:

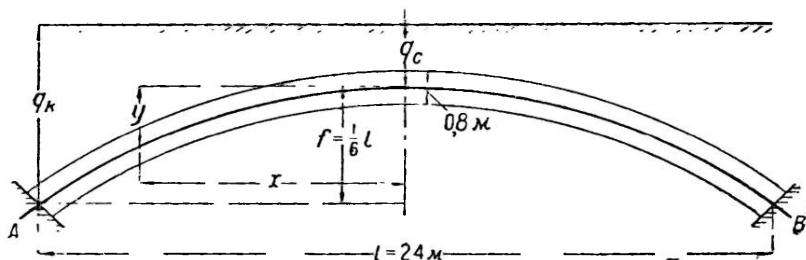
$$V = \mp \frac{f^2}{64} q_c. \quad (79)$$

После определения лишних неизвестных представляется возможным построить эпюры моментов и сил Q и N в сечениях арок (см. пример 9). Может быть проведено также построение кривой давлений (см. § 23).

Пример 9. Рассмотрим в качестве примера построение эпюры моментов в параболической арке пролетом $l = 24$ м со стрелой $f = 1$ м $= \frac{1}{6} l$ и высотой сечения в ключе $h_c = 0,8$ м $= \frac{1}{30} l$ (черт. 113).

Высота нагрузки ключом арки $q_c = 1$, а над пятой $q_k = 5q_c$. Сечение арки изменяется по закону (стр. 74):

$$J = \frac{J_c}{\cos \varphi}.$$



Черт. 113.

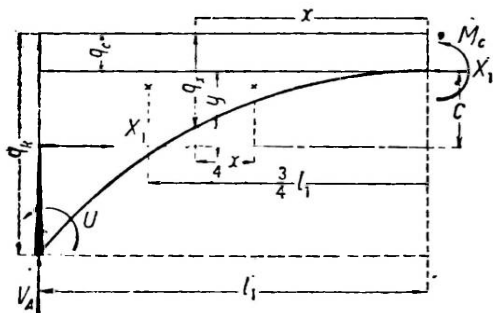
Положение центра фиктивных упругих грузов:

$$c = \frac{1}{3} f = 1,333 f.$$

Величина μ по формуле (66) равна:

$$\mu = \frac{45}{4} \cdot \frac{0,8^2}{12 \cdot 4^2} = 0,0375.$$

Определяем лишние неизвестные по формулам (75) и (77):



Черт. 114.

$$\begin{aligned} [X_1 &= \frac{f^2}{56 \cdot 4(1 + 0,0375)} (6 + 5) q_c = \\ &= 0,189 q_c l_1^2 = 27,22 q_c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U &= \frac{f^2}{60} (4 + 5) q_c = 0,6 q_c l_1^2 = \\ &= 86,4 q_c. \end{aligned}$$

Опорная реакция от нагрузки (черт. 114):

$$\begin{aligned} V_A &= q_c l_1 + \frac{11}{3} (q_k - q_c) l_1 = \\ &= \frac{7}{3} q_c l_1 = 28 q_c. \end{aligned}$$

Момент в ключевом сечении (черт. 114):

$$\begin{aligned} M_c &= V_A l_1 - \frac{1}{2} q_c l_1^2 - \frac{1}{3} (q_k - q_c) \frac{3}{4} l_1^2 - U - X_1 c = \\ &= \left(\frac{7}{3} - 0,5 - 1 - 0,6 - 0,189 \frac{4}{3} \right) q_c l_1 = -0,019 q_c l_1^2 = -2,74 q_c. \end{aligned}$$

Момент в любом сечении арки (черт. 114) равен:

$$M = M_c - \frac{1}{2} q_c x^2 - \frac{1}{12} (q_k - q_c) \frac{x^4}{l^2} + X_1 y =$$

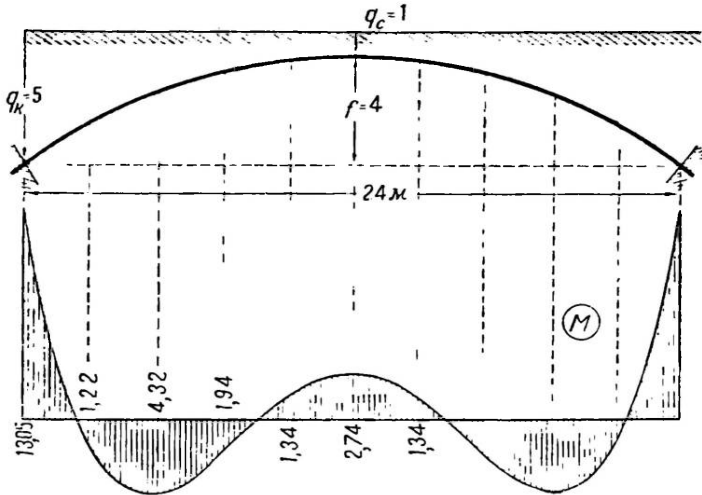
$$= [-0,019 - 0,5z^2 - 0,333z^4 + 0,189 \cdot 4z^2] q_c l^2 = [-0,019 + 0,256z^2 - 0,333z^4] 144 q_c.$$

Давая z ряд значений, вычисляем ординаты эпюры моментов и строим по ним эпюру (черт. 115).

По контуру эпюры моментов может быть построена кривая давлений, ее ординаты определяются величинами согласно формуле (61):

$$\eta = \frac{M}{X_1};$$

она подобна эпюре моментов.



Черт. 115.

§ 25. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПОСТРОЕНИЕ ЛИНИЙ ВЛИЯНИЯ

Аналитическое построение линий влияния в бесшарнирной арке связано с составлением уравнения для усилия или момента в предположении перемещения по арке груза, равного единице. Такое построение возможно в условиях закономерного изменения кривой оси арки и ее сечений.

В частном случае параболической арки можно принять в качестве основной системы балку, лежащую на двух опорах (черт. 108), и тогда для построения линий влияния неизвестных можно использовать их выражения, выведенные в предыдущем параграфе, приняв в этих выражениях груз $P=1$ и абсциссу a точки приложения его переменной. Это сделано в нижеприводимом примере.

Отсюда ясно, что читатель не найдет чего-либо принципиально нового в этом параграфе. Он введен нами с целью показать на конкретном примере процесс последовательности вычислений и их оформления. Сам пример использован для некоторых сопоставлений.

Так, построение линий влияния неизвестных сделано для значений $n=1$, $n=0,5$, $n=0,25$ в формуле (43), определяющей толщину арки. Это дает возможность судить о влиянии изменения толщины арки на величину неизвестных.

Вместе с тем данные, полученные из этого примера, выполненного аналитически, служат основой для сопоставления результатов, полученных в последующих параграфах при расчете арок приближенными способами.

Пример 10. Определим ординаты линий влияния линий неизвестных для параболической арки, показанной на черт. 107; основная система принята по схеме черт. 108. Для проведения расчетов используем данные предыдущего параграфа.

Ординаты линий влияния распора определяем по уравнению (67).

Входящий в это уравнение общий множитель:

$$k = \frac{15l_1}{f(15n^2 + 42n + 7)(1 + \mu)}$$

является масштабным множителем ординат линии влияния; величина его зависит от значений n и μ ; величина последнего определяется формулой (65).

При толщине в ключе $h_c = 0,8$ м и $\frac{J_c}{F_c} = \frac{0,8^2}{12}$ определяем значения μ и k :

при $n = 1$ $\mu = 0,0375$ $k = 0,677$,

при $n = 0,5$ $\mu = 0,0567$ $k = 1,342$,

при $n = 0,25$ $\mu = 0,0814$ $k = 2,385$.

По полученным значениям μ и k в табл. 7 вычислены ординаты линий влияния распора X_1 при значениях $n = 1$, $n = 0,5$, $n = 0,25$ и по ним построены контуры линий влияния (черт. 116, а).

Таблица 7

Ординаты линий влияния распора X_1

| x | $z = \frac{x}{l_1}$ | $1 - z^2$ | $1 - z^3$ | $1 - z^4$ | $1 - z^5$ | При $n = 1$ $k = 0,677$ | При $n = 0,5$ $k = 1,342$ | При $n = 0,35$ $k = 2,335$ |
|-----------|---------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|----------------------------|------------------------------|-------------------------------|
| 0 | 0 | 1,0 | 1,00 | 1,00 | 1,0 | 1,354 | 1,382 | 1,486 |
| 0,2 l_1 | 0,2 | 0,96 | 0,992 | 0,998 | 1,0 | 1,256 | 1,261 | 1,288 |
| 0,4 l_1 | 0,4 | 0,84 | 0,936 | 0,974 | 0,99 | 0,956 | 0,926 | 0,931 |
| 0,6 l_1 | 0,6 | 0,64 | 0,784 | 0,870 | 0,922 | 0,555 | 0,517 | 0,490 |
| 0,8 l_1 | 0,8 | 0,36 | 0,488 | 0,590 | 0,672 | 0,176 | 0,154 | 0,14 |
| l_1 | 1 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 |

Из сопоставления этих контуров видно, что они изменяются сравнительно мало. Площади, ограничиваемые ими, имеют следующие соотношения:

$$\omega_1 : \omega_{1,4} = 3,62 : 3,56 : 3,53.$$

Это показывает, что в приближенных расчетах можно определять величину распора, принимая $n = 1$, и вести расчет по формуле (68).

Ординаты линии влияния опорного момента U определяются уравнением (69) и опорного момента V — уравнением (71).

На черт. 116 по этим уравнениям построены линии влияния:

для неизвестного U — при значениях $n = 1$, $n = 0,5$ и $n = 0,25$
для неизвестного V — при значении $n = 0,5$.

Ординаты этих линий влияния выписаны в табл. 8.

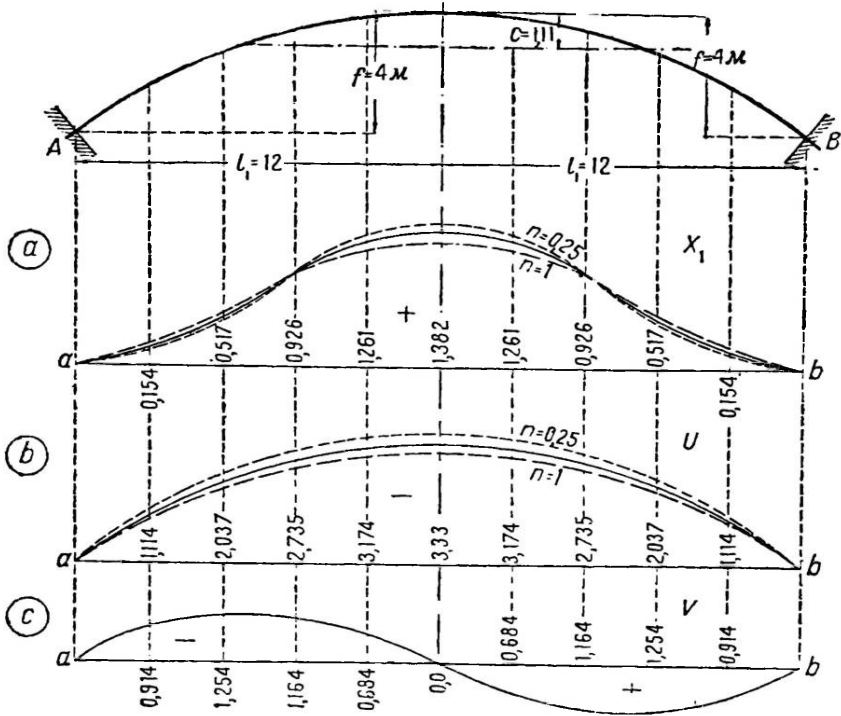
Таблица 8

Ординаты линий влияния моментов U и V

| x | $z = \frac{x}{l_1}$ | $1 - z^2$ | $1 - z^3$ | Линия влияния U | | | Линия влияния V | | |
|-----------|---------------------|-----------|-----------|--------------------------|--------------------------------|-------------------------------|----------------------------|-------------------------------|---------------------------------|
| | | | | при $n = 1$ $k_1 = 1$ | при $n = 0,5$ $k_1 = 1,333$ | при $n = 0,25$ $k_1 = 1,6$ | при $n = 1$ $k_2 = 1,5$ | при $n = 0,5$ $k_2 = 2,40$ | при $n = 0,25$ $k_2 = 3,428$ |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 3,00 | 3,332 | 3,60 | 0,00 | 0,00 | 0,000 |
| 0,2 l_1 | 0,2 | 0,96 | 0,992 | 2,88 | 3,174 | 3,482 | $\pm 0,576$ | $\pm 0,684$ | $\pm 0,737$ |
| 0,4 l_1 | 0,4 | 0,84 | 0,936 | 2,52 | 2,735 | 2,909 | $\pm 1,008$ | $\pm 1,164$ | $\pm 1,341$ |
| 0,6 l_1 | 0,6 | 0,64 | 0,784 | 1,92 | 2,037 | 2,131 | $\pm 1,152$ | $\pm 1,258$ | $\pm 1,423$ |
| 0,8 l_1 | 0,8 | 0,36 | 0,488 | 1,08 | 1,114 | 1,142 | $\pm 0,864$ | $\pm 0,914$ | $\pm 0,936$ |
| l_1 | 1 | 0 | 0,000 | 0,00 | 0,000 | 0,000 | $\pm 0,000$ | $\pm 0,000$ | $\pm 0,000$ |

В табл. 8 коэффициенты k_1 и k_2 представляют собой масштабные множители в линиях влияния и соответственно равны

| | $k_1 = \frac{1}{6} \frac{l_1}{1+n}$ | $k_2 = \frac{l_1}{2(1+3n)}$ |
|----------------|-------------------------------------|-----------------------------|
| при $n = 1$ | 1 | 1,50 |
| при $n = 0,5$ | 1,333 | 2,40 |
| при $n = 0,25$ | 1,60 | 3,428 |



Черт. 116.

Как и надо было ожидать, величины моментов существенно зависят от величины n и нарастают с увеличением толщины арки. Это нарастание для опорного момента U характеризуется следующими соотношениями между площадями линий влияния:

$$\omega_1 : \omega_{1/2} : \omega_{1/4} = 9,9 : 10,73 : 11,46.$$

1. Опорные моменты и реакции. Для получения опорных моментов арки надо прибавить к величине найденных моментов U и V момент от силы X_1 от переноса ее в центр фиктивных сил. В результате этого сложения будем иметь (черт. 108):

$$\text{на левой опоре } M_A = U + V + X_1(f - c),$$

$$\text{на правой опоре } M_B = U - V + X_1(f - c).$$

По этим выражениям на черт. 117, *b* построена линия влияния для случая $n = 0,5$, при этом:

$$c = \frac{5}{18}f \text{ и } (f - c) = \frac{13}{18}f = 2,89 \text{ м,}$$

Учтя знаки, получим:

$$M_A = -(U + V - 2,89 X_1).$$

Ординаты этой линии влияния вычислены в табл. 9.

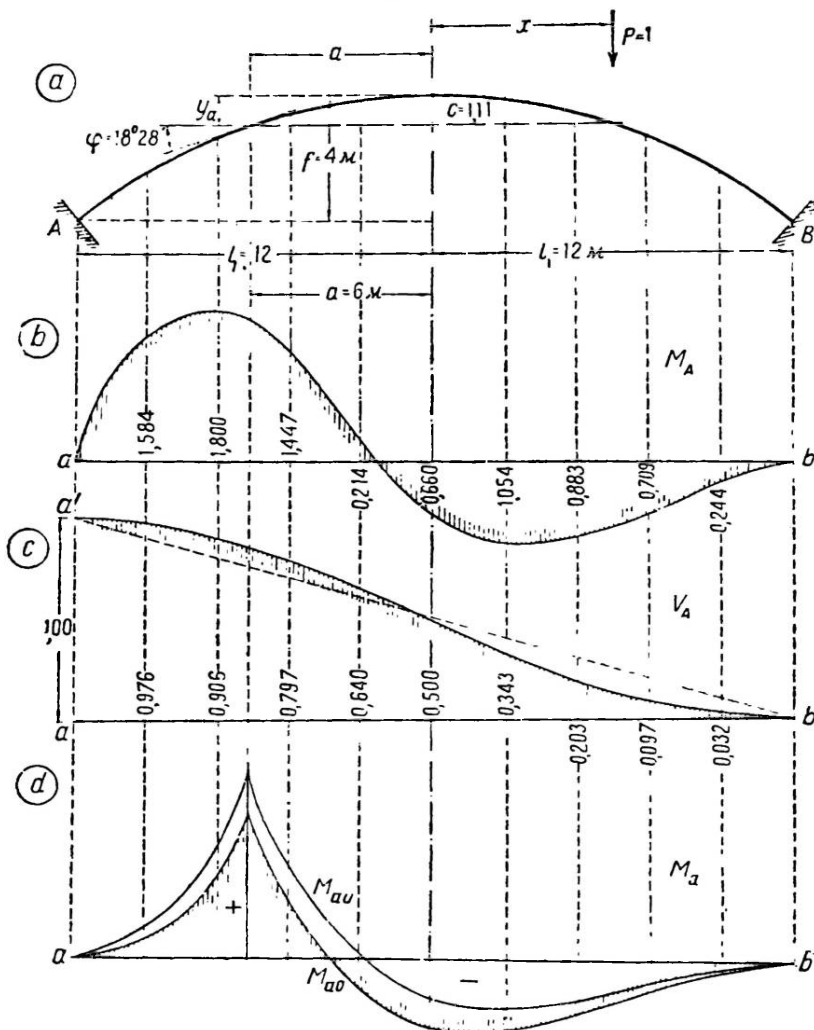
Опорная реакция V_A арки определяется уравнением (черт. 108):

$$V_A = A^0 - \frac{1}{l} 2V.$$

Здесь A^0 — опорная реакция в основной системе от заданной нагрузки.

В соответствии с этим уравнение линии влияния опорной реакции напишется так:

$$V_A = \frac{1}{l} (l - x) - \frac{1}{l} V = \frac{1}{l^2} [6(1 - z) + V].$$



Черт. 117.

В сделанном преобразовании

$$l_1 = \frac{1}{2} l = 12 \text{ и } z = \frac{x}{l_1};$$

Вычисление ординат этой линии влияния сделано в табл. 9, и сама она построена на черт. 117, с.

Таблица 9

Ординаты линий влияния опорного момента и опорной реакции

| z | Линия влияния M_A | | | | Линия влияния V_A | |
|------|---------------------|-------|------------|--------|---------------------|-------|
| | V | U | $-2,89X_1$ | M_A | $6(1-z)+V$ | V_A |
| -1 | 0,000 | 0,000 | -0,000 | 0,000 | 12,00 | 1,00 |
| -0,8 | 0,914 | 1,114 | -0,444 | -1,584 | 11,714 | 0,976 |
| -0,6 | 1,254 | 2,037 | -1,492 | -1,800 | 10,854 | 0,906 |
| -0,4 | 1,164 | 2,735 | -2,452 | -1,447 | 9,664 | 0,797 |
| -0,2 | 0,684 | 3,174 | -3,644 | -1,214 | 7,684 | 0,640 |
| 0 | 0,000 | 3,333 | -3,992 | +0,660 | 6,00 | 0,500 |
| +0,2 | -0,684 | 3,174 | -3,644 | +1,054 | 4,116 | 0,343 |
| +0,4 | -1,164 | 2,735 | -2,452 | +0,883 | 2,436 | 0,203 |
| +0,6 | -1,254 | 2,037 | -1,492 | +0,709 | 1,146 | 0,097 |
| +0,8 | -0,914 | 1,114 | -0,444 | +0,244 | 0,286 | 0,332 |
| +1,0 | 0,000 | 0,000 | 0,00 | 0,00 | 0,000 | 0,00 |

2. Моменты в сечениях арки. 1. Согласно формуле (39) момент в сечении на расстоянии a от середины арки (черт. 117) при положении груза $P=1$ справа от сечения определяется выражением:

$$M = V_A (l_1 - a) + U + V - X_1 (y_a - c).$$

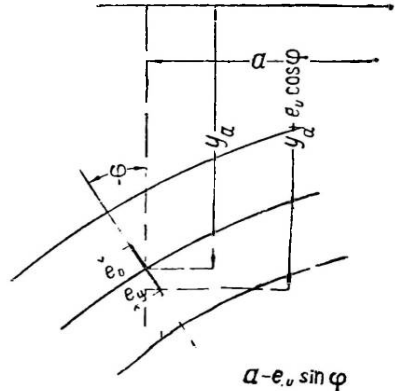
При положении груза $P=1$ слева от сечения:

$$M = V_A (l_1 - a) + U + V - X_1 (y_a - c) - 1 (a - x).$$

В этих выражениях знак при a и x определяется положением сечения справа или слева от оси арки.

На черт. 117 по этим уравнениям построены линии влияния ядровых моментов в сечениях арки. Координаты точек ядровых моментов могут быть определены или непосредственно по чертежу или расчетом. Если расстояния крайних точек ядра сечения от центра тяжести сечения e_0 и e_{au} , а угол наклона сечения к вертикали φ , то координаты ядровых точек будут (черт. 118):

| | |
|-------------------------------------|--|
| верхней: | нижней: |
| $a_0 = a + e_0 \sin \varphi$; | $a_u = a - e_u \sin \varphi$; |
| $y_{a0} = y_a - e_0 \cos \varphi$; | $y_{au} = y_a + e_{au} \cos \varphi$. |



Черт. 118.

Для частного случая сечения с координатами $a=6$ м и $y_a=1,11$ м угол наклона касательной к оси арки $\varphi=18^\circ 28'$.

Соответственно этому координаты точек ядра рассматриваемого сечения будут:

| | | |
|--------------------|-----------------|---------------------|
| для верхней точки: | $a_0 = 6,04$ м, | $y_{a0} = 0,874$ м; |
| для нижней точки: | $a_u = 5,96$ м, | $y_{au} = 1,126$ м. |

Таким образом линия влияния момента относительно верхней точки ядра сечения определяется уравнениями:

при положении груза, равного единице, справа от сечения:

$$M_{a0} = V_A (12 - 6,04) + U + V - X_1 (1,11 - 0,874) = 5,96 V_A + U + V - 0,237 X_1;$$

при положении груза, равного единице, слева от сечения:

$$M_{a0} = 5,96 V_A + U + V - 0,237 X_1 - 1 (x - 6,04).$$

В табл. 10 выписаны величины, входящие в указанную формулу, и по ним произведено вычисление ординат линии влияния M_{a0} .

Контуры линий влияния ядровых моментов M_{a0} и M_{au} показаны на черт. 117.d.

Таблица 10

Ординаты линии влияния ядрового момента M_{a0} при $a = 6$ м
и $y_a = 1,11$ м

| x | $5,96 V_A$ | U | V | $0,237 X_1$ | $X - 6,04$ | M_{a0} |
|-------|------------|---------|---------|-------------|------------|----------|
| + 12 | + 0,000 | - 0,000 | 0 | 0 | — | 0 |
| + 9,6 | + 0,191 | - 1,114 | + 0,914 | - 0,037 | — | - 0,046 |
| + 7,2 | + 0,542 | - 2,037 | + 1,258 | - 0,123 | — | - 0,314 |
| + 4,8 | + 1,210 | - 2,735 | + 1,164 | - 0,220 | — | - 0,581 |
| + 2,4 | + 2,044 | - 3,174 | + 0,684 | - 0,299 | — | - 0,746 |
| 0 | + 2,980 | - 3,332 | 0,00 | - 0,327 | — | - 0,679 |
| - 2,4 | + 3,916 | - 3,174 | - 0,684 | - 0,299 | — | - 0,342 |
| - 4,8 | + 4,762 | - 2,735 | - 1,164 | - 0,220 | — | + 0,631 |
| - 7,2 | + 5,388 | - 2,037 | - 1,258 | - 0,123 | - 1,16 | + 0,803 |
| - 9,6 | + 5,805 | - 1,114 | - 0,914 | - 0,037 | - 3,56 | + 0,176 |
| - 12 | + 5,96 | 0,000 | 0 | 0,0 | - 5,96 | 0 |

§ 26. РАСЧЕТ АРКИ С ОСЬЮ ПРОИЗВОЛЬНОГО ОЧЕРТАНИЯ ПУТЕМ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Если ось арки имеет произвольное очертание или сечение¹, а также если незакономерно изменяется нагрузка, то вычисление в замкнутом виде интегралов, входящих в выражения неизвестных, становится невозможным. В этом случае в расчете таких арок приходится ограничиваться приближенным численным интегрированием. Оно обычно проводится по формуле Симпсона:

$$\int F(x) dx = \frac{\Delta s}{3} [F_0 + 4(F_1 + F_3 + F_5 + \dots) + 2(F_2 + F_4 + F_6 + \dots) + F_n], \quad (80)$$

требующей деления арки на четное число равных частей длиной Δs . Приближенное интегрирование может быть заменено также приближенно простым суммированием. Возможен также переход к расчету по линиям влияния, строящимся по фиктивным упругим грузам (§ 27).

Расчет путем численного интегрирования проводится в следующем порядке.

1) Выбирается основная система и устанавливаются преобразования, обеспечивающие переход к уравнениям с одним неизвестным в каждом.

2) При пользовании формулой Симпсона арка разбивается на четное число равных частей длиной Δs .

При простом суммировании может делаться разбивка оси арки на части разной длины. В частности при изменении момента инерции арки по закону:

$$J = \frac{J_c}{\cos \varphi}$$

можно рекомендовать делить пролет арки на равные части, тогда длина каждой части

$$\Delta s = \frac{\Delta s_0}{\cos \varphi};$$

в этом случае подинтегральные величины

$$\frac{\Delta s}{J} = \frac{\Delta s_0}{J \cos \varphi} = \frac{\Delta s_0}{J_c}$$

будут одинаковыми в каждой части арки.

3) Для каждой выделенной части вычисляются или измеряются величины, входящие под интегралы в выражениях неизвестных и выписываются в последова-

¹ В современных строениях, особенно мостов, этого избегают, но есть много старых сооружений, в которых указанные незакономерности имеют место и которые приходится пересчитывать.

тельном порядке в таблицы (см. ниже табл. 11 и 12); эти таблицы могут быть разбиты любым порядком.

4) Затем составляется аналогичная таблица для вычисления интегралов, содержащих моменты M_p и силы N_p, Q_p от действия нагрузки. Величины M_p, N_p и Q_p вычисляются в последовательном порядке относительно центра тяжести каждой выделенной части (черт. 119):

$$M_{kp} = \sum_0^{x_k} P_i (x_k - a_i) + \sum_0^{x_k} q_x \Delta x b_k,$$

$$N_{kp} = \left(\sum_0^{x_k} P_i + \sum_0^{x_k} q_x \Delta x \right) \sin \varphi_k = R_k \sin \varphi,$$

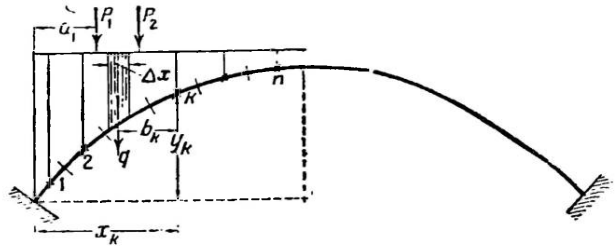
$$Q_{kp} = R_k \cos \varphi.$$

Величины M_k и N_k должны вычисляться с учетом веса клиньев арки.

5) Вычисление интегралов производится по столбцам.

При расчете симметричных арок интегралы, входящие в знаменатели выражений для неизвестных, вычисляются для одной половины и удваиваются.

Интегралы, входящие в числитель неизвестных, часто охватывают несимметричную нагрузку, поэтому они вычисляются для всего свода.



Черт. 119.

6) Полученные указанным вычислением значения интегралов подставляются в выражения для неизвестных и по ним вычисляются сами неизвестные.

7) Зная неизвестные, можно обычным порядком вычислить моменты M и силы N и Q в любом сечении арки, построить по ним эпюры и, если нужно, построить кривую давлений.

При применении описанного приема расчета возникает вопрос о точности его и об обеспечении последней делением арки на достаточное число частей.

Опыт сравнительных подсчетов показал, что точность вычисления знаменателей в выражениях неизвестных обеспечивается до 1% и мало изменяется от увеличения числа клиньев, на которые делится арка. Точность вычисления интегралов, зависящих от сосредоточенных сил, несколько меньше, но вполне достаточна. Это подтверждается сопоставлением данных, полученных из нижеприводимого расчета, с данными точного расчета.

Пример II. Рассмотрим процесс определения неизвестных численным интегрированием для бесшарнирной арки, показанной на черт. 120¹. В качестве основной системы примем два бруса, каждый с одним заделанным концом, по схеме черт. 120. Изменение толщины арки принимаем по закону, выраженному формулой (43), при $l = 1$:

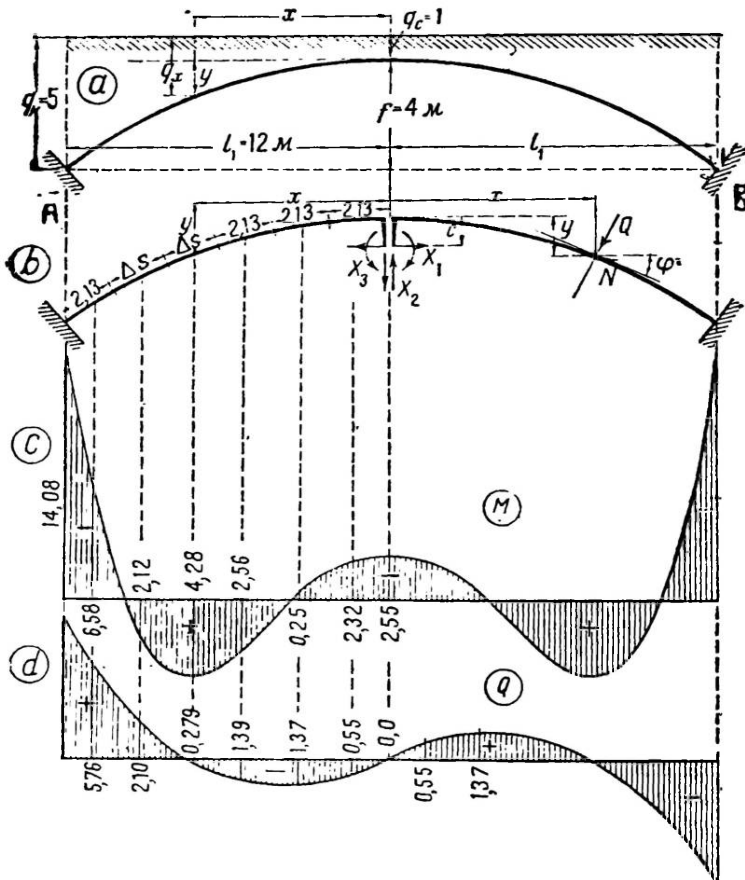
$$J = \frac{J_c}{\cos \varphi}, \quad F = \frac{F_c}{\cos \varphi}.$$

Разбиваем ось арки на 10 равных частей, длиной каждая $\Delta s = 2,13$ м и вычисляем для центров тяжести всех частей координаты, моменты инерции и остальные необходимые для расчета величины, что делаем в табличной форме (табл. 11).

¹ Арка взята с параболической осью для возможности последующего сопоставления данных приближенного и точного расчетов.

Геометрические данные, необходимые для расчета бесшарнирной арки

| | Координаты центров | | $\operatorname{tg} \varphi$ | $\sin \varphi$ | $\cos \varphi$ | φ | $F_c = \frac{F_c}{\cos \varphi}$ | $I_c = \frac{I_c}{\cos \varphi}$ | $\frac{1}{J_x}$ | $\Delta W = \frac{\Delta S}{J_x}$ | $y_{\Delta W}$ |
|-------------------|--------------------|-------|-----------------------------|----------------|----------------|-----------|----------------------------------|----------------------------------|-----------------|-----------------------------------|----------------|
| | x_c | y_c | | | | | | | | | |
| 1 | 1,07 | 0,032 | 0,0594 | 0,0593 | 0,9982 | 3°24' | 0,80 | 0,0427 | 23,39 | 49,8207 | 1,5947 |
| 2 | 3,18 | 0,281 | 0,1766 | 0,1739 | 0,9847 | 10°01' | 0,81 | 0,0433 | 23,08 | 49,1604 | 13,8162 |
| 3 | 5,26 | 0,768 | 0,2921 | 0,2803 | 0,9598 | 16°17' | 0,83 | 0,0444 | 22,48 | 47,81 | 36,72 |
| 4 | 7,28 | 1,472 | 0,4044 | 0,3748 | 0,9270 | 22°01' | 0,86 | 0,0460 | 21,73 | 46,27 | 68,11 |
| 5 | 9,225 | 2,364 | 0,5124 | 0,4560 | 0,8899 | 27°08' | 0,89 | 0,0479 | 20,86 | 44,42 | 105,01 |
| 6 | 11,10 | 3,425 | 0,6166 | 0,5247 | 0,8512 | 31°39' | 0,93 | 0,0501 | 19,95 | 42,50 | 145,56 |
| Σ 279,9811 | | | | | | | | | | | 370,8109 |



Черт. 120.

Вычисляем ординату центра фиктивных упругих сил по формуле (46), заменив интегрирование суммированием:

$$c = \frac{\sum y \frac{\Delta s}{J}}{\sum \frac{\Delta s}{J}} = \frac{\sum y \Delta W}{\sum \Delta W}.$$

Это вычисление проведено в табл. 11¹:

$$c = \frac{370,811}{279,981} = 1,324 \text{ м.}$$

После переноса неизвестных в указанный центр получаем выражения, определяющие их, в следующем виде:

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = -\frac{\sum_0^l M_p (y-c) \Delta W}{2 \sum_0^{l_1} (y-c)^2 \Delta W + 2 \sum_0^{l_1} \frac{1}{F} \cos^2 \varphi \Delta s},$$

$$X_2 = -\frac{\Delta_{2P}}{\delta_{22}} = -\frac{\sum_0^{l_1} M_p x \Delta W}{2 \sum_0^{l_1} x^2 \Delta W} = 0,$$

$$X_3 = -\frac{\Delta_{3P}}{\delta_{33}} = -\frac{\sum_0^l M_p \Delta W}{2 \sum_0^{l_1} \Delta W}.$$

Вычисление величин, входящих в выражения δ_{11} и δ_{22} , выполняем простым суммированием в табл. 12.

$$E \delta_{11} = (388,04 + 6,245 \cdot 2,13) \cdot 2 = 802,70;$$

$$E \delta_{22} = 2 \cdot 13 \cdot 335,4 = 26 \cdot 670,8;$$

$$E \delta_{33} = 2 \cdot 279,98 = 559,96.$$

Таблица 12

Вычисление δ_{11} и δ_{22}

| № п/п | δ_{11} | | | | | | δ_{22} | | |
|----------|---------------|-----------|--------------------|------------------|---------------|----------------------------|---------------|--------|----------------|
| | $(y-c)$ | $(y-c)^2$ | $(y-c)^2 \Delta W$ | $\cos^2 \varphi$ | $\frac{1}{F}$ | $\frac{\cos^2 \varphi}{F}$ | x | x^2 | $x^2 \Delta W$ |
| 0 | 0,0000 | 0,000 | 0,00 | 0,000 | 0,000 | 0,0000 | 0,00 | 0,000 | 0,000 |
| 1 | -1,2923 | 1,6700 | 83,22 | 0,99648 | 1,2478 | 1,243 | 1,07 | 1,14 | 57,24 |
| 2 | -1,0433 | 1,088 | 53,44 | 0,9698 | 1,2352 | 1,197 | 3,18 | 10,11 | 496,51 |
| 3 | -0,5563 | 0,309 | 14,79 | 0,9216 | 1,999 | 1,105 | 5,26 | 27,66 | 1 322,78 |
| 4 | +0,1477 | 0,021 | 1,00 | 0,8594 | 1,588 | 0,995 | 7,28 | 52,99 | 2 452,23 |
| 5 | +1,0397 | 1,081 | 48,01 | 0,7920 | 1,1125 | 0,881 | 9,225 | 85,10 | 3 770,16 |
| 6 | +2,1007 | 4,413 | 187,54 | 0,7747 | 1,0641 | 0,824 | 11,10 | 123,21 | 5 236,42 |
| | | | 388,04 | | | 6,245 | | | 13 335,40 |

Для вычисления числителей в выражениях неизвестных необходимо предварительно вычислить моменты от нагрузки, расположенной на арке. В рассматриваемом случае это легко выполняется по формуле (черт. 120):

$$M^0_q = -\frac{1}{2} q_c x^2 - \frac{1}{12} (q_x - q_c) x^2;$$

в ней:

$$q_c = 1; \quad q_x - q_c = y,$$

¹ В порядке вычисления следовало бы вынести величину Δs как постоянную за знак суммы. Это упростило бы вычисления.

отсюда

$$M_q^0 = -\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{12}y\right)x^2.$$

Вычисление сделано в табл. 13.

Таблица 13

Вычисление моментов числителей в выражениях неизвестных

| № п/п | Момент M_q^0 | | | | | | $\Delta_{1q} = \sum_0^{l_1} M_q^0(y-c)\Delta W$ | | | | $\sum_0^{l_1} M_q^0 \Delta W$ $\Delta_{2q} = \sum_0^{l_1} M_q^0 \Delta W$ |
|----------|----------------|-----------------|-------------------------------|-------|---------|---------|---|---------|-----------------|--------------------|--|
| | y | $-\frac{y}{12}$ | $-\frac{1}{2} + \frac{y}{12}$ | x | x^2 | M_q | ΔW | $(y-c)$ | $(y-c)\Delta W$ | $M_q(y-c)\Delta W$ | |
| 1 | 0,032 | 0,0027 | 0,503 | 1,07 | 1,145 | -0,575 | 49,82 | -1,292 | -64,267 | 37,02 | -28,66 |
| 2 | 0,281 | 0,023 | 0,523 | 3,18 | 10,112 | -5,293 | 48,16 | -1,043 | -51,126 | 272,47 | -260,21 |
| 3 | 0,768 | 0,064 | 0,564 | 5,26 | 27,668 | -15,604 | 47,81 | -0,556 | -26,66 | 415,02 | -746,04 |
| 4 | 1,472 | 0,123 | 0,623 | 7,28 | 52,998 | -32,965 | 46,27 | +0,148 | 6,83 | -225,29 | -1525,31 |
| 5 | 2,364 | 0,197 | 0,696 | 9,225 | 85,008 | -59,315 | 44,42 | +1,040 | 46,20 | -2739,37 | -2634,76 |
| 6 | 3,425 | 0,285 | 0,785 | 11,10 | 123,210 | -96,771 | 42,50 | +2,101 | 88,25 | -8639,72 | -4112,78 |
| Σ | | | | | | | | | | -10880,85 | -9307,75 |

Определяем неизвестные по полученным в табл. 12 и 13 данным:

$$X_1 = -\frac{-2 \cdot 10880,85}{802,35} = 27,12 \text{ м}; \quad X_3 = -\frac{-2 \cdot 9307,75}{559,96} = 33,24 \text{ м.}$$

Переходим к построению эпюр (черт. 120).

Ординаты эпюры моментов в отдельных точках оси арок определяются выражением:

$$M = M_q^0 + X_1(y-c) + X_3 = M_q^0 + 27,12(y-c) + 33,24.$$

Вычисление сделано в табл. 14; сама эпюра построена на черт. 120, с.

Таблица 14

Вычисление ординат эпюр M и Q

| Точка | Ординаты эпюры M | | | | | Ординаты эпюры Q | | | | | |
|-------|--------------------|---------|---------------|-------|--------|--------------------|----------------|----------------------|----------------|--------------------|--------|
| | M_q^0 | $(y-c)$ | $+27,12(y-c)$ | X_3 | M | Q_q^0 | $\cos \varphi$ | $Q_q^0 \cos \varphi$ | $\sin \varphi$ | $X_1 \sin \varphi$ | $-Q$ |
| 0 | 0 | -1,32 | -35,79 | 33,24 | -2,55 | 0 | 1,00 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | -0,58 | -1,29 | -34,98 | 33,24 | -2,32 | 1,080 | 0,998 | 1,078 | 0,059 | 1,605 | -0,55 |
| 2 | -5,29 | -1,04 | -28,20 | 33,24 | -0,25 | 3,478 | 0,985 | 3,42 | 0,174 | 4,797 | -1,37 |
| 3 | -15,66 | -0,556 | -15,08 | 33,24 | +2,56 | 6,606 | 0,954 | 6,34 | 0,280 | 7,734 | -1,39 |
| 4 | -32,97 | +0,148 | 4,01 | 33,24 | +4,28 | 10,853 | 0,927 | 10,06 | 0,375 | 10,34 | -0,279 |
| 5 | -59,32 | +1,040 | 28,20 | 33,24 | +2,12 | 16,494 | 0,890 | 14,68 | 0,456 | 12,58 | +2,10 |
| 6 | -96,76 | +2,10 | 56,95 | 33,24 | -6,58 | 23,772 | 0,851 | 20,23 | 0,525 | 14,47 | +5,76 |
| A, B | -120,00 | +2,68 | 72,65 | 33,24 | -14,08 | | | | | | |

Ординаты эпюры поперечных сил Q определяются по формуле:

$$Q = -(Q_q^0 \cos \varphi - X_1 \sin \varphi).$$

Вычисление сделано в табл. 14; эпюра построена на черт. 120, d. Аналогичным путем может быть построена эпюра N .

Сопоставляя, полученные в настоящем расчете данные с полученными по аналитическому расчету в примере 9, можно отметить следующее.

Несмотря на допущенные упрощения в вычислении сумм, погрешность в величине координаты центра фиктивных упругих грузов составляет всего

$$\frac{1,33 - 1,32}{1,33} \cdot 100 = -0,7\%; \text{ погрешность в величине распора не превосходит}$$

$$\frac{27,29 - 27,12}{27,29} \cdot 100 = 0,6\%.$$

Разница между ординатами эпюр моментов, показанных на черт. 120 и 115: в ключевом сечении

$$\frac{2,74 - 2,55}{2,74} \cdot 100 = -7\%$$

в пятовом сечении

$$\frac{14,08 - 13,05}{13,05} \cdot 100 = +7,5\%$$

Незначительные расхождения, полученные при расчете путем численного интегрирования, позволяют считать этот способ достаточно точным и приемлемым для расчетов арок с незакономерной осью.

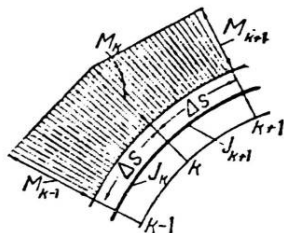
Точность расчета мало нарушается при делении арки на небольшое сравнительно число клинцев.

Вместе с тем полученные результаты показывают, что небольшая погрешность в вычислении распора (0,6%) влечет за собой значительное нарастание ошибки в моментах в ключевом и опорных сечениях.

§ 27. РАСЧЕТ АРКИ С ОСЬЮ ПРОИЗВОЛЬНОГО ОЧЕРТАНИЯ ПРИ ПОМОЩИ ЛИНИЙ ВЛИЯНИЯ

Как известно (§ 14), линия влияния лишнего неизвестного в статически неопределимой системе получается из эпюры прогиба, вызываемого действием на систему единичного воздействия, приложенного по направлению рассматриваемого неизвестного. Эпюра же прогибов может быть построена как эпюра моментов от фиктивных упругих грузов в фиктивной балке (ч. I, § 94). Используем этот прием для построения линий влияния неизвестных в бешарнирной арке с осью произвольного очертания.

Напомним прежде всего, что фиктивные упругие грузы в системах со сплошным сечением определяются по формуле (ч. I, § 96) (черт. 121):



Черт. 121.

$$EW_k = -\frac{\Delta s}{6} \left[\frac{M_{k-1}}{J_k} + 2M_k \left(\frac{1}{J_k} + \frac{1}{J_{k+1}} \right) + \frac{M_{k+1}}{J_{k+1}} \right] + \left(\frac{N_k \operatorname{tg} \varphi_k}{F_k} - \frac{N_{k+1} \operatorname{tg} \varphi_{k+1}}{F_{k+1}} \right). \quad (81)$$

В ней первые три члена определяют влияние моментов в сечениях балки, два последние — влияние продольных сил.

Так как мы установили (§ 21), что влиянием продольных сил в числителях выражений для неизвестных можно пренебречь, то в последующем расчете мы можем отказаться от последних двух членов в формуле (81) и вычислять фиктивные упругие грузы по формуле:

$$EW_k = -\frac{\Delta s}{6} \left\{ \frac{M_{k-1}}{J_k} + 2M_k \left(\frac{1}{J_k} + \frac{1}{J_{k+1}} \right) + \frac{M_{k+1}}{J_{k+1}} \right\}. \quad (82)$$

Перейдем теперь к рассмотрению процесса вычисления фиктивных упругих грузов для построения эпюр прогибов в арке и приведения последних к виду линий влияния неизвестных.

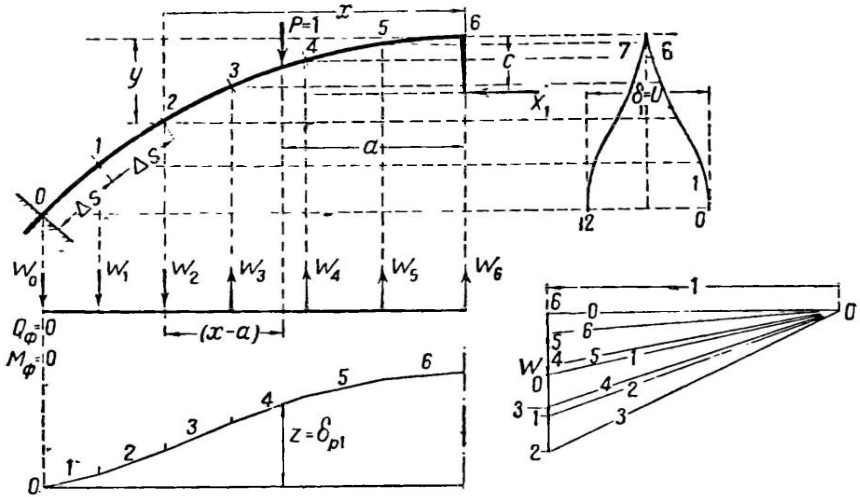
Разрежем арку по оси симметрии и примем в качестве основной системы для ее расчета два бруса, каждый с одним заделанным концом; такого вида основная система облегчает вычисление статических моментов от фиктивных грузов, так как у заделанного конца бруса фиктивная поперечная сила и фиктивный поперечный момент равны нулю.

С переносом неизвестных в центр фиктивных упругих грузов величины неизвестных определяются отношениями:

$$X_1 = -\frac{\delta_{p1}}{\delta_{11}}; \quad X_2 = -\frac{\delta_{p2}}{\delta_{22}}; \quad X_3 = -\frac{\delta_{p3}}{\delta_{33}}.$$

Неизвестное X_1 (распор). Для построения линии влияния неизвестного X_1 рассматриваем арку под действием сил $\bar{X}_1 = 1$ (черт. 122). При действии этих сил момент в любом сечении арки равен $1(y-c)$. В соответствии с этим формула (82) упругого груза приведет к виду:

$$EW_{k1} = -\frac{\Delta s}{6} \left[\frac{y_{k-1}-c}{J_k} + 2(y_k-c) \left(\frac{1}{J_k} + \frac{1}{J_{k+1}} \right) + \frac{y_{k+1}-c}{J_{k+1}} \right]. \quad (83)$$



Черт. 122.

Если $y > c$, фиктивные упругие грузы отрицательны и направлены книзу, если $y < c$, они положительны и направлены вверх (черт. 122).

Перемещение δ_{p1} представляет собой прогиб под точкой приложения груза $P_1 = 1$ и определяется как сумма статических моментов фиктивных грузов относительно проекции силы P на фиктивную балку (ч. I, § 94).

Если точки приложения фиктивных грузов, начиная от левой опоры и до положения груза $P=1$, перенумеровать, обозначив через $0, 1, 2, \dots, m$, то:

$$\delta_{p1} = \sum_{k=0}^{k=m} (x_k - a) W_{k1}.$$

Перемещение δ_{11} напишется так:

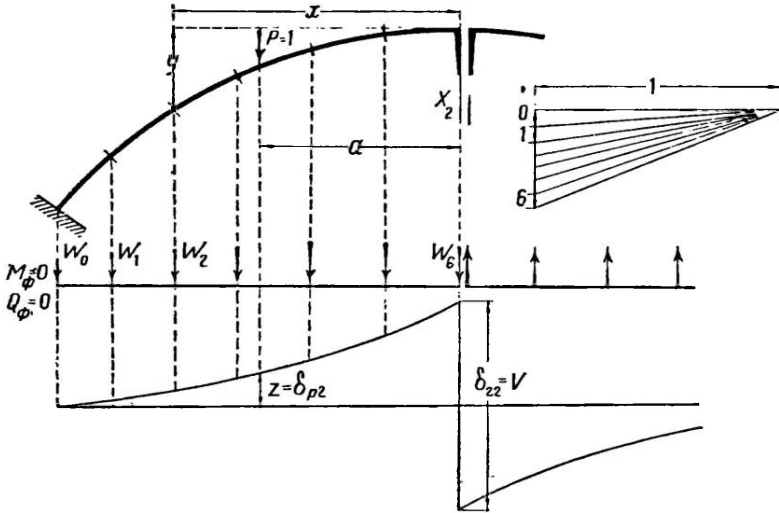
$$\delta_{11} = \sum_{k=0}^{k=n} (y-c) W_{k1} + 2 \sum_0^{\frac{1}{2}l} \cos^2 \varphi \frac{\Delta s}{F}.$$

В этом выражении: первый член представляет собой статический момент тех же упругих грузов относительно линии направления неизвестного в нем, n означает число всех фиктивных грузов на всем протяжении пролета арки; второй член введен для учета влияния продольных сил в знаменателе распора. Учет влияния этих сил можно было бы сделать при помощи последних членов формулы (81) для упругого груза, но это сложнее.

Таким образом ординаты линии влияния распора будут определяться выражением:

$$X_1 = - \frac{\sum_0^m (x_k - a) W_{k1}}{\sum_0^n (y - c) W_{k1} + \sum_0^l \cos^2 \varphi \frac{\Delta s}{F}} \quad (84)$$

Аналитическое вычисление ординат может быть заменено графическим построением при помощи веревочного многоугольника (черт. 122). Таких веревочных многоугольников надо построить два: один для определения вертикальных



Черт. 123.

перемещений z под грузом, другой для определения перемещения δ_{11} по направлению силы $X_1 = 1$. Переход от эпюр перемещений к линиям влияния должен быть сделан с учетом масштаба k чертежа и масштаба силового многоугольника (ч. I, § 95), т. е. ординаты перемещения должны быть помножены на величину $\frac{1}{m} = kH$.

Таким образом при графическом построении ординаты линий влияния неизвестного X_1 определяются по формуле:

$$X_1 = \frac{z \frac{1}{m}}{u \frac{1}{m} + \sum_0^l \cos^2 \varphi \frac{ds}{F}} = \frac{z}{u + m \sum_0^l \cos^2 \varphi \frac{ds}{F}}$$

Второй член в знаменателе вычисляется аналитически.

Неизвестное X_2 . Для построения линии влияния этого неизвестного рассматриваем арку под действием сил $\bar{X}_2 = 1$ (черт. 123). Сила X_2 направлена в левой половине арки кверху, в правой — книзу.

Формула для фиктивного упругого груза W_{k2} для правой половины арки напишется так:

$$EW_{k2} = + \frac{\Delta s}{6} \left[\frac{x_{k-1}}{J_k} + 2x_k \left(\frac{1}{J_k} + \frac{1}{J_{k+1}} \right) + \frac{x_{k+1}}{J_{k+1}} \right] \quad (85)$$

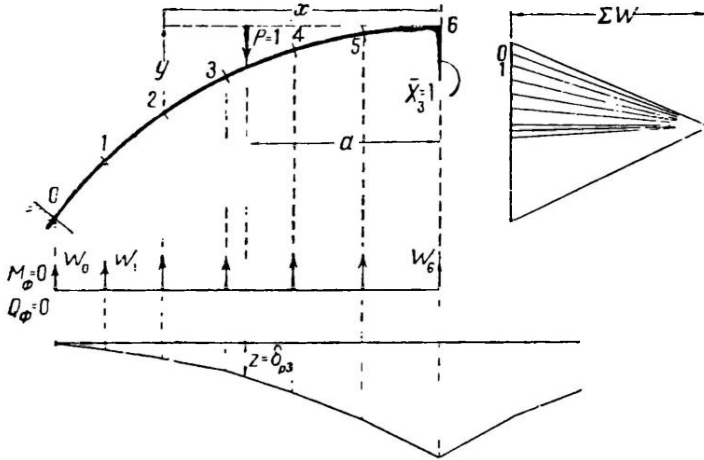
Формула для фиктивных грузов в левой половине арки будет отличаться только знаком.

Соответственно этому перемещения δ_{p2} и δ_{22} определяются по формулам:

$$\delta_{p2} = - \sum_{k=0}^{k=m} (x_k - a) W_{k2}$$

$$\delta_{22} = \sum_{k=0}^{k=n} x W_{k2}$$

как сумма статических моментов фиктивных упругих грузов относительно проекции точки приложения груза $P=1$ на фиктивную балку и относительно линии направления самого неизвестного.



Черт. 124.

Ординаты линии влияния равны:

$$X_2 = - \frac{\sum_{k=0}^{k=m} (x_k - a) W_{k2}}{\sum_{k=0}^{k=n} x W_{k2}}. \quad (86)$$

При графическом построении посредством веревочного многоугольника (черт. 123) ординаты линий влияния определяются выражением:

$$X_2 = \frac{z}{v}.$$

Здесь v представляет собой статический момент фиктивных упругих сил относительно оси по направлению неизвестного.

Масштабный множитель $\frac{1}{m}$ в этом случае сокращается.

Неизвестное X_3 (момент). Для построения линии влияния этого неизвестного прикладываем к арке моменты $\bar{X}_3=1$ (черт. 124). В левой половине арки момент X_3 принят направленным по ходу часовой стрелки, в правой — обратно.

Формула упругого груза для обеих половинок арки напишется так:

$$E W_{k2} = \frac{\Delta s}{6} \left[\frac{1}{J_k} + 2 \left(\frac{1}{J_k} + \frac{1}{J_{k+1}} \right) + \frac{1}{J_k} \right]. \quad (87)$$

Перемещения δ_{p3} и δ_{33} определяются по формулам:

$$\delta_{p3} = \sum_{k=0}^{k=m} (x_k - a) W_{k3},$$

$$\delta_{33} = \sum_{k=0}^{k=n} W_{k3}.$$

Из них первая представляет собой статический момент фиктивных упругих грузов относительно вертикали, проходящей через точку приложения груза $P=1$, вторая — равнодействующая тех же грузов.

Ординаты линии влияния определяются выражением:

$$X_3 = - \frac{\sum_{k=0}^{k=m} (x_k - a) W_{k3}}{\sum_{k=0}^{k=n} W_{k3}}. \quad (88)$$

В графическом построении этой линии влияния (черт. 124) можно рекомендовать принимать полюсное расстояние $H = \sum W$, и тогда ординаты z веревочного многоугольника будут определять ординаты линии влияния в масштабе чертежа.

После того как будут построены линии влияния лишних неизвестных, построение линии влияния моментов и усилий в сечениях арки проводится в обычном порядке.

Опыт показывает, что приведенные выше формулы фиктивных упругих грузов могут быть заменены упрощенными. Это упрощение заключается в том, что фиктивные упругие грузы вычисляются для сечений, относящихся к центру тяжести каждой из частей арки:

$$\text{для } X_1 \quad W_{k1} = - (y_k - c) \frac{\Delta S}{J_k}; \quad (89)$$

$$\text{для } X_2 \quad W_{k2} = - x_k \frac{\Delta S}{J_k}; \quad (90)$$

$$\text{для } X_3 \quad W_{k3} = - \frac{\Delta S}{J_k}. \quad (91)$$

Это облегчает вычисление и не нарушает точности расчета, как это показано в нижеприводимом примере. Такое упрощение может быть допущено в тех случаях, когда не имеет места большое нарастание эпюры моментов в пределах выделенных частей арки.

Неизвестные и ординаты их линий влияния определяются в том же порядке, как это было показано выше, по формулам:

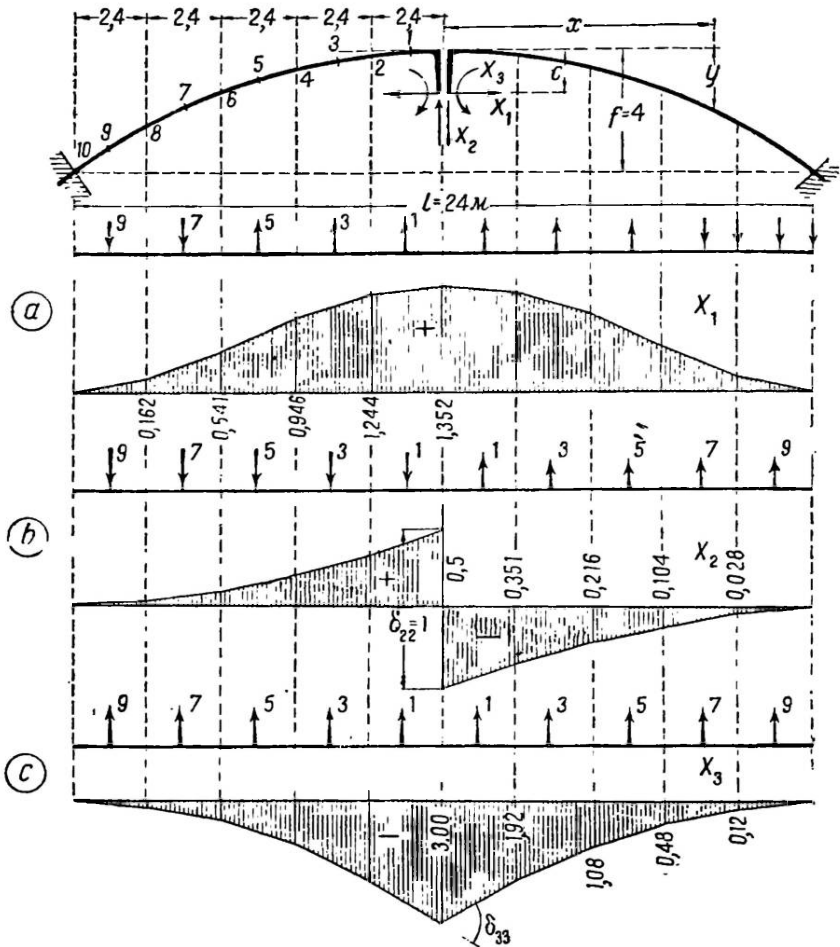
$$X_1 = - \frac{\delta p_1}{\delta 11} = - \frac{\sum_{k=0}^{k=m} (x_k - a) W_{k1}}{\sum_{k=0}^{k=n} (y_k - c) W_{k1} + \int_s \cos^2 \varphi \frac{dS}{F}};$$

$$X_2 = - \frac{\delta p_2}{\delta 22} = - \frac{\sum_{k=0}^{k=m} (x_k - a) W_{k2}}{\sum_{k=0}^{k=n} x_k W_{k2}};$$

$$X_3 = - \frac{\delta p_3}{\delta 33} = - \frac{\sum_{k=0}^{k=m} (x_k - a) W_{k3}}{\sum_{k=0}^{k=n} W_{k3}}.$$

Пример 12. Рассмотрим построение линии влияния лишних неизвестных при помощи фиктивных упругих грузов для параболической арки (черт. 116).

(Выбор этой арки для расчета позволит нам сопоставить результаты, полученные этим способом, с результатами, полученными точным способом в примере 10).



Черт. 125.

Основную систему примем в виде двух брусьев, заделанных каждый одним концом (черт. 125).

Примем закон изменения момента инерции к площади сечения арки в виде:

$$J = \frac{J_c}{\cos \varphi}; \quad F = \frac{F_c}{\cos \varphi}.$$

Принятие этого закона приводит к тому, что все отношения $\frac{ds}{J}$ и $\frac{ds}{F}$, входящие в подынтегральные выражения, приводятся к постоянной величине:

$$\frac{ds}{J} = \frac{ds \cos \varphi}{J_c} = \frac{dx}{J_c} = W; \quad \frac{ds}{F} = \frac{ds \cos \varphi}{F_c} = \frac{dx}{F_c}.$$

Основываясь на этом, целесообразно разделить на равные части Δx не ось арки, а ее пролет; это дальше и сделано:

$$\Delta x = \frac{1}{10} \cdot 24 \text{ м} = 2,4 \text{ м}.$$

В последующем расчете величины $W = \frac{\Delta x}{J_c}$ и $\frac{\Delta x}{F_c}$ не включены в числовые расчеты и рассматриваются как конечные масштабные множители.

В табл. 15 выписаны значения координат и углы наклона касательных, отнесенные к центрам тяжести выделенных частей арки.

Положение точки переноса начала координат определяем по формуле:

$$c = \frac{\sum_0^n y_k W}{\sum_0^n W} = \frac{\sum_0^n y_k}{5};$$

в ней постоянная величина W вынесена за знак суммы и сокращена. Вычисление выполняем двумя способами: 1) по ординатам, относящимся к центрам тяжести выделенных частей, и 2) по ординатам, относящимся к концам выделенных частей (табл. 15).

Таблица 15

Вычисление ординат линии влияния распора по упрощенной формуле (89)

| № точек и фiktивных грузов | $z = \frac{x}{l_1}$ | y | $-(y-c) = \frac{J_c}{\Delta x} W_{kl} = W_{kl}'$ | $\text{tg } \varphi = \frac{8x}{l_1^2}$ | $\cos \varphi$ | $\sin \varphi$ | $\cos^2 \varphi$ | $(y-c)^2$ | $\frac{1}{135} \frac{\partial p_1}{\partial l_1}$ | |
|----------------------------|---------------------|------|--|---|----------------|----------------|------------------|-----------|---|-------------------------------------|
| | | | | | | | | | $\frac{\partial p_1}{\partial l_1}$ | $\frac{\partial p_1}{\partial l_1}$ |
| 0 | 0 | 0 | +1,32 | | | | | | -8,00 | 1,352 |
| 1 | 0,1 | 0,04 | +1,28 | 0,0666 | 0,998 | 0,0668 | 0,996 | 1,638 | -7,36 | 1,244 |
| 2 | 0,2 | 0,16 | +1,16 | 0,20 | 0,981 | 0,1965 | 0,962 | 0,922 | -5,60 | 0,946 |
| 3 | 0,3 | 0,36 | +0,95 | 0,3333 | 0,9485 | 0,313 | 0,899 | 0,102 | -3,20 | 0,541 |
| 4 | 0,4 | 0,64 | +0,68 | 0,4667 | 0,906 | 0,424 | 0,821 | 0,410 | -0,96 | 0,162 |
| 5 | 0,5 | 1,00 | +0,32 | 0,60 | 0,857 | 0,515 | 0,734 | 0,3686 | 0 | 0 |
| 6 | 0,6 | 1,44 | -0,12 | | | | | | | |
| 7 | 0,7 | 1,96 | -0,64 | | | | | | | |
| 8 | 0,8 | 2,56 | -1,24 | | | | | | | |
| 9 | 0,9 | 3,24 | -1,92 | | | | | | | |
| 10 | 1,0 | 4,00 | -2,68 | | | | | | | |
| $\Sigma =$ | | | | | | | | 4,412 | 6,858 | |

$$1) \quad c = \frac{1}{5} (0,04 + 0,36 + 1,00 + 1,96 + 3,24) = 1,32 \text{ м};$$

$$2) \quad c = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2} \cdot 0 + 0,16 + 0,64 + 1,44 + 2,56 + \frac{1}{2} \cdot 4 \right) = 1,36 \text{ м}.$$

Оказывается, что вычисление по первому способу дает результат, более близкий к точному расчету, по которому $c = 1,33 \text{ м}$. Принимаем $c = 1,32 \text{ м}$.

Линия влияния распора X_1 (черт. 125, а)

Ординаты линии влияния распора определяем по формуле:

$$X_1 = -\frac{\partial p_1}{\partial l_1} = -\frac{\sum_0^m (x_k - a) W_{kl}}{\sum_0^n (y - c) W_{kl} + 2 \frac{\Delta x}{F_c} \int_0^{l_1} \cos^2 \varphi}$$

Здесь W_{kl} — фiktивный упругий груз, величина которого может быть вычислена по формуле (83) или по упрощенной формуле (89).

В целях выяснения возможности применения упрощенной формулы (89) ординаты линии влияния распора определены по обеим формулам упругого груза.

1) В табл. 16 проведено вычисление ординат линии влияния распора с определением упругого груза по формуле:

$$W_{kl} = -\frac{\Delta x}{6J_c} (y_{k-1} + 4y_k + y_{k+1}).$$

Таблица 16

Вычисление ординат линии влияния распора по сложной формуле (83)

| № точек и фиктивного груза | $y_{k-1} - c$ | $y_k - c$ | $y_{k+1} - c$ | $\frac{J_c}{\Delta x} W_{kl} = W_{kl}'$ | $W_{kl}' (y_1 - c)$ | $\frac{1}{135} \delta_{2l}$ | $-\frac{\delta_{2l}}{\delta_{11}}$ |
|----------------------------|---------------|-----------|---------------|---|---------------------|-----------------------------|------------------------------------|
| 0 | -1,16 | -1,32 | 0 | +0,633 | 0,835 | -8,830 | 1,438 |
| 2 | -0,68 | -1,16 | -1,32 | +1,107 | 1,284 | -7,998 | 1,304 |
| 4 | -0,12 | -0,68 | -1,16 | +0,657 | 0,453 | -6,0519 | 0,988 |
| 6 | +1,24 | +0,12 | -0,68 | -0,173 | 0,021 | -3,493 | 0,568 |
| 8 | +2,68 | +1,24 | +0,12 | -1,293 | 1,606 | -1,10 | 0,179 |
| 10 | 0 | +2,68 | +1,24 | -1,10 | 2,949 | 0 | |
| | | | | | $\Sigma 7,142$ | | |

Знаменатель δ_{11} определяется величиной:

$$\delta_{11} = 2 \frac{\Delta x}{J_c} \cdot 7,142 + 2 \frac{\Delta x}{F_c} \cdot 4,412;$$

здесь 4,412 представляет $\Sigma \cos^2 \varphi$ (табл. 15).

$$\frac{\Delta x}{J_c} = \frac{24 \cdot 12}{0,8^3} = 56,25; \quad \frac{\Delta x}{F} = \frac{2,4}{0,8} = 3;$$

$$\delta_{11} = 2 \cdot 56,25 \cdot 7,142 + 2 \cdot 3 \cdot 4,412 = 829,95.$$

Числитель δ_{2l} определяется суммой статических моментов упругих сил, лежащих в левой половине арки слева от рассматриваемой точки. Например момент относительно четвертой точки ($m = 4$) равен:

$$\delta_{2l} = -\frac{\Delta x}{J_c} (W''_{10,1} \cdot 3\Delta x + W'_{8,1} \cdot 2\Delta x + W'_{6,1} \cdot \Delta x) = -135 (3W''_{10,1} + 2W'_{8,1} + W'_{6,1}).$$

Вообще:

$$\delta_{2l} = -135 \sum_{k=10}^{k=10-m} \frac{k-m}{2} W'_{kl};$$

здесь m — номер точки, а k — номер фиктивного груза, начиная от левой опоры.

Ординаты линии влияния определяются отношениями:

$$-\frac{\delta_{2l}}{\delta_{11}} = \frac{135 \sum_{k=10}^{k=10-m} \frac{k-m}{2} W'_{kl}}{829,95} = 0,163 \sum_{k=10}^{k=10-m} \frac{(k-m)}{2} W'_{kl}.$$

Величины их выписаны в табл. 16.

2) В табл. 15 проведено вычисление ординат линии влияния распора по упрощенной формуле упругого груза:

$$W_{kl} = -\frac{\Delta x}{J_c} (y_k - c).$$

Вычисление сделано без учета постоянных множителей:

$$\frac{\Delta x}{J_c} \quad \text{и} \quad \frac{\Delta x}{F_c}.$$

Знаменатель δ_{11} определяется по этим данным величиной:

$$\delta_{11} = 2 \frac{\Delta x}{J_c} 6,858 + 2 \frac{\Delta x}{F_c} 4,412 = 2 [56,25 \cdot 6,858 + 3 \cdot 4,412] = 798.$$

Числитель δ_{p1} определяется суммой статических моментов этих грузов; вычисление их сделано относительно точек раздела клиньев, что удобно для проведения сравнения результатов с предыдущим случаем. Например момент относительно четвертой точки арки ($m=4$) напишется так:

$$\delta_{p1} = -\frac{\Delta x}{J_c} (W_{9,1} \cdot 2,5 \Delta x + W_{7,1} \cdot 1,5 \Delta x - W_{5,1} \cdot 0,5 \Delta x) = -135 (2,5 W_{9,1} + 1,5 W_{7,1} - 0,5 W_{5,1}).$$

Вообще:

$$\delta_{p1} = -135 \sum_{k=9}^{k=9-m} \frac{k-m}{2} W_{k1}.$$

Ординаты линии влияния определяются отношениями:

$$-\frac{\delta_{p1}}{\delta_{11}} = \frac{135}{798} \sum_{k=9}^{k=9-m} \frac{k-m}{2} W_{k1} = 0,169 \sum_{k=9}^{k=9-m} \frac{k-m}{2} W_{k1}.$$

Величины их выписаны в табл. 15. Контур линии влияния показан на черт. 125, а. Сопоставление результатов вычисления ординат линии влияния по обоим видам фиктивных упругих газов с точными значениями тех же ординат, полученными в примере 10, дано в табл. 17.

Таблица 17

Сопоставление ординат линии влияния распора по формулам (83), (89) и точному расчету

| Номера ординат | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|-------|-------|-------|-------|-------|
| Величина ординат: | | | | | | |
| По точному расчету . . . | 0 | 0,176 | 0,555 | 0,956 | 1,256 | 1,354 |
| По сложной формуле упругого груза | 0 | 0,179 | 0,568 | 0,988 | 1,304 | 1,408 |
| По упрощенной формуле упругого груза | 0 | 0,162 | 0,541 | 0,946 | 1,244 | 1,352 |

Как видно из табл. 17, расчет по упрощенной формуле упругих грузов дал результаты более близкие к точным, чем расчет по сложной формуле.

Переходим к вычислению ординат линии влияния поперечной силы (неизвестное X_2) и проводим его по упрощенной формуле (90) (черт. 125):

$$X_2 = -\frac{\delta_{p2}}{\delta_{22}} = -\frac{\sum_{k=9}^{k=9-m} (x_k - a) W_{k2}}{\sum_{k=9}^{k=9-m} x_k^2 W_{k2}}.$$

Вычисление слагаемых, входящих в эти суммы, дано в табл. 18.

Числитель δ_{p2} вычисляется, как сумма статических моментов относительно отдельных точек по разделам клиньев. Например для точки $m=4$ статический момент напишется так:

$$\delta_{p2} = - (W_{9,2} \cdot 2,5 \Delta x + W_{7,2} \cdot 1,5 \Delta x + W_{5,2} \cdot 0,5 \Delta x) = -2,4 (2,5 x_9 + 1,5 x_7 + 0,5 x_5).$$

Вообще:

$$\delta_{p2} = - \sum_{k=9}^{k=9-m} \frac{k-m}{2} \cdot W_{k2}.$$

Вычисление сделано в табл. 18. В той же таблице вычислены ординаты линии влияния по отношению:

$$-\frac{\delta_{2p}}{\delta_{22}} = -\frac{2,4 \frac{1}{2,4} \delta_{2p}}{2 \cdot 237,6} = -0,00505 \frac{1}{2,4} \delta_{2p}.$$

Контур линии влияния X_2 показан на черт. 125, б.

Сопоставление полученных результатов с результатами точного расчета в примере 10 показывает почти полное их совпадение.

Вычисление ординат линии влияния неизвестных X_2 и X_3

| № точек и фигурных грузов | Линия влияния X_2 | | | | по точному расчету | Линия влияния X_3 | | |
|---------------------------------|---|-----------------|-----------------------------|--------------------------------------|-----------------------|---|-----------------------------|--------------------------------------|
| | $x = \frac{J}{\Delta x} W_{k2} = W_{k2}'$ | x^2 | $\frac{1}{2,4} \delta_{p2}$ | $-\frac{\delta_{p2}^2}{\delta_{22}}$ | | $\frac{J_c}{\Delta x} \cdot W_{k3} = W_{k3}'$ | $\frac{1}{2,4} \delta_{p3}$ | $-\frac{\delta_{p3}^2}{\delta_{33}}$ |
| 0 | 0 | 0 | -99,0 | 0,5 | 0,5 | 0 | 12,5 | -3,00 |
| 1 | -1,2 | 1,44 | -69,6 | 0,35 | 0,351 | 1 | 8,0 | -1,92 |
| 3 | -3,6 | 12,96 | -42,6 | 0,215 | 0,216 | 1 | 4,5 | -1,08 |
| 5 | -6,0 | 36,00 | -20,4 | 0,10 | 0,104 | 1 | 2,0 | -0,48 |
| 7 | -8,4 | 70,56 | -5,4 | 0,027 | 0,028 | 1 | 0,5 | -0,12 |
| 9 | -10,8 | 116,64 | | | | 1 | | |
| | | Σ 237,60 | | | | | | |

Переходим к вычислению ординат линии влияния неизвестного X_3 (момента); проводим это вычисление по упрощенной формуле (черт. 125, с):

$$X_3 = -\frac{\delta_{p3}}{\delta_{33}} = -\frac{\frac{J_c}{J_c} \sum_{k=9-m}^9 (x_k - a)}{\frac{\Delta x}{J_c} \cdot 2 \cdot 5} = -0,1 \sum_0^{k=9-m} (x_k - a).$$

Сумма, входящая в эту формулу, вычисляется как сумма статических моментов упругих грузов. Например для четвертой точки раздела арки:

$$\sum (x_k - a) = (2,5 \Delta x + 1,5 \Delta x + 0,5 \Delta x) = \Delta x (2,5 + 1,5 + 0,5).$$

Вычисление сделано в табл. 18. В этой же таблице вычислены ординаты линии влияния:

$$-\frac{\delta_{p3}}{\delta_{33}} = -0,1 \cdot 2,4 \left(\frac{1}{2,4} \delta_{p3} \right) = -0,24 \left(\frac{1}{2,4} \delta_{p3} \right).$$

Сопоставление величин ординат линии влияния, вычисленных по упругим грузам, с полученными из аналитического расчета (пример 10) показывает:

1) что получается достаточная точность расчета даже при делении оси арки на небольшое число частей (10 частей по длине арки) и 2) что вычисление упругих грузов по упрощенной формуле дает достаточно точный расчет.

Отсюда следует, что если арка с незаконномерной осью загружается сосредоточенными грузами (в виде колонн и т. п.), то расчет ее по линиям влияния, построенным по упругим грузам, обеспечивает вполне достаточную точность.

§ 26. ВЛИЯНИЕ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ИЗМЕНЕНИЙ И УСАДКИ БЕТОНА

Вопрос об определении усилий, появляющихся в бесшарнирной арке при изменении температуры, связан с необходимостью знать температуру внешних и внутренних точек в каждом сечении арки, что невозможно, поэтому задачу упрощают и задаются некоторыми средними величинами, одинаковыми для всей арки.

Примем среднюю температуру нагрева оси арки равной $+t^\circ$ и разницу температур крайних волокон ее сечения $\Delta t^\circ = t_2^\circ - t_1^\circ$.

Канонические уравнения, служащие для определения лишних неизвестных в основной системе, показанной на черт. 126, напишутся так:

$$X_{1t} \delta_{11} + \Delta_{1t} = 0; \quad X_{3t} \delta_{3t} + \Delta_{3t} = 0; \quad X_{2t} = 0.$$

Входящие в них величины Δ_{1t} и Δ_{3t} определяются выражениями [см. выше, § 7, п. 1, формула (12)]:

$$\Delta_{1t} = \alpha \Delta t^\circ \int_0^s (y - c) \frac{ds}{h} + \alpha t^\circ \int_0^s \cos \varphi ds; \quad \Delta_{3t} = \alpha \Delta t^\circ \int_0^s \frac{ds}{h}.$$

Здесь h — высота сечения a , α — коэффициент линейного расширения.

Соответственно этому величины лишних неизвестных определяются выражениями (черт. 126):

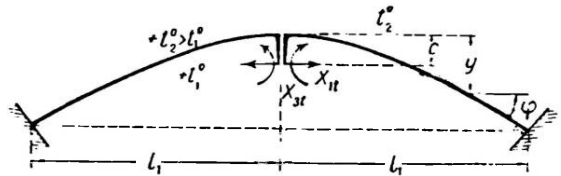
$$X_{1t} = -\frac{\Delta_{1t}}{\delta_{11}} = -\frac{\alpha \Delta t^{\circ} \int_s (y-c) \frac{ds}{h} + \alpha t^{\circ} \int_s \cos \varphi ds}{\int_s (y-c)^2 \frac{ds}{EJ} + \int_s \cos^2 \varphi \frac{ds}{EJ}},$$

$$X_{3t} = -\frac{\Delta_{3t}}{\delta_{33}} = -\frac{\alpha \Delta t^{\circ} \int_s \frac{ds}{h}}{\int_s \frac{ds}{EJ}}.$$

Применяя эти формулы к арке с параболической осью, для которой

$$y = \frac{4f}{f^2} x^2 \text{ и } c = \frac{1}{3} f,$$

и задавшись законом изменения ее сечения:



Черт. 126.

$$J = \frac{J_c}{\cos \varphi} \text{ и } h = \frac{h_c}{\cos \varphi},$$

получим:

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= \frac{\alpha t^{\circ} l}{(1 + \nu) \frac{4}{45} \frac{f^2 l}{EJ_c}} = \frac{45 \alpha t^{\circ} EJ_c}{4(1 + \nu) f^2}, \\ X_3 &= -\frac{1}{h_c} \alpha \Delta t^{\circ} EJ_c. \end{aligned} \right\} \quad (92)$$

Из полученных выражений для распора видно, что влияние температуры тем больше, чем выше арка и чем жестче ее сечение. Уменьшение высоты сечения арки и выбор материала с меньшим модулем упругости E ставит арку в более благоприятное положение в отношении температурных напряжений.

Из тех же формул можно видеть, что величина распора очень мало зависит от контура оси арки, что позволяет применять формулу (92) для определения температурного распора в арках с очертанием по любой кривой.

Действие равномерного нагрева вызывает опорные моменты (черт. 126):

$$M_{At} = X_{3t} + X_{1t}(f - c). \quad (93)$$

Влияние усадки бетона. Выведенные выше формулы (92) для определения распора и момента от изменения температуры могут быть использованы для определения влияния усадки бетона в бетонных и железобетонных арках. Теоретически усадка бетона принимается равной 0,00025; с отнесением ее к коэффициенту линейного расширения $\alpha = -10^{-5}$ получим, что влияние усадки соответствует понижению температуры на

$$t^{\circ} = \frac{0,00025}{0,00001} = 25^{\circ}.$$

Получаемый при учете такой усадки результат является несколько преувеличенным, так как в действительности арки бетонируются не сразу, а секциями. Основываясь на этом, на практике принимают для учета усадки снижение температуры на 10—15°.

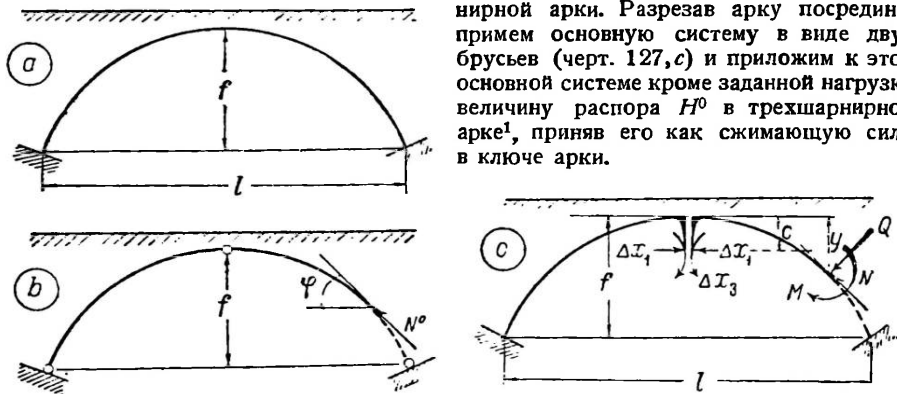
§ 29. ВЛИЯНИЯ ОБЖАТИЯ В АРКАХ С РАЦИОНАЛЬНОЙ ОСЬЮ

Если ось бесшарнирной арки совпадает с рациональной осью трехшарнирной арки для той же нагрузки (ч. I, § 64), то моменты и поперечные силы

в сечениях трехшарнирной арки с той же осью будут равны нулю. В этих условиях нельзя пренебрегать влиянием продольных сил на величину числителя в выражении для распора бесшарнирной арки, как мы это делали, когда влияние продольных сил было мало по сравнению с влиянием моментов (§ 22). Продольные силы вызовут обжатие оси арки и тем самым отход ее от рациональной оси, что будет сопровождаться появлением дополнительного распора в арке и моментов в ее сечениях, вызываемых этим распором.

Выведем величину распора ΔX_1 , вызываемого обжатием оси арки, как дополнительную величину, т. е. будем рассматривать распор, возникающий в бесшарнирной арке, как состоящий из двух частей: распора H^0 трехшарнирной арки и дополнительного распора ΔX_1 . Воспользуемся для определения этой величины

общим выражением распора (49) бесшарнирной арки. Разрезав арку по середине, примем основную систему в виде двух брусьев (черт. 127, *c*) и приложим к этой основной системе кроме заданной нагрузки величину распора H^0 в трехшарнирной арке¹, приняв его как сжимающую силу в ключе арки.



Черт. 127.

Введение распора H^0 в качестве нагрузки создает условия, при которых в сечениях основной системы

$$M_p^0 = Q_p^0 = 0; \quad N_p^0 = \frac{H^0}{\cos \varphi}. \quad (94)$$

Единичные воздействия $\Delta X_1 = 1$ вызывают в сечениях основной системы:

$$\bar{M}_1 = (y - c); \quad \bar{N}_1 = -\cos \varphi.$$

Отсюда

$$\Delta X_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{b_{11}} = -\frac{-H^0 \int_s \frac{ds}{F} + H^0 \int_s \frac{(y-c)}{F \rho \cos \varphi} ds}{\int_s (y-c)^2 \frac{ds}{J} + \int_s \cos^2 \varphi \frac{ds}{F}};$$

$$\Delta X_3 = -\frac{\Delta_{3p}}{b_{33}} = -\frac{H^0 \int_s \frac{(y-c) ds}{F \rho \cos \varphi}}{\int_s \frac{ds}{J}}.$$

Здесь ΔX_3 — дополнительный момент в ключевом сечении бесшарнирной арки.

¹ В случае параболической арки, находящейся под действием вертикальной сплошной равномерно распределенной нагрузки, распор в трехшарнирной арке $H^0 = \frac{qR^2}{8f}$.

В случае круговой арки, находящейся под действием сплошной равномерной, радиально направленной нагрузки, распор в ключе трехшарнирной арки

$$H^0 = qr = N,$$

где r — радиус оси арки.

В числитель обоих выражений входят интегралы, учитывающие влияние кривизны арки. Это влияние вообще незначительно (менее 10%), поэтому можно пренебречь им. Тогда $\Delta X_3 = 0$ и величина дополнительного распора определяется по формуле:

$$\Delta X_1 = \frac{+H^0}{(1+\mu)} \cdot \frac{\int_s \frac{ds}{F}}{\int_s (y-c)^2 \frac{ds}{J}}, \quad (95)$$

в которой μ — коэффициент влияния продольных сил на величину знаменателя [см. выше формулы (64), (65) и (66)].

Таким образом полный распор в бесшарнирной арке определится суммой

$$X_1 = H^0 - \Delta X_1; \quad (96)$$

причем ΔX_1 всегда имеет знак, обратный знаку H^0 .

Величина отклонения кривой давления в ключе бесшарнирной арки определится из условия:

$$\eta = \frac{\Delta X_1 c}{H^0 - \Delta X_1} = \frac{vc}{1-v},$$

где

$$v = \frac{\Delta X_1}{H^0} = \frac{1}{(1-\mu)} \cdot \frac{\int_s \frac{ds}{F}}{\int_s (y-c)^2 \frac{ds}{J}}.$$

Продольная и поперечная силы в любом сечении определяются выражениями:

$$N = N^0 - \Delta X_1 \cos \varphi = \frac{H^0}{\cos \varphi} - \Delta X_1 \cos \varphi; \quad (97)$$

$$Q = -\Delta X_1 \sin \varphi. \quad (98)$$

Первый член в выражении продольной силы представляет собой продольную силу (94) в трехшарнирной арке с рациональной осью (черт. 127, б).

В формуле (98) нет члена, представляющего поперечную силу в основной системе, так как в трехшарнирной арке с рациональной осью поперечные силы в сечениях равны нулю.

Моменты в сечениях той же трехшарнирной арки также равны нулю, поэтому моменты в сечениях бесшарнирной арки определяются выражением (черт. 127, с):

$$M = \Delta X_1 (y-c). \quad (99)$$

Для того чтобы судить о значении учета распора от обжатия, рассмотрим частный случай параболической арки, находящейся под действием сплошной равномерно распределенной нагрузки.

Для такой арки:

$$y = \frac{4f}{l^2} x^2 = \frac{1}{2p} x^2; \quad \cos \varphi = \frac{p}{\sqrt{p^2 + x^2}}.$$

Примем для упрощения вычислений:

$$J = \frac{J_c}{\cos \varphi}, \quad F = \frac{F_c}{\cos \varphi} \quad \text{и} \quad \mu = 0.$$

После подстановки этих значений в выражение (95) и интегрирования получим:

$$\Delta X_1 = H^0 \frac{1}{1+\mu} \cdot \frac{45}{4} \frac{J_c}{F_c f^2} = H^0 v.$$

В табл. 19 вычислены значения коэффициента

$$v = \frac{45}{4} \frac{h_c^2}{12f^2} = 0,937 \left(\frac{h_c}{f}\right)^2,$$

Таблица 19

Значения коэффициентов χ и распора в параболической бесшарнирной арке от обжатия оси

| Отношение стрелы подъема к пролету: $\frac{f}{l}$ | Отношение толщины арки в ключе к пролету: $\frac{h_c}{l}$ | Отношение толщины в ключе к стреле подъема арки: $\frac{h_c}{f}$ | Коэффициент | Величина дополнительного распора в ‰ от величины распора трехшарнирной арки |
|--|--|---|-------------|---|
| $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{3}$ | 0,104 | $\frac{\Delta X_1 \cdot 100}{H^0} = 10,4^{\text{‰}}$ |
| $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{24}$ | $\frac{1}{6}$ | 0,026 | $\frac{\Delta X_1 \cdot 100}{H^0} = 2,6^{\text{‰}}$ |
| $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{2}{3}$ | 0,234 | $\frac{\Delta X_1 \cdot 100}{H^0} = 23,4^{\text{‰}}$ |
| $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{24}$ | $\frac{1}{3}$ | 0,104 | $\frac{\Delta X_1 \cdot 100}{H^0} = 10,4^{\text{‰}}$ |

характеризующего изменение величины дополнительного распора в зависимости от отношения $h_c : f$.

Из данных таблицы видно, что величина дополнительного распора нарастает с увеличением толщины арки и ее пологости.

§ 30. РАСЧЕТ СВОДА С ОСЬЮ, ОЧЕРЧЕННОЙ ПО КАТЕНОИДУ

В последнее время при проектировании мостовых сводов и арок часто дают очертание оси свода или арки по катеноиду Легея¹. Кривая, очерченная по катеноиду, является, как известно

[ч. I, § 64, формула (124)], рациональной осью трехшарнирной арки при нарастании сплошной нагрузки пропорционально ординатам оси арки (черт. 128).

Уравнение катеноида

$$y = \frac{f}{m-1} (\text{ch } \xi k - 1), \quad (100)$$

в нем

$$m = \frac{q_k}{q_c}; \quad \xi = \frac{2x}{l};$$

при $\xi = 1$

$$y = f \text{ и } \text{ch } \xi k = m,$$

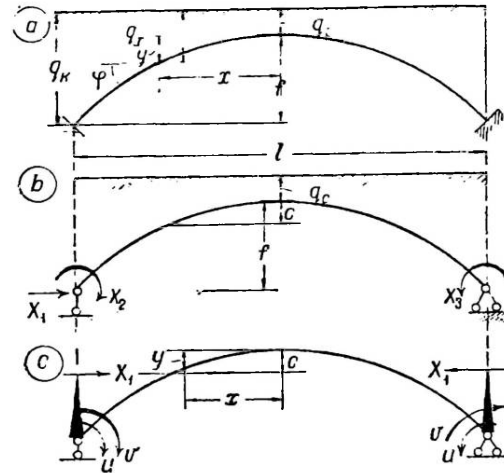
отсюда

$$k = \ln(m + \sqrt{m^2 - 1}).$$

При $m = 1$ катеноид обращается к параболу.

В нижеприводимой табл. 20 даны ординаты оси свода, вычисленные по уравнению катеноида для двенадцати точек полуоси свода в функции параметра m .

При отсутствии в табл. 20 необходимого значения m расчет свода приходится вести непосредственно помощью таблиц гиперболических функций.



Черт. 128.

Если величина временной нагрузки мала по сравнению с величиной постоянной нагрузки свода, то определение кривой оси делается только по величине

¹ Расчет свода с осью, очерченной по катеноиду, нередко называют способом Штрасснера. По существу расчет сводов с указанной осью не является методически оригинальным, он должен рассматриваться как расчет, параллельный расчету арки с параболической осью (§ 24). Заслуга Штрасснера заключается в том, что им составлены вспомогательные таблицы, облегчающие вычисление ординат оси свода, его толщины, центра фиктивных упругих сил и ординат линий влияния.

Strassner, A. Neure Methoden zur Statik d. Rahmentragwerke und elastischen Bogen-träger, В. II. 1927.

постоянной нагрузки. Определение кривой оси свода с учетом постоянной и временной нагрузки делают в предположении, что половина временной нагрузки распределена равномерно по всей длине пролета свода; так поступают потому, что временная нагрузка, как расчетная, должна быть помещена на одной половине пролета свода.

Закон изменения толщины свода принимается по формуле (43):

$$\frac{J_c}{J \cos \varphi} = 1 - (1 - n) \xi.$$

Выразив моменты инерции J_c и J через толщины h_c и h свода, получим после соответствующих преобразований:

$$h = \frac{h_c}{\sqrt[3]{1 - (1 - n)\xi}} \sqrt[6]{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}.$$

Величина $\operatorname{tg} \varphi$ определяется как производная из уравнения катеноида:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{2fk}{l(m-1)} \operatorname{sh} \xi k. \quad (101)$$

Для облегчения вычисления величин $\operatorname{tg} \varphi$ и $\frac{1}{\sqrt[3]{1 - (1 - n)\xi}}$ Штрасснером составлены таблицы, в которых даны эти величины, выраженные в функции параметра m .

Таким образом, зная пролет l и стрелу f свода, определяют:

- 1) величину нагрузки q_c и q_k и по ним вычисляют параметр m ;
- 2) пользуясь таблицей 20 определяют ординаты оси свода по уравнению (100);
- 3) задаются по соображению толщиной h_c свода в ключе и при помощи указанных таблиц вычисляют толщину свода в ряде других сечений.

Основная система с приложенными к ней лишними неизвестными показана на черт. 128, б. С целью приведения канонических уравнений к уравнениям с одним неизвестным в каждом, производят разложение опорных моментов X_2 и X_3 на парные U и V прямо и обратно симметричные (черт. 128, в), а распор переносят на уровень центра фиктивных упругих сил, положение которого определяется по формуле (46):

$$c = \frac{\int y \frac{ds}{J}}{\int \frac{ds}{J}}.$$

Таблица 20

Ординаты оси свода, очерченной по катенойду при $f = 1$

| Сечение m | Пята 0 | Ординаты оси свода, очерченной по катенойду при $f = 1$ | | | | | | | | | | Ключ 12: | |
|----------------|-----------|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------------|----|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | | 11 |
| 1,00 | 1,00 | 0,840 | 0,694 | 0,563 | 0,444 | 0,340 | 0,250 | 0,174 | 0,111 | 0,063 | 0,028 | 0,007 | 0 |
| 1,347 | 1,00 | 0,833 | 0,683 | 0,549 | 0,431 | 0,328 | 0,240 | 0,166 | 0,106 | 0,059 | 0,026 | 0,007 | 0 |
| 1,756 | 1,00 | 0,826 | 0,671 | 0,536 | 0,418 | 0,316 | 0,230 | 0,158 | 0,101 | 0,056 | 0,025 | 0,006 | 0 |
| 2,240 | 1,00 | 0,818 | 0,659 | 0,522 | 0,404 | 0,304 | 0,220 | 0,151 | 0,096 | 0,053 | 0,024 | 0,006 | 0 |
| 2,814 | 1,00 | 0,810 | 0,647 | 0,509 | 0,391 | 0,292 | 0,210 | 0,143 | 0,090 | 0,050 | 0,022 | 0,006 | 0 |
| 3,500 | 1,00 | 0,802 | 0,635 | 0,494 | 0,377 | 0,280 | 0,200 | 0,136 | 0,085 | 0,047 | 0,021 | 0,005 | 0 |
| 4,324 | 1,00 | 0,794 | 0,622 | 0,480 | 0,363 | 0,268 | 0,190 | 0,128 | 0,080 | 0,044 | 0,019 | 0,005 | 0 |
| 5,321 | 1,00 | 0,785 | 0,609 | 0,466 | 0,349 | 0,255 | 0,180 | 0,121 | 0,075 | 0,041 | 0,018 | 0,005 | 0 |
| 6,536 | 1,00 | 0,776 | 0,596 | 0,451 | 0,335 | 0,243 | 0,170 | 0,113 | 0,070 | 0,038 | 0,017 | 0,004 | 0 |
| 8,031 | 1,00 | 0,776 | 0,582 | 0,436 | 0,321 | 0,230 | 0,160 | 0,106 | 0,065 | 0,036 | 0,016 | 0,004 | 0 |
| 9,889 | 1,00 | 0,757 | 0,567 | 0,420 | 0,306 | 0,218 | 0,150 | 0,099 | 0,060 | 0,03 | 0,014 | 0,004 | 0 |

В этой формуле c выражается через параметры m и n , что осложняет вычислительный процесс.

А. Штрасснером составлены вспомогательные таблицы для вычисления величины c для ряда значений m и n .

Как уже указывалось, катеноид является рациональной осью трехшарнирного свода при нарастании сплошной нагрузки пропорционально ординатам оси свода. Это позволяет определять распор в нем от постоянной нагрузки, как сумму распора H^0 трехшарнирной арки и дополнительного распора ΔX_1 , от обжатия арки [§ 29, формула (96)]:

$$X_1 = H^0 - \Delta X_1.$$

Входящая в эту формулу величина распора H^0 определяется в следующем порядке.

Формула, определяющая величину нагрузки q_x в любой точке арки, выводится на основе тех же соображений, как и формула (74) для сплошной нагрузки в арке с параболической осью:

$$q_x = q_c \left[1 + \frac{y}{f} (m-1) \right] = q_c \operatorname{ch} \xi k.$$

Вертикальная опорная реакция от этой нагрузки:

$$V_A = V_B = q_c \frac{l}{2} \int_0^1 \operatorname{ch} \xi k d\xi.$$

После интегрирования и небольших преобразований получим ¹:

$$V_A = V_B = q_c \frac{l}{2k} \operatorname{sh} \xi k = q_c \frac{l}{2k} \sqrt{m^2 - 1}.$$

Распор в арке определяется из условия:

$$H_0 = V_A \operatorname{tg} \varphi_0.$$

Тангенс наклона касательной к оси в любой точке определяется формулой (101). При $\xi = 1$:

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{2f}{l(m-1)} k \sqrt{m^2 - 1}.$$

Подставив это значение тангенса в формулу для распора, получим:

$$H_0 = \frac{q_c l}{2k} \sqrt{m^2 - 1} \cdot \frac{l(m-1)}{2fk \sqrt{m^2 - 1}} = q_c \frac{l^2}{4} \frac{m-1}{fk^2}.$$

Дополнительный распор ΔX_1 , входящий в выражение распора X_1 , определяется по формуле (95):

$$\Delta X_1 = H_0 \frac{1}{1+\mu} \cdot \frac{\int_s \frac{ds}{J}}{\int_s (y-c)^2 \frac{ds}{J}}.$$

Величина μ равна:

$$\mu = \frac{\int_s \frac{\cos^2 \varphi ds}{F}}{\int_s (y-c)^2 \frac{ds}{J}}.$$

Интегралы, входящие в формулы, определяющие величины ΔX_1 и μ , выражаются через параметры m и n .

¹ $\operatorname{sh}^2 k = \operatorname{ch}^2 k - 1$; $\operatorname{sh} k = \sqrt{m^2 - 1}$.

Для вычисления их А. Штрасснером составлены таблицы для ряда значений m . В пологих арках величиной μ можно пренебречь. По полученным величинам H^0 и ΔX_1 определяется величина X_1 распора в бесшарнирной арке.

Переходим к определению величин моментов X_2 и X_3 , принятых за неизвестные (черт. 128, *b*).

По условию симметрии оси свода и постоянной нагрузки моменты X_2 и X_3 равны по величине и однозначны. Так как ось свода запроектирована рациональной по заданной постоянной нагрузке, то моменты в сечениях арки возникают только под влиянием обжатия ее оси дополнительным распором. Момент в любом сечении свода определяется по формуле (99):

$$M = \Delta X_1 (y - c),$$

и опорные моменты (черт. 128)

$$X_2 = X_3 = \Delta X_1 (f - c).$$

После того как определены распор и опорные моменты в своде, вычисление внутренних усилий в сечениях арки от действия постоянной нагрузки проводится по формулам (97) и (98):

$$N = \frac{H^0}{\cos \varphi} - \Delta X_1 \cos \varphi,$$

$$Q = -\Delta X_1 \sin \varphi.$$

Расчет свода с осью, очерченной по катеноиду, на подвижную нагрузку проводится так же, как и расчет свода с параболической осью, путем построения линий влияния лишних неизвестных.

Ординаты линии влияния распора определяются по формуле:

$$X_1 = - \frac{\int_s \bar{M}_p (y - c) \frac{ds}{J}}{(1 + \mu) \int_s (y - c)^2 \frac{ds}{J}}.$$

В условиях катеноида эта формула выражается в гиперболических функциях через параметр m , что осложняет расчет. Для облегчения расчета Штрасснером составлены таблицы¹ при одиннадцати значениях m и двенадцати значениях n для каждого значения m .

Линии влияния опорных моментов U и V (черт. 128, *c*) получаемых от разложения неизвестных X_2 и X_3 , не зависят от очертания оси арки, поэтому они строятся по формулам (69) и (71), выведенным для той же основной системы в применении к арке с параболической осью.

§ 31. РАСЧЕТ КРУГОВОЙ АРКИ С РАДИАЛЬНОЙ НАГРУЗКОЙ

Круговая ось является рациональной осью арки, когда на нее действует одинаковая сплошная нагрузка, направленная радиально к оси арки (гидростатическое давление) (черт. 129).

В трехшарнирной арке при такой нагрузке:
опорные реакции

$$V_A = qr \sin \alpha,$$

распор в пятах

$$H_A = qr \cos \alpha.$$

Внутренние силы в сечении такой же трехшарнирной арки равны:

$$M = 0; \quad Q = 0; \quad N_c = qr.$$

¹ Мы не рассматриваем здесь процесса составления таблиц, разработанных А. Штрасснером, и не приводим самих таблиц, так как количество их велико и все это является делом справочник-с. Таблицы и пояснения к ним на русском языке имеются в ряде справочников и в том числе в специальной книге проф. П. Я. Каменцева и Б. Н. Дучинского „Бесшарнирные арочные мосты“, М. 1928.

Величина N продольной силы легко получается из выражения момента относительно центра оси арки.

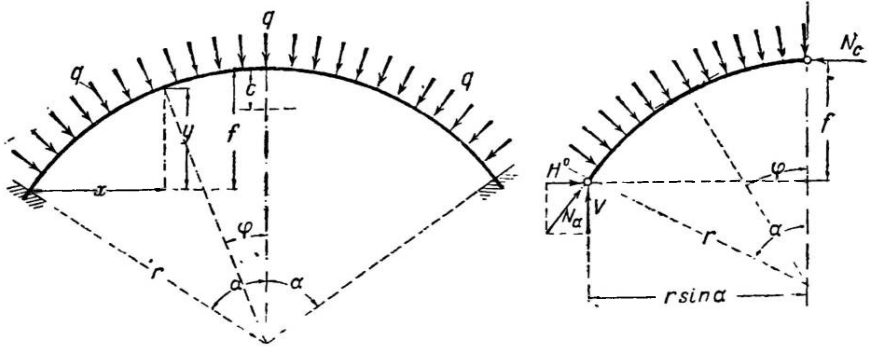
В бесшарнирной арке вследствие отсутствия в ней шарниров возникает дополнительный распор под влиянием обжатия оси арки продольными силами N . Величина его может быть определена по формуле (95).

Образуем основную систему разрезом арки по оси симметрии и будем рассматривать ее под действием заданной нагрузки и распора трехшарнирной арки $H^0 = N_c = qr$. При этом условии момент и поперечная сила во всех сечениях основной системы равны нулю.

Для круговой арки мы имеем:

$$y = r(\cos \varphi - \cos \alpha); \quad x = r(\sin \alpha - \sin \varphi), \quad ds = r d\varphi.$$

Примем сечение арки постоянным.



Черт. 129.

Определяем положение центра фиктивных упругих сил:

$$c = \frac{\int_0^\alpha y ds}{\int_0^\alpha ds} = r \frac{\sin \alpha - \alpha \cos \alpha}{\alpha}.$$

Вычисляем дополнительный распор от обжатия арки по формуле (95):

$$\Delta X_1 = \frac{qr}{1 + \mu} \frac{\frac{1}{F} \int_0^\alpha r \cos \varphi d\varphi}{\frac{1}{J} \int_0^\alpha (y - c)^2 r d\varphi}.$$

Интеграл, входящий в знаменатель, равняется:

$$\int_0^\alpha (y - c)^2 ds = r^3 \int_0^\alpha \left(\cos \varphi - \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 d\varphi = \frac{r^3 (\alpha^2 + \alpha \sin \alpha \cos \alpha - 2 \sin^2 \alpha)}{\alpha}.$$

Величина μ , характеризующая влияние продольных и поперечных¹ сил на величину знаменателя:

$$\mu = \frac{J}{\int_0^\alpha (y - c)^2 ds} \left[\int_0^\alpha \cos^2 \varphi \frac{ds}{F} + k \frac{E}{G} \int_0^\alpha \sin^2 \varphi \frac{ds}{F} \right].$$

¹ Нами введен в данном случае учет влияния поперечных сил для случая сильно подъемистых арок:

$$f > \frac{1}{3} l = > \frac{2}{3} r.$$

После интегрирования и приведения подобных членов получим:

$$\mu = \frac{J}{Fr^2} \frac{\alpha \left[\alpha + \sin \alpha \cos \alpha + k \frac{E}{G} (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha) \right]}{\alpha^2 + \alpha \sin \alpha \cos \alpha - 2 \sin \alpha}.$$

Приняв $k \frac{E}{G} = 3$, получим:

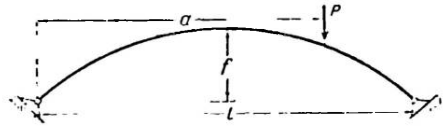
$$\mu = \frac{J}{Fr^2} \frac{4\alpha^2 - \alpha \sin 2\alpha}{\alpha^2 + \alpha \sin \alpha \cos \alpha - 2 \sin \alpha}.$$

Подставив полученные значения интегралов в выражение дополнительного распора, можем его вычислить.

Полная величина распора арки:

$$X_1 = qr \left[1 - \frac{IJ}{2(1+\mu)Fr^3} \cdot \frac{\alpha}{(\alpha^2 + \alpha \sin \alpha \cos \alpha - 2 \sin^2 \alpha)} \right].$$

Величина дополнительного распора в сильной степени зависит от толщины арки и отношения $\frac{J}{Fr^3}$.



ДВУХШАРНИРНЫЕ АРКИ

§ 32. УПРОЩЕНИЯ, ВОЗМОЖНЫЕ В РАСЧЕТЕ ДВУХШАРНИРНЫХ АРОК

Двухшарнирные арки единичды статически неопределимы. Обычно за основную систему принимают двухопорную балку (черт. 130), к которой в качестве внешней силы прикладывают неизвестный распор X_1 . Величина его определяется выражением:



Черт. 130.

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{\int_s M_p \frac{\bar{M}_1}{J} ds + \int_s M_p \frac{\bar{N}_1}{F\rho} ds + \int_s N_p \frac{\bar{N}_1}{F} ds + \int_s N_p \frac{\bar{M}_1}{F\rho} ds + k \frac{E}{G} \int_s Q_p \frac{\bar{Q}_1}{F} ds}{\int_s \bar{M}_1^2 \frac{ds}{J} + 2 \int_s \bar{M}_1 \bar{N}_1 \frac{ds}{F\rho} + \int_s \bar{N}_1^2 \frac{ds}{F} + k \frac{E}{G} \int_s \bar{Q}_1^2 \frac{ds}{F}}. \quad (102)$$

В числитель и знаменатель этой формулы входят те же интегралы, что в выражение (49) для распора бесшарнирной арки. Это уже позволяет предполагать, что упрощения, которые были сделаны при расчете бесшарнирных арок, будут применимы и к расчету двухшарнирных арок.

В табл. 21 показано изменение в процентах величины знаменателя δ_{11} , происходящее при учете в нем влияния кривизны $\frac{1}{\rho}$, поперечной силы \bar{Q}_1 и нормальной силы \bar{N}_1 . Эти проценты вычислены по отношению к величине первого интеграла, характеризующего влияние момента \bar{M}_1 . Вычисление сделано для арок с параболической осью, с разным подъемом f и с двойкой толщиной в ключе $h_c = \frac{1}{10} l$ и $h_c = \frac{1}{20} l$.

Примерно такие же соотношения имеют место в арках с круговой осью.

Эти данные позволяют сделать вывод, что в арках, обычно применяемых в строительстве, со стрелами подъема $f < \frac{1}{3} l$ и с толщиной в ключе $h_c < \frac{1}{10} l$, можно пренебрегать влиянием кривизны и поперечной силы; однако нельзя пре-

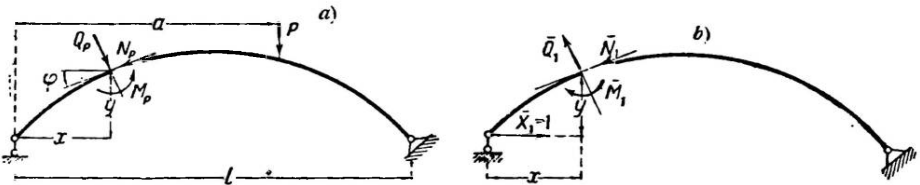
¹ При вычислении было принято $k \frac{E}{G} = 3$.

Влияние кривизны $\left(\frac{1}{\rho}\right)$, поперечной силы (\bar{Q}_1) и нормальной силы (\bar{N}_1) на величину знаменателя δ_{11} в выражении для распора параболической двухшарнирной арки

| $\frac{f}{l}$ | Влияние $\frac{1}{\rho}$ | | Влияние \bar{Q}_1 | | Влияние \bar{N}_1 | |
|----------------|--|----------------|---------------------|----------------|---------------------|---------------|
| | $h_c = 0,1 l$ | $h_c = 0,05 l$ | $h_c = 0,1 l$ | $h_c = 0,05 l$ | $h_c = 0,1 l$ | $h_c = 0,5 l$ |
| | В процентах к величине $\int_s \bar{M}_1^2 \frac{ds}{J}$ | | | | | |
| $\frac{1}{12}$ | -1,6 | -0,4 | 2,4 | 0,6 | 21,7 | 5,4 |
| $\frac{1}{8}$ | -1,5 | -0,4 | 2,2 | 0,5 | 9,3 | 2,3 |
| $\frac{1}{4}$ | -1,3 | -0,3 | 1,6 | 0,4 | 1,96 | 0,6 |
| $\frac{1}{2}$ | -0,8 | -0,2 | 0,8 | 0,2 | | |

небрегать влиянием продольных сил в пологих арках $f < \frac{1}{5} l$ и особенно в арках с большой толщиной.

Следует отметить, что, не учитывая одновременно влияния кривизны и поперечных сил, мы приближаем величину знаменателя δ_{11} к его точному значению,



Черт. 131.

так как эти влияния выражаются примерно в одинаковых процентах, но с разными знаками.

Дальнейшие упрощения в определении распора делаются при вычислении числителя.

Учет кривизны оказывает очень малое влияние на точное значение числителя; оно выражается в долях процента от величины первого интеграла в выражении (102).

При действии вертикальной нагрузки интегралы, характеризующие влияние поперечных и нормальных сил на величину числителя, приводятся к следующему виду (черт. 131):

$$\int_s N_p \bar{N}_1 \frac{ds}{F} = Q^0 \int_s \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{F};$$

$$k \frac{E}{G} \int_s Q_p \bar{Q}_1 \frac{ds}{F} = + k \frac{E}{G} Q^0 \int_s \cos \varphi \sin \varphi \frac{ds}{F}.$$

В них Q^0 — поперечная сила от вертикальной нагрузки в двухопорной балке с тем же пролетом, как арка.

Сравнительные подсчеты¹, сделанные для арок с различными отношениями $\frac{h_c}{l}$ и $\frac{f}{l}$, показали, что учет продольных и поперечных сил оказывает малое влия-

¹ Тимошенко С. П., Расчет упругих арок, стр. 29, 34 и др., 1933.

ние на величину числителя. Даже в арках с толщиной в ключе $h_c = 0,1l$ это влияние не превосходит 1% численного значения первого интеграла и быстро уменьшается с уменьшением толщины арки. Это позволяет при определении распора от действия вертикальной нагрузки ограничиться учетом только влияния моментов и определять распор по формуле:

$$X_1 = - \frac{\int_s^n M_{py} \frac{ds}{J}}{(1 + \mu) \int_s^n y^2 \frac{ds}{J}}, \quad (103)$$

в которой величина

$$\mu = \frac{\int_s^n \cos^2 \varphi \frac{ds}{F}}{\int_s^n y^2 \frac{ds}{J}}$$

и характеризует влияние продольных сил на величину распора.

§ 33. МНОГОУГОЛЬНИК ДАВЛЕНИЙ

При загрузении арки постоянной нагрузкой момент в ее сечениях определяется по формуле:

$$M_k = M_k^0 - X_1 y_k,$$

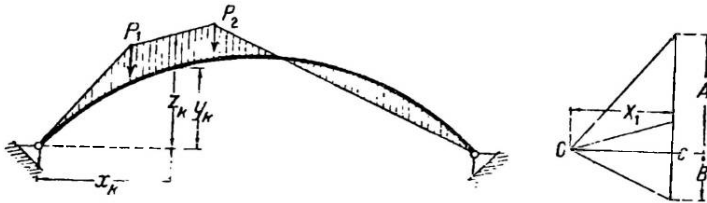
в которой M_k^0 — момент в сечении арки, определяемый как для простой двухопорной балки того же пролета, y_k — ордината оси арки в месте сечения.

Если нагрузка вертикальна, то, как известно (см. выше § 23), вертикальные расстояния от точек многоугольника давления до оси балки определяются, если ординаты эпюры моментов разделить на величину распора:

$$\eta = \frac{M}{X_1} = \frac{M_k^0}{X_1} - y_k = z_k - y_k.$$

Отсюда становится ясным процесс построения кривой давления.

При аналитическом построении следует после вычисления ординат моментов M^0 разделить их на величину распора и отложить от линии опорных шарниров



Черт. 132.

(черт. 132). Полученная ломаная линия представит собою многоугольник давления. Разность ординат кривой давления и оси арки определяется контур эпюры моментов.

При большом числе грузов целесообразно строить многоугольник давления при помощи веревочного многоугольника. Для того чтобы веревочный многоугольник прошел через оба шарнира, следует: вычислить опорные реакции, определить на силовом многоугольнике точку C их смыкания (черт. 132), провести через точку C горизонтальный луч и отложить на нем отрезок, равный распору X_1 , определяющий полюс O . Через полученный полюс проводятся лучи, и по ним строится веревочный многоугольник, начальная сторона которого проводится через левый опорный шарнир, а последняя сторона должна пройти через правый шарнир.

§ 34. АНАЛИТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ АРКИ

Аналитический расчет арки возможен при закономерном изменении оси арки и ее толщины.

В двухшарнирных арках характерным является нарастание моментов от пят к средней части, поэтому, естественно, высота сечений арки должна убывать от ключа к пятам. Это условие будет удовлетворено, если принимать закон изменения площади сечения $F = F_0 \cos \varphi$ или закон изменения момента инерции $J = J_c \cos^2 \varphi$. Но такой закон изменения сечений приводит к сложному вычислению интегралов в выражении для распора. Сравнительные же подсчеты показали, что величина распора, заметно изменяющаяся при изменении толщины арки в ключе, мало зависит от закона, по которому изменяется толщина арки по ее длине.

Для характеристики этого влияния в табл. 22¹ даны ординаты линии влияния распора, вычисленные в предположении изменения толщины сечения по законам, удовлетворяющим условиям:

$$J = J_c \cos^2 \varphi; \quad J = \frac{J_c}{\cos \varphi}; \quad J = \frac{J_c}{\cos^3 \varphi}.$$

Таблица 22

Влияние закона изменения сечения сечения двухшарнирной параболической арки на величину распора

| $\frac{f}{l}$ | Закон изменения сечения | Ординаты линии влияния распора | | | | | |
|----------------|------------------------------|--------------------------------|--------|--------|--------|--------|----------------------------|
| | | 0,1 l | 0,2 l | 0,3 l | 0,4 l | 0,5 l | |
| $\frac{1}{10}$ | $J = J_c \cdot \cos \varphi$ | 0,0987 | 0,1860 | 0,2538 | 0,2965 | 0,3110 | } $\times \frac{5 l}{8 f}$ |
| | $J = J_c : \cos \varphi$ | 0,0978 | 0,1855 | 0,2545 | 0,2975 | 0,3125 | |
| | $J = J_c : \cos^3 \varphi$ | 0,0974 | 0,1850 | 0,2540 | 0,2980 | 0,3130 | |
| $\frac{1}{6}$ | $J = J_c \cdot \cos \varphi$ | 0,1000 | 0,1871 | 0,2540 | 0,2950 | 0,3095 | } $\times \frac{5 l}{8 f}$ |
| | $J = J_c : \cos \varphi$ | 0,0978 | 0,1855 | 0,2545 | 0,2975 | 0,3125 | |
| | $J = J_c : \cos^3 \varphi$ | 0,0960 | 0,1835 | 0,2540 | 0,3000 | 0,3160 | |

Из сопоставления цифр табл. 22 видно, что при всех трех указанных законах изменения толщины арки получаются близкие друг к другу результаты, поэтому в производственных расчетах пологих арок (при $f < \frac{1}{4} l$) можно не задаваться законом, приводящим к сложному аналитическому расчету двухшарнирной арки, а проводить последний, принимая:

$$J = \frac{J_c}{\cos \varphi} \quad \text{и} \quad F = \frac{F_c}{\cos \varphi}.$$

Этот закон изменения сечения для пологих арок можно заменить еще более простым:

$$\cos \varphi = 1; \quad \sin \varphi = 0; \quad ds = dx; \quad J = J_c \quad \text{и} \quad F = F_c.$$

Аналитический расчет арок с параболической или круговой осями не представляет затруднений и рассматривался нами в порядке упражнений и изложения (§ 24). Мы разберем здесь расчет арки с параболической осью, чтобы сделать некоторые сопоставления.

Примем уравнение оси арки, огнесенное к осям, проходящим через левый пятый шарнир, в виде:

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l-x).$$

¹ Для составления таблицы использованы данные из книги проф. С. А. Бернштейна. Основы расчета статически неопределимых систем, § 58, 1936.

Из этого уравнения получаем:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{8f}{F} \left(\frac{l}{2} - x \right) = \frac{1}{p} \left(\frac{l}{2} - x \right); \quad p = \frac{F}{8f};$$

$$\cos \varphi = \frac{p}{\sqrt{p^2 + \left(\frac{1}{2} l - x \right)^2}}; \quad \sin \varphi = \frac{\left(\frac{1}{2} l - x \right)}{\sqrt{p^2 + \left(\frac{1}{2} l - x \right)^2}}.$$

Примем также для любого сечения арки:

$$J \cos \varphi = J_c \quad \text{и} \quad F \cos \varphi = F_c.$$

Подставив эти значения в интегралы, входящие в знаменатель выражения (103), получим:

$$\int_s^l y^2 \frac{ds}{J} = \frac{16f^2}{J_c^2} \int_0^l x^2 (l-x)^2 dx = \frac{8}{15} \frac{f^2 l}{J_c};$$

$$\int_s^l \cos^3 \varphi \frac{ds}{F} = \frac{p^2}{F_c} \int_0^l \frac{dx}{p^2 + \left(\frac{l}{2} - x \right)^2} = \frac{2p}{F_c} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{l}{2p};$$

$$\mu = \frac{\int_s^l \cos^3 \varphi \frac{ds}{F}}{\int_s^l y^2 \frac{ds}{J}} = \frac{15 J_c}{32 F_c} \frac{l}{f^2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{4f}{l}. \quad (104)$$

В пологих арках со стрелой $f < \frac{1}{5} l$ можно принимать $\cos^2 \varphi = 1$, и тогда:

$$\mu = \frac{15}{8} \frac{J_c}{F_c f^2}. \quad (104')$$

Интегралы, входящие в числитель, зависят от вида нагрузки. Поэтому рассмотрим отдельно два случая нагрузки.

1. Сосредоточенный груз. При действии одной сосредоточенной силы, приложенной на расстоянии a от левой опоры (черт. 130):

$$\Delta_{1p} = \int_s^l M_{py} \frac{ds}{J} = \frac{-4f}{J_c l^2} \frac{P}{2} \left[2 \int_0^a x^2 (l-x) dx + 2a \int_a^l x (l-x) dx \right] =$$

$$= \frac{-Pf}{3J_c l^2} a (l-a) (l^2 + al - a^2).$$

Значение его вычислено путем разложения нагрузки на прямо и обратно симметричную.

Отсюда распор:

$$X_1 = \frac{5}{8} \frac{Pa(l-a)(l^2 + al - a^2)}{f l^3 (1 + \mu)}. \quad (105)$$

Это уравнение определяет собой также уравнение линии влияния распора, для чего в нем надо принять a переменным и $P = 1$.

2. Сплошная нагрузка. Предположим, что левая часть арки загружена на длину a (черт. 133) сплошной равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q кг/м, тогда интеграл, входящий в числитель формулы (103) для распора, напишется так:

$$\Delta_{1p} = - \int_s^l M_{py} \frac{ds}{J} = - \frac{4f}{J_c l^2} q \left[\int_0^l \frac{a}{l} \left(l - \frac{1}{2} a \right) x^2 (l-x) dx - \int_0^a \frac{1}{2} x^3 (l-x) dx - \right.$$

$$\left. - \int_a^l a \left(x - \frac{a}{2} \right) x (l-x) dx \right].$$

После интегрирования и приведения подобных членов получим:

$$-\int_x M_q y \frac{ds}{J} = -\frac{qa^2 f}{30 f^2 J_c} (5l^3 - 5la^2 + 2a^3).$$

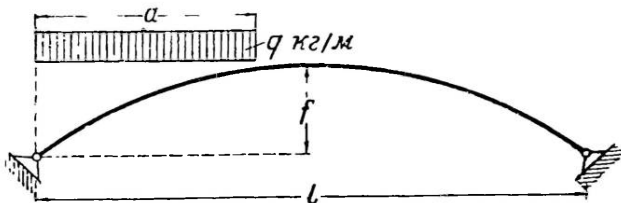
Подставив эту величину в формулу (103) для распора, получим:

$$X_1 = \frac{qa^2 f (5l^3 - 5la^2 + 2a^3)}{30 l^2 \frac{8}{15} f^2 l (1 + \mu)} = \frac{5qa^2 (l^3 - la^2 + 0.4a^3)}{16 l^2 f (1 + \mu)}. \quad (106)$$

При загрузении арки на всю длину ($a = l$):

$$X_1 = \frac{ql^2}{8f(1 + \mu)}. \quad (107)$$

Отсюда видно, что при одной и той же величине нагрузки распор в двухшарнирной арке отличается от распора трехшарнирной арки множителем $(1 + \mu)$ в знаменателе. Наличие этого множителя уменьшает величину распора, что создает отклонение кривой давления от оси арки.



Черт. 133.

В частном случае для арки с пролетом $l = 24$ м, стрелой $f = 3$ м и высотой сечения в ключе $h_c = 0,8$ м будем иметь коэффициент μ по формуле (104'):

$$\mu = \frac{15}{8} \cdot \frac{0,8^2}{12 \cdot 3^2} = 0,0111.$$

$$\text{Распор: } X_1 = q \frac{24^2}{8 \cdot 3 \cdot (1 + 0,0111)} = 23,73 \text{ кг.}$$

Разница между X_1 и распором в трехшарнирной арке:

$$\Delta X_1 = \frac{q \cdot 24^2}{8 \cdot 3} - 23,73 q = 0,27 q.$$

Влияние множителя $(1 + \mu)$ нарастает с увеличением пологости и толщины арки.

Формула (107) для распора двухшарнирной арки одинакова по написанию с формулой (76) для распора бесшарнирной арки; но они различаются величиной μ .

Таблица 23

Сопоставление величин распора в трех-двух и бесшарнирной параболической арке

| $\frac{f}{l}$ | Коэффициент μ и распор | Трехшарнирная | Двухшарнирная | Бесшарнирная |
|---------------|----------------------------|---------------|---------------|--------------|
| $\frac{1}{4}$ | распор | — | 0,008 | 0,050 |
| $\frac{1}{8}$ | μ -распор | 12 q | 11,90 q | 11,43 q |
| $\frac{1}{8}$ | распор | — | 0,0111 | 0,067 |
| $\frac{1}{8}$ | распор | 24 q | 23,73 q | 22,50 q |

В табл. 23 сопоставлены величины распоров в арках трех видов с пролетом $l = 24$ м, толщиной в ключе $h_c = 0,8$ м и со стрелами $f = \frac{1}{4} l$ и $f = \frac{1}{8} l$.

Как видно из табл. 23, разница между распорами нарастает с уменьшением подъема.

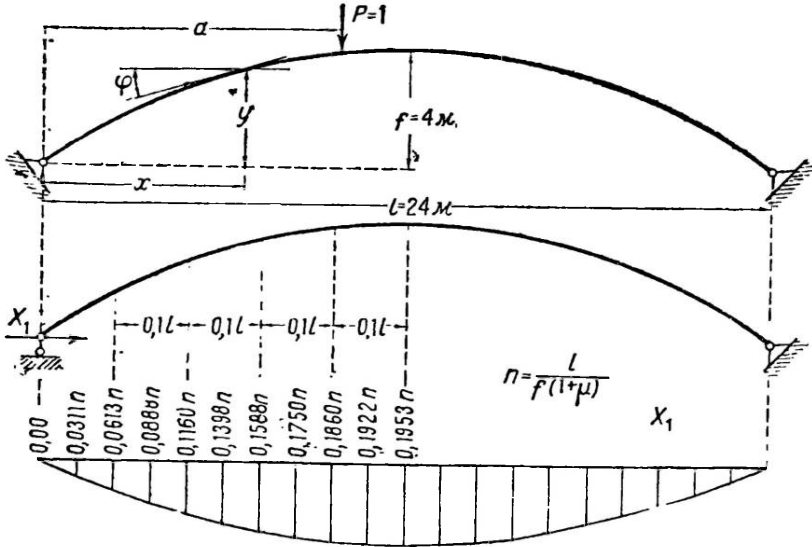
Разница в величинах распоров двух- и трехшарнирной арки должна быть еще больше

в силу того, что параболическая ось представляет собой рациональную ось в условиях загрузки осей арки сплошной равномерной нагрузкой. В этом случае моменты в сечениях арки равны нулю, поэтому нельзя пренебрегать

влиянием продольных сил в числителе выражения для распора; они вызывают обжатие оси арки, что сопровождается образованием дополнительного распора (§ 29).

3. Линии влияния. В арках с параболической осью линия влияния распора строится по уравнению (105), в котором абсцисса точки приложения груза $P=1$ должна быть принята переменной $z = \frac{a}{l}$:

$$X_1 = \frac{l}{f(1+\mu)} \frac{5}{8} z(1-z)(1+z-z^2).$$



Черт. 134.

Из этого уравнения видно, что ординаты линии влияния изменяются по закону $\frac{5}{8} z(1-z)(1+z-z^2)$, независимо от подъема и пролета арки; влияние последнего сказывается только на изменении расстояния между ординатами. Множитель

$$n = \frac{l}{f(1+\mu)}$$

служит масштабом линии влияния при различных пролетах и подъемах арки.

На черт. 134 построена модель линии влияния распора, ординаты которой вычислены по уравнению:

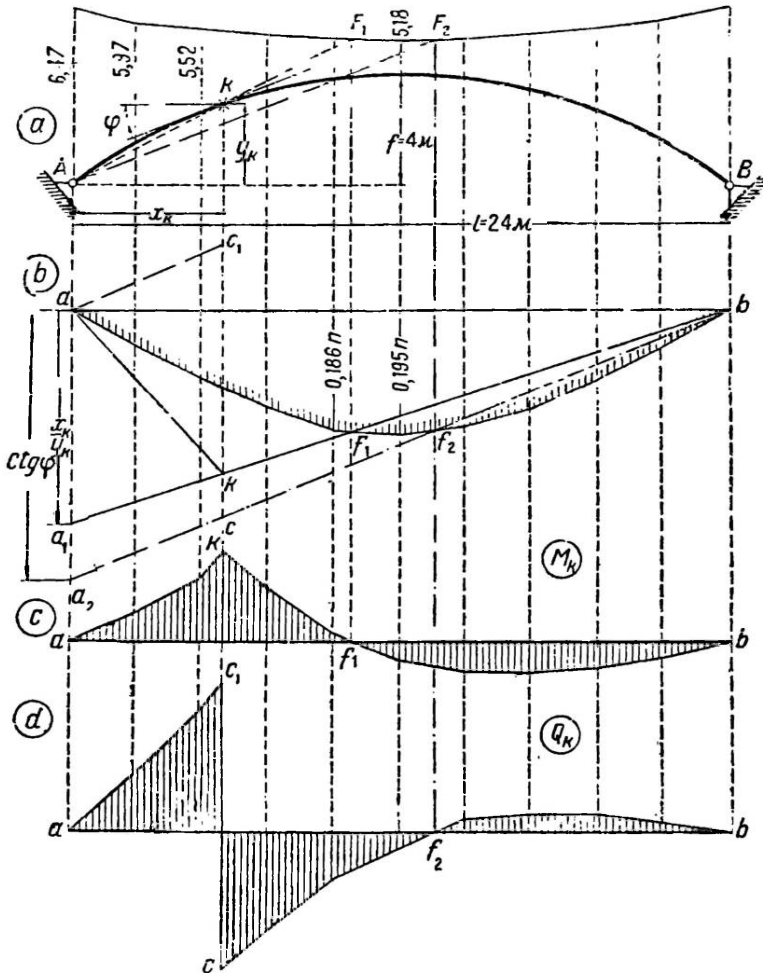
$$y = \frac{5}{8} z(1-z)(1+z-z^2).$$

После того как построена линия влияния распора, построение линий влияния момента и внутренних усилий в любом сечении арки не представляет затруднений; для этого используются уравнения (черт. 131, а)

$$\begin{aligned} M &= M^0 - X_1 y_k = V_A x_k - X_1 y_k = y_k \left[\frac{(l-x) x_k}{l y_k} - y_{x1} \right], \\ N &= Q^0 \sin \varphi + X_1 \cos \varphi = \cos \varphi \left[\frac{(l-x)}{l} \operatorname{tg} \varphi + y_{x1} \right], \\ Q &= Q^0 \cos \varphi - X_1 \sin \varphi = \sin \varphi \left[\frac{(l-x)}{l} \operatorname{ctg} \varphi - y_{x1} \right]. \end{aligned} \quad (108)$$

Уравнения написаны в предположении, что груз $P=1$ находится справа от сечения; y_{x1} — ординаты линии влияния распора под точкой приложения груза.

Каждая линия влияния строится на базе линий влияния распора и измеряется в масштабе этой линии влияния с помножением на величины y_K , $\cos \varphi$, $\sin \varphi$.
 Если в порядке расчета требуется построение большого числа линий влияния, то построение их целесообразно проводить при помощи нулевых точек, используя для этого кривую опорных сопротивлений. Такое построение проведено на черт. 135.



Черт. 135.

4. Линия опорных сопротивлений. Кривая опорных сопротивлений в двухшарнирной арке представляет собой, как и в трехшарнирной арке, геометрическое место точек F пересечения опорных реакций A и B , на которые разлагается груз P , стоящий на вертикали точки F (черт. 135,а). Ординаты y этой кривой определяются из условия:

$$y : x = V_A : X_1 \quad \text{и} \quad y : (l - x) = V_B : X_1,$$

здесь x — абсцисса точки приложения груза P .

Подставив в первое уравнение значения V_A и X_1 , получим уравнение опорной кривой:

$$y = \frac{x(l-x)}{l} \cdot \frac{\frac{8}{5} l^2 f (1+\mu)}{x(l-x)(l^2 + lx - x^2)} = \frac{8f(1+\mu)}{5(1+z-z^2)}$$

здесь: $z = x:l$ и $\frac{f}{l}(1+\mu) = \frac{1}{n}$ — масштабный множитель линии влияния распора.

Полученное уравнение позволяет построить кривую опорных сопротивлений; оно выполняется в масштабе чертежа арки:

$$\text{при } z = 0 \quad y = \frac{8}{5} \cdot 1 \cdot (1 + 0,011) = 6,47,$$

$$\text{при } z = 0,1 \quad y = 6,47 \cdot \frac{1}{1,09} = 5,93,$$

$$\text{при } z = 0,5 \quad y = 6,47 \cdot \frac{1}{1,25} = 5,18.$$

Использование кривой сопротивления для построения линий влияния делается на основании следующих соображений. Наличие нулевой точки в линии влияния момента показывает, что груз, стоящий над этой точкой справа от рассматриваемого сечения, не вызывает момента в сечении; это имеет место только в том случае, если опорная реакция проходит через точку момента. Следовательно, для того чтобы построить линию влияния момента в сечении K арки (черт. 135), надо провести прямую AK и продолжить ее до точки F_1 на кривой опорных сопротивлений. Точка F_1 сносится на кривую линии влияния распора в точку f_1 . Прямой bf_1 определяется положение правой прямой линии влияния момента; последняя вся очерчивается контуром akf_1b . Согласно уравнению:

$$M = y_k \left[\frac{(l-x)x_k}{l} \frac{1}{y_k} - y_{x1} \right]$$

отрезок $aa_1 = x_k : y_k$. Ординаты линии влияния момента, измеренные в масштабе линии влияния распора, должны помножаться на величину $y_k \cdot n = y_k \frac{l}{f(1+\mu)}$.

На черт. 135,с показана линия влияния момента M_k , отнесенная к оси абсцисс.

На основании тех же соображений мы приходим к выводу, что нулевая точка F_2 линии влияния поперечной силы должна определяться проведением прямой AF_2 параллельной касательной к арке в точке K . В этом случае поперечная сила Q равна нулю. Снеся точку F_2 на контур линии влияния распора в точку f_2 , мы можем провести прямую bf_2 , определяющую собой правую прямую df_2e линии влияния поперечной силы; прямая ac_1 параллельна ей. Согласно уравнению:

$$Q = \sin \varphi \left[\frac{l-x}{l} \operatorname{ctg} \varphi - y_{x1} \right]$$

отрезок $aa_2 = \operatorname{ctg} \varphi$. Ординаты этой линии влияния должны измеряться в масштабе:

$$n \sin \varphi = \frac{l}{f(1+\mu)} \sin \varphi.$$

На черт. 135, d показана линия влияния поперечной силы Q , отнесенная к оси абсцисс.

§ 35. РАСЧЕТ АРКИ С ОСЬЮ ПРОИЗВОЛЬНОГО ОЧЕРТАНИЯ ИЛИ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЗАКОНОМ ИЗМЕНЕНИЯ ТОЛЩИНЫ

Если ось арки или ее сечение изменяются незакономерно, то вычисление интегралов, входящих в выражение для распора, становится невозможным. Расчет таких арок проводится приближенно путем численного интегрирования; построение же линий влияния делается при помощи фиктивных упругих грузов. Последовательность обоих этих приемов описана в разделе расчета бесшарнирных арок (§ 26, 27); она сохраняется и для расчета двухшарнирных арок.

В качестве основной системы в расчетах двухшарнирной арки рекомендуется принимать балку с кривой осью, свободно лежащую на двух опорах (черт. 136).

Фиктивные упругие грузы, служащие для вычисления перемещений δ_{p1} и δ_{11} в выражении распора

$$X_1 = - \frac{\delta_{p1}}{\delta_{11}},$$

вычисляются для каждого участка Δs арки по одной из формул (83), (89) в предположении действия на нее силы $\bar{X}_1 = 1$.

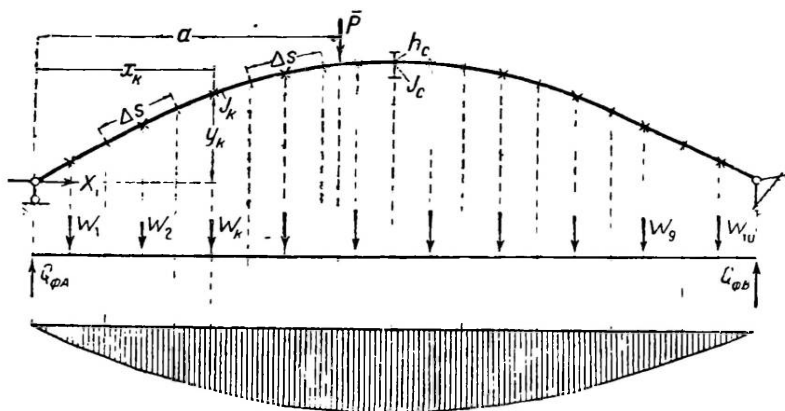
По упрощенной формуле (89)

$$W_{k1} = -y_k \frac{\Delta s}{J_k}.$$

Числитель δ_{p1} определяется как статический момент фиктивных грузов в условном брусce (черт. 136) относительно вертикали точки приложения груза $P = 1$ (ч. I, § 94):

$$\delta_{p1} = a \sum_{k=0}^{k=n} \frac{l-x_k}{l} W_{k1} - \sum_{k=0}^{k=m} (a-x_k) W_{k1}.$$

Здесь: k — номер произвольного фиктивного груза левее точки приложения груза $P = 1$; n — число всех грузов, m — число грузов, начиная от левой опоры ($m = 0$) до точки приложения груза $P = 1$.



Черт. 136.

Знаменатель δ_{11} определяется по формуле:

$$\delta_{11} = \sum_0^n y_k W_{k1} + \sum_0^l \cos^2 \varphi \frac{\Delta s}{F}.$$

Первый член суммы представляет собой статический момент тех же упругих грузов относительно линии направления распора, второй член вычисляется всегда суммированием.

Аналитическое определение величин δ_{1p} и δ_{11} может быть заменено графическим построением двух веревочных многоугольников, аналогичных указанным на черт. 122.

После построения линии влияния распора построение линий влияния момента и усилий в сечениях арки производится в обычном порядке (§ 34).

§ 36. АРКА С ЗАТЯЖКОЙ

Арки с затяжкой (черт. 137,а) отличаются от обычных двухшарнирных арок тем, что распор в них переводится из внешней связи во внутреннюю, поэтому усилие в затяжке учитывается в порядке внутренних усилий.

Если принять усилие в затяжке за неизвестное X_1 , то уравнение, определяющее его, напишется так:

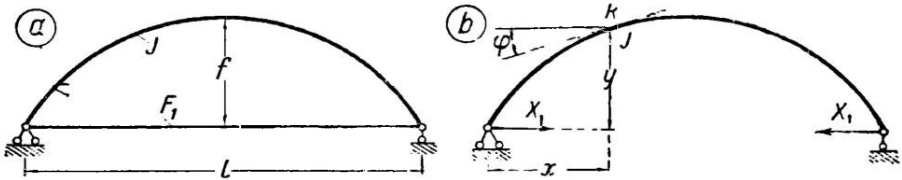
$$X_1 \left[\int_n \frac{\bar{M}_1^2 ds}{EJ} + \int_n \bar{N}_1^2 \frac{ds}{EF} + \frac{l}{EF} \right] = - \int_n M_p \bar{M}_1 \frac{ds}{EJ}.$$

В этом выражении $\frac{l}{EF}$ представляет деформацию в затяжке от единичного воздействия $\bar{X}_1 = 1$. Указанное уравнение может быть представлено в виде:

$$X_1 \left(\delta_{11} + \frac{l}{EF} \right) = - \Delta_{1p}.$$

Из этого выражения видно, что усилие в затяжке меньше, чем величина распора в двухшарнирной арке. Это уменьшение происходит за счет деформации самой затяжки.

После того как будет определено усилие в затяжке расчет самой арки проводится также как обычной арки (108).



Черт. 137.

Например момент в сечении K (черт. 137, b) равен:

$$M_k = M_k^0 - X_1 y;$$

поперечная сила равна:

$$Q = Q_k^0 - X_1 \sin \varphi$$

и т. д.

Уменьшение усилия затяжки против распора арки без затяжки создает увеличение внутренних моментов и усилий, что отражается на увеличении сечений и следовательно веса самой арки; однако наличие затяжки облегчает опоры арки.

§ 37. ВЛИЯНИЕ УПРУГИХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ОСИ АРКИ НА ВЕЛИЧИНУ МОМЕНТОВ В НЕЙ

В расчетах сооружений обычно принимают, что перемещения их оси не оказывают существенного влияния на величины усилий и моментов, вызываемых в них действием нагрузки. Это допущение с достаточной точностью оправдывается в балочных системах.

В арках перемещения точек оси изменяют величины ординат их, которые берутся в качестве плеча при вычислении моментов от распора. Уравнение момента в двухшарнирных арках записывается в виде разности:

$$M = M^0 - Hy,$$

где H — распор в арке от заданной нагрузки, y — ордината оси арки.

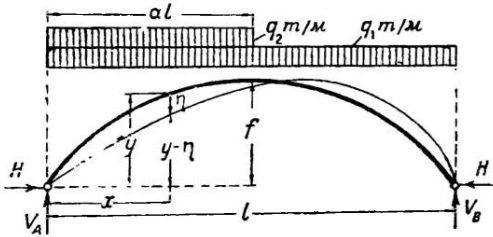
Оба члена этой разности величины примерно одного порядка, поэтому достаточно незначительно изменить величину ординаты y , чтобы это сильно отразилось на величине суммарного момента M . Из этого можно видеть, что в пологих арках учет деформаций оси может внести значительные поправки в величины изгибающих моментов, определяемых без учета этой деформации.

Этому вопросу в последнее время уделяется большое внимание в технической литературе. Подробный разбор этого учета выходит за пределы настоящего курса, поэтому мы ознакомим читателя здесь вкратце с сущностью этого вопроса и приведем некоторые результаты, полученные разными авторами¹.

¹ Fritz В., Theorie und Berechnung vollwandiger Bogenträger, Berlin, 1934.
Мюллер-Бреслау. Графостатика, ч. 2, вып. 2 стр. 513, 1913.

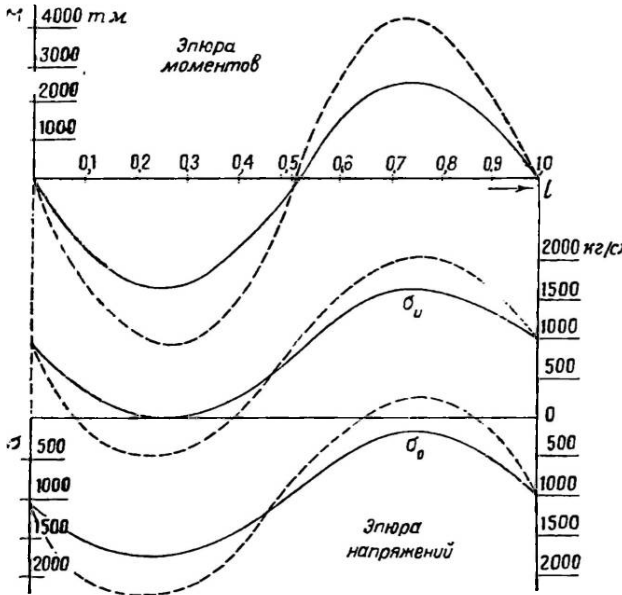
Определение перемещений оси арки может быть сделано решением дифференциального уравнения следующего вида:

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} + c^2\eta + c^2F(x) = 0; \quad (109)$$



Черт. 138.

В уравнение входит величина распора H , которая должна быть определена с учетом влияния деформации оси арки. Это может быть сделано по условию равенства работ внешних и внутренних сил на действительных перемещениях.



Черт. 139.

На черт. 139 сопоставлены эпюры моментов и напряжений в сечениях двухшарнирной арки по ее длине при учете (пунктирная линия) и неучете (сплошная линия) деформации оси. Из сопоставления их можно видеть, что в отдельных сечениях арки моменты, определяемые с учетом деформации оси арки, превосходят на 50% величину момента без учета деформации оси арок. Нарастание величины напряжения меньше; оно не более 26% (в сечениях около четверти пролета); последнее объясняется тем, что напряжение определяется по двухчленной формуле:

$$\sigma = \frac{M}{W} + \frac{N}{F}$$

В нем

$$c^2 = \frac{H}{EJ} \text{ и } F(x) = \frac{M^0}{H} - y + \frac{2J}{F\rho},$$

η — ордината отклонения оси арки от заданного очертания (черт. 138);

M^0 — момент в сечении арки от действия заданной нагрузки;

H — распор, определяемый с учетом влияния перемещений оси арки;

J, F — моменты инерции и площади сечения арки;

ρ — радиус кривизны.

$$\frac{1}{2} \sum P\eta_i = \frac{1}{2} \left[\int \frac{M^2}{EJ} ds + \int \frac{N^2}{EF} ds + 2 \int \frac{MN}{EF\rho} \right].$$

Величина распора входит в выражение ординаты η и в правую часть этого уравнения и выражается трансцендентной функцией, поэтому определение ее делается приближенно путем подбора. Эта работа проведена рядом авторов, и ими даны сопоставления величин моментов и напряжений в сечениях арки с учетом и без учета деформации ее оси.

Фритц (Fritz) провел это сравнение для арок трехшарнирной, двухшарнирной и бесшарнирной одного и того же пролета с одинаковой осью и при одинаковом нагружении¹.

Пролет $l = 212,5$ м.

подъем $f = \frac{1}{10} l = 21,25$ м, $h_r = 2,60$ м, $F_c = 0,319$ м², $J_c = 0,460$ м⁴; равномерная нагрузка на всем пролете $q_1 = 8,8$ т/м и на половине пролета $q_2 = 4,4$ т/м.

¹ Fritz В., Theorie und Berechnung vollwändiger Bogenträger, Berlin 1934. стр. 132 и 136.

с учетом продольной силы, величина которой мало изменяется ($\sim 10\%$) при учете деформации оси арки.

На черт. 140 сопоставлены эпюры моментов и напряжений в сечениях бесшарнирной арки с учетом (пунктирная линия) и без учета (сплошная линия) деформации оси арки. В арках этого вида учет деформации оси арки сопровождается увеличением момента до 25% и увеличением напряжений в пятах до $10 - 12\%$.

На черт. 141 сопоставлены кривые изменения величины моментов при загрузке арки временной нагрузкой q_2 т/м. По оси абсцисс отложены длины загруженной части арки, по оси ординат — величины моментов ¹.

Сделанные сопоставления показывают, что при проектировке пологих арок (в том числе и трехшарнирных) надо учитывать наличие перенапряжений, возникающих в них под влиянием деформации оси. Производство этого учета в условиях обычных проектировок сложно, но наличие перенапряжений заставляет повышать жесткость арки и быть осторожным в выборе допускаемых напряжений.

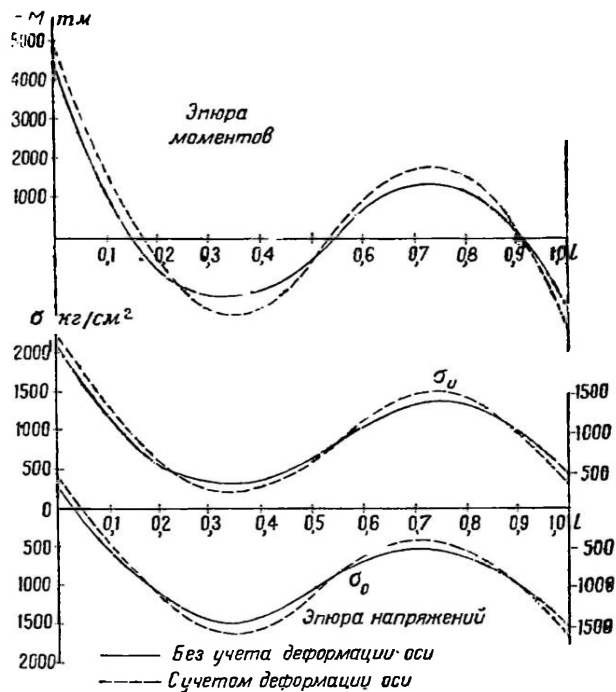
ФЕРМЫ

§ 88. ОСНОВНАЯ СИСТЕМА И УПРОЩЕНИЯ В КАНОНИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ

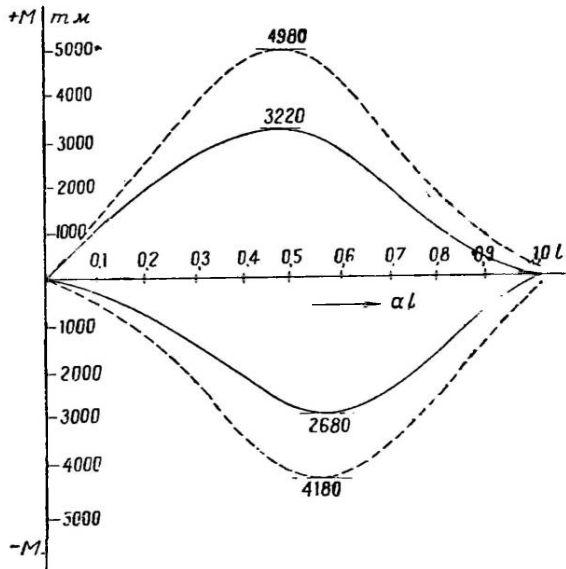
Расчет статически неопределимых ферм проводится на основе положений и выводов, данных в общем отделе настоящей книги, но все перемещения вида δ_{km} и Δ_{kp} , входящие в указанные выводы и формулы, вычисляются по выражениям:

$$\left. \begin{aligned} E\delta_{kk} &= \sum \bar{N}_k^2 \frac{s}{F}; \\ E\delta_{km} &= \sum \bar{N}_k \bar{N}_m \frac{s}{F}; \\ E\Delta_{kp} &= \sum N_p \bar{N}_k \frac{s}{F}. \end{aligned} \right\} (109)$$

¹ Кривые взяты из диссертации аспиранта МИИТ Неминского М. Н., Расчет арок в пластической стадии, 1939.



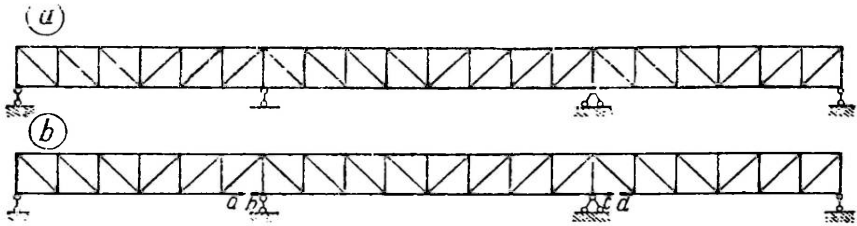
Черт. 140.



Черт. 141.

Эти выражения должны охватывать все стержни, образующие ферму, но может иметь место обращение в нуль части слагаемых, входящих в эти суммы. Последнее зависит от того, насколько удачно выбрана основная система и использованы условия, создающие упрощения в канонических уравнениях.

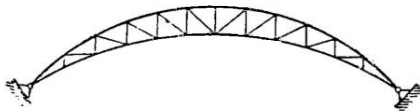
Фермы могут быть статически неопределимыми по наличию лишних связей в опорных закреплениях (черт. 142, а, 143) и по наличию лишних связей во внутреннем образовании (черт. 144, 145). Среди последних особую группу составляют



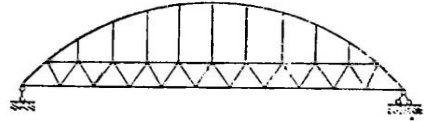
Черт. 142.

фермы со сложной статически неопределимой решеткой (черт. 145); в расчете этих ферм имеются некоторые особенности, поэтому они рассмотрены нами отдельно от других видов статически неопределимых ферм.

В фермах статически неопределимых относительно опорных закреплений основная система может быть получена устранением как опорных связей, так и связей в ее внутреннем образовании. При выборе основной системы следует стре-



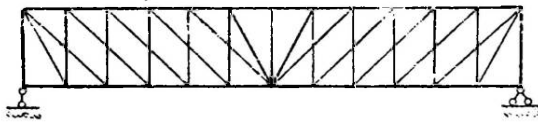
Черт. 143.



Черт. 144.

миться к возможному сокращению вычислительного процесса. Это достигается: симметрией в основной системе, устранением связей, усилие в которых распространяет свое влияние на меньшее число остальных стержней фермы, устранением связей, создающих более простую по расчету основную систему, и т. д.

Например при расчете трех (и более)-пролетных неразрезных ферм (черт. 142) целесообразно расчленять ее на отдельные двухопорные фермы путем устранения



Черт. 145.

поясного стержня у каждой опоры (черт. 142, б). При таком выборе основной системы неизвестные усилия устраненных связей вызывают усилия только в стержнях двух ферм, к которым они приложены, а заданная нагрузка вызывает усилия

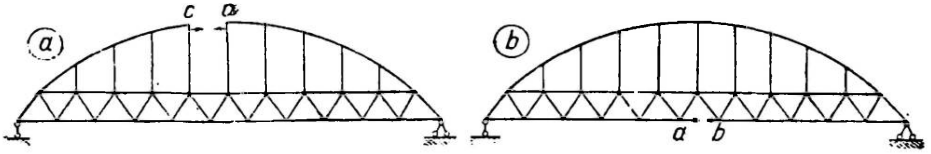
только в стержнях той двухопорной фермы, к которой она приложена. Благодаря этому значительно сокращается вычислительный процесс.

Двухшарнирную арочную ферму (черт. 143) целесообразно приводить к балочной ферме путем устранения горизонтальной связи в одной из опор с заменой ее неизвестным усилием распора. Расчет такой двухопорной фермы проще, чем трехшарнирной арки, которая могла бы быть получена устранением одного из внутренних стержней.

В фермах статически неопределимых по внутреннему образованию основная система получается устранением соответственного числа стержней.

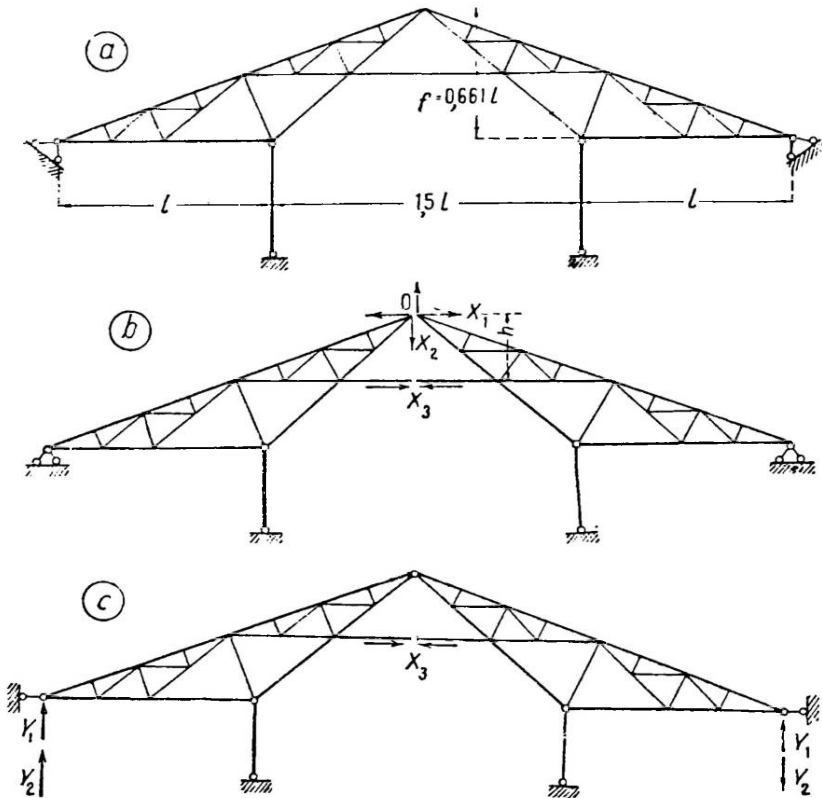
Например выбор основной системы для расчета комбинированной системы, показанной на черт. 144, может быть сделан устранением стержня либо в ароч-

ной части, либо в ее балочной части. Предпочтение должно быть отдано первому приему (черт. 146,а), так как в этом случае заданная нагрузка не будет вызывать усилий в арочной части. При устранении стержня в балочной части (черт. 146,б)



Черт. 146.

это упрощение отпадает. Кроме того с устранением стержня в арочной части основная система представляет собой балочную ферму более простую по расчету, чем комбинированная система, получаемая при устранении стержня в балочной части системы.

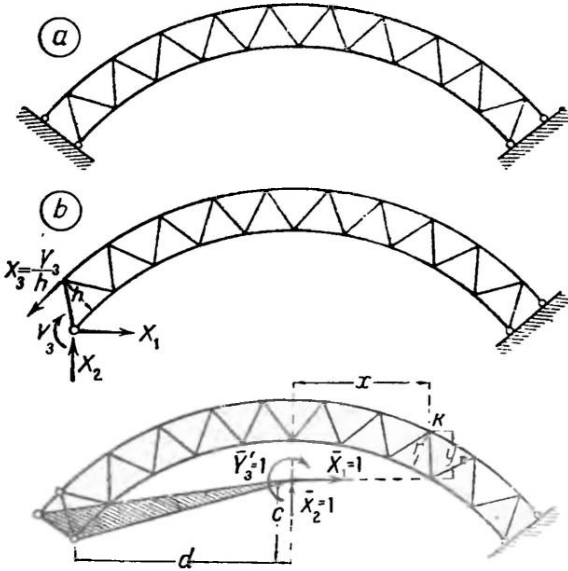


Черт. 147.

При выборе основной системы в статически неопределимых фермах следует учитывать возможность упрощения канонических уравнений путем введения парных неизвестных и путем преобразования системы координат; для этого нужно, чтобы расположение лишних неизвестных в основной системе удовлетворяло требованиям, указанным в § 9—11.

Например расчет трижды статически неопределимой системы, показанной на черт. 147,а, может быть упрощен выбором симметричной основной системы в виде двухопорных консольно-балочных ферм (черт. 147,б) с лишними неизвестными усилиями X_1 , X_2 и X_3 . Вследствие обратной симметрии неизвестного X_3 и прямой симметрии двух других неизвестных побочные перемещения $\delta_{1,2} = \delta_{2,1} = \delta_{2,3} = \delta_{3,2} = 0$. Обращение в нуль побочных перемещений $\delta_{1,3} = \delta_{3,1}$ может быть достигнуто переносом неизвестного X_1 и момента $Y_3 = X_3 h$ в мгновенный центр (§ 11), положение которого определяется расстоянием c от точки 0 по формуле (22):

$$c = -\frac{\delta_{13}}{\delta_{23}} = -\frac{\sum \bar{N}_1 \bar{N}_3 \frac{s}{F}}{\sum \bar{N}_3^2 \frac{s}{F}}$$



Черт. 148.

Такие же упрощения могут быть достигнуты, если для той же системы (черт. 147,а) принять основную систему в виде трехшарнирной арки (черт. 147,с) с консолями, приложив к ней усилие X_3 и две симметрично расположенные, неравные реакции X_1 и X_2 . Последние могут быть приведены к прямо и обратно симметричным парным неизвестным Y_1 и Y_2 (§ 9), что вызывает обращение в нуль перемещения $\delta_{1,2} = \delta_{2,1}$ и $\delta_{2,3} = \delta_{3,2}$.

Когда ферма представляет собой замкнутый контур без опорных шарниров и без шарниров, расчленяющих ее на отдельные звенья (черт. 148, а), усилия \bar{N}_1 , \bar{N}_2 и \bar{N}_3 во всех ее стержнях, вызываемые единич-

ными воздействиями, приложенными по направлению неизвестных, определяются выражениями (черт. 148,б):

$$\bar{N}_1 = 1 \frac{y}{r}; \quad \bar{N}_2 = 1 \frac{x}{r}; \quad \bar{N}_3 = 1 \frac{1}{r},$$

где x , y — координаты точек Риттера стержней фермы, а r — плечо стержней относительно этих точек.

Координаты же мгновенного центра определяются по формулам:

$$c = -\frac{\sum y \frac{s}{Fr^2}}{\sum \frac{s}{Fr^2}}; \quad d = \frac{\sum x \frac{s}{Fr^2}}{\sum \frac{s}{Fr^2}}. \quad (110)$$

В них оба числителя могут рассматриваться как статические моменты фиктивных упругих грузов:

$$W_k = \frac{s}{Fr^2}, \quad (111)$$

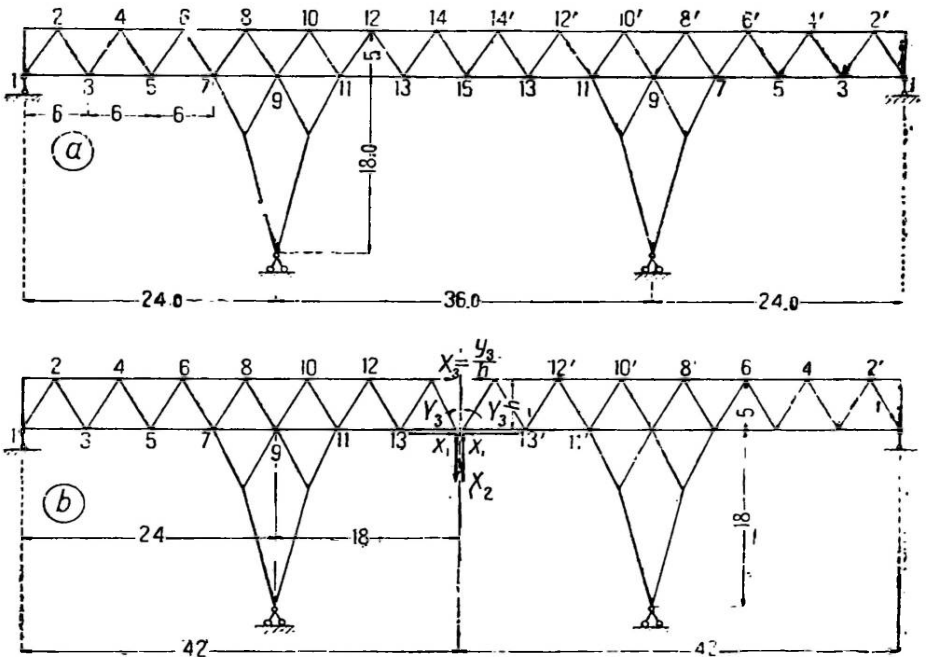
а знаменатели — как равнодействующая тех же грузов. В этом случае мгновенный центр совпадает с центром фиктивных упругих грузов.

Если пояса фермы с замкнутым контуром параллельны между собой, то усилия \bar{N}_3 в решетке, вызываемые моментом $\bar{Y}_3 = 1$, равны нулю. Это значительно сокращает вычислительный процесс. Можно отметить, что в арочных фермах

с непараллельными поясами усилия в стержнях решетки, вызываемые моментом $Y_3 = 1$ малы по сравнению с усилиями в поясах; это позволяет пренебречь ими при вычислении координат центра фиктивных упругих грузов. Определение центра фиктивных упругих грузов может быть сделано аналитически или графически.

Пример 13. Требуется определить координаты мгновенного центра в ферме, показанной на черт. 149.

В качестве основной системы принимаем две симметричные консольно-балочные фермы (черт. 149, б) с неизвестными силами X_1 , X_2 и моментом $Y_3 = X_3 h$.



Черт. 149.

Величины усилий N , входящие в выражение (110), могут быть определены аналитически или построением планов Кремона, рассматривая ферму отдельно под действием следующих единичных воздействий (черт. 150):

1) Опорные реакции от единичного воздействия $\bar{X}_1 = 1$.

$$\bar{A} = -\frac{18}{24} \bar{X}_1 = -0,75; \quad \bar{B}_y = 0,75; \quad \bar{B}_x = -1.$$

2) Опорные реакции от единичного воздействия $\bar{Y}_3 = 1$ или пары сил:

$$\bar{X}_3 = \frac{\bar{Y}_3}{h} = 0,2.$$

$$\bar{A} = -\frac{\bar{Y}_3}{24} = -0,4167; \quad \bar{B}_y = +0,4167; \quad \bar{B}_x = 0.$$

3) Опорные реакции от единичного воздействия $\bar{X}_2 = 1$.

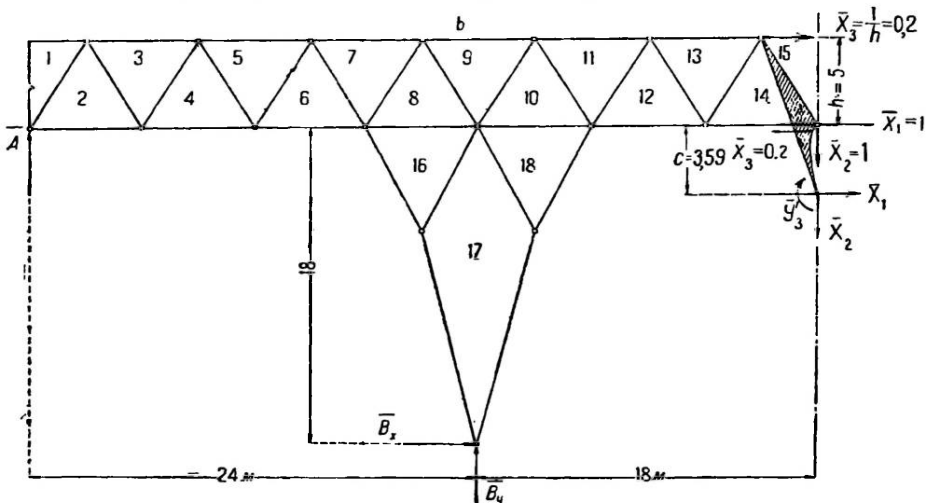
$$\bar{A} = -0,75; \quad \bar{B}_y = 1,75; \quad \bar{B}_x = 0.$$

Усилия в элементах рассматриваемой фермы, вычисленные для указанных единичных воздействий, выписаны в нижеприводимой табл. 24.

Усилия от единичных воздействий

| № элемен- тов | Длина стержня в м с | Продольные усилия | | | $\bar{N}_1 \bar{N}_2 s$ | $\bar{N}_3^2 s$ |
|-------------------|---------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|-------------------------|-----------------|
| | | от $\bar{X}_1 = 1$ \bar{N}_1 | от $\bar{X}_2 = 1$ \bar{N}_2 | от $\bar{Y}_3 = 1$ \bar{N}_3 | | |
| 1 | 3,00 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 6,00 | -0,45 | -0,45 | -0,025 | +0,0675 | 0,0038 |
| 3 | 6,00 | +0,90 | +0,90 | +0,050 | +0,2700 | 1,0150 |
| 4 | 6,00 | -1,35 | -1,35 | -0,075 | +0,6075 | 0,0338 |
| 5 | 6,00 | +1,80 | +1,80 | +0,100 | +1,0800 | 0,0600 |
| 6 | 6,00 | -2,25 | -2,25 | -0,125 | +1,6875 | 0,0938 |
| 7 | 6,00 | +2,70 | +2,70 | +0,150 | +2,4300 | 0,1350 |
| 16—8 | 6,00 | -1,191 | -2,428 | -0,1578 | +1,1273 | 0,1494 |
| 9 | 6,00 | +1,463 | +2,813 | +0,1813 | +1,5905 | 0,1971 |
| 18—10 | 6,00 | -0,341 | -2,278 | -0,1827 | +0,3736 | 0,2005 |
| 11 | 6,00 | 0 | +2,400 | +0,20 | 0 | 0,2400 |
| 12 | 6,00 | +1,0 | -1,800 | -0,20 | -1,2000 | 0,2400 |
| 13 | 6,00 | 0 | +1,20 | +0,20 | 0 | 0,2400 |
| 14 | 6,00 | +1,0 | -0,60 | -0,20 | -1,2000 | 0,2400 |
| 15 | $1/2 \cdot 6,0$ | 0 | 0 | +0,20 | 0 | 0,120 |
| 16 | 6,708 | -1,992 | -0,734 | -0,0175 | +0,2334 | 0,0021 |
| 18 | 6,708 | +1,363 | -0,734 | -0,0175 | -0,1597 | 0,0021 |
| 17 | 12,368 | -2,449 | -0,902 | -0,0215 | +0,6502 | 0,0057 |
| 17 | 12,368 | 1,675 | -0,902 | -0,0215 | -0,4449 | 0,0057 |
| $\Sigma = 7,1129$ | | | | | $\Sigma = 1,9838$ | |

В целях упрощения расчета определение координат мгновенного центра сделано без учета влияния усилий в решетке фермы¹. С той же целью поперечные сечения поясных элементов фермы приняты постоянными, равными средней площади F см².



Черт. 150.

¹ Сделанная проверка показала, что при учете влияния усилий в решетке расстояние с мгновенного центра равно 3,785 м, т. е. больше принятого в расчете на 0,2 м (6%). Это изменение положения центра в конечном результате вызвало изменение величины неизвестного X_1 на 12%, неизвестного X_2 на 1,6%.

При предварительных подсчетах такая неточность расчета допустима.

В табл. 24 выписаны величины произведений $\bar{N}_1, \bar{N}_3s, \bar{N}_3^2s$, необходимые для определения искомого расстояния c . По этим данным

$$c = \frac{2 \cdot 7,1129}{2 \cdot 1,9838} = 3,585 \text{ м.}$$

С переносом в мгновенный центр всех неизвестных (черт. 150) побочные перемещения $\delta_{13} = \delta_{21} = 0$, что приводит уравнения деформаций к уравнениям с одним неизвестным в каждом:

$$X_1 = -\frac{\Delta_1 p}{\delta_{11}}; \quad X_2 = -\frac{\Delta_2 p}{\delta_{22}}; \quad X_3 = -\frac{\Delta_3 p}{\delta_{33}}.$$

Пример 14. Разберем пример определения центра фиктивных упругих грузов в ферме рамного типа, показанной на черт. 151.

Примем в качестве основной системы ферму, заделанную кояцом (черт. 151, б) с приложенными к ней силами X_1, X_2 и моментом $Y_3 = X_3 h$.

Необходимые для расчета величины упругих грузов вычисляются по формуле (111):

$$W = \frac{s}{Fr^2}.$$

В условиях рассматриваемой фермы момент Y_3 не вызывает усилий в стержнях решетки. Длины s всех поясных стержней, площади F сечений и плечи r их относительно узлов во всей ферме одинаковые; это обеспечивает равенство по величине всех упругих грузов, отнесенных к узлам фермы.

Находим центр фиктивных упругих грузов графически путем построения двух веревочных многоугольников. Оно выполнено на черт. 152. Точкой O пересечения направлений равнодействующих R_{10} определяется центр фиктивных упругих грузов.

Произведем проверку правильности всего построения путем определения координат центра по формулам (110), определив величины перемещений из графического построения.

Величины линейных перемещений δ_{13} и δ_{23} определяются как статические моменты по отрезкам u и v , параллельным равнодействующей фиктивных упругих сил и заключенным между крайними сторонами веревочного многоугольника, построенного для этих сил (ч. 1, § 95).

Перемещение δ_{13} по направлению неизвестного X_1 определяется величиной:

$$\delta_{13} = \frac{uH}{k}.$$

и перемещение δ_{23} по направлению неизвестного X_2 — величиной:

$$\delta_{23} = \frac{vH}{k}.$$

В обоих выражениях H — полюсное расстояние; k — масштаб чертежа.

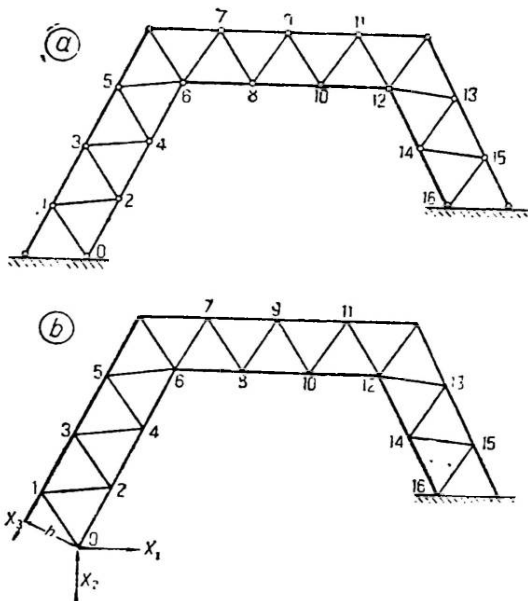
Величина углового перемещения δ_{33} определяется произведением:

$$\delta_{33} = zH,$$

где z — вертикальный отрезок, отсекаемый крайними сторонами веревочного многоугольника на расстоянии, равном единице от точки пересечения их (черт. 152, с).

По чертежу

$$u = 8 \text{ см}, \quad v = 8,5 \text{ см}, \quad z = 1,73, \quad k = 1:200;$$



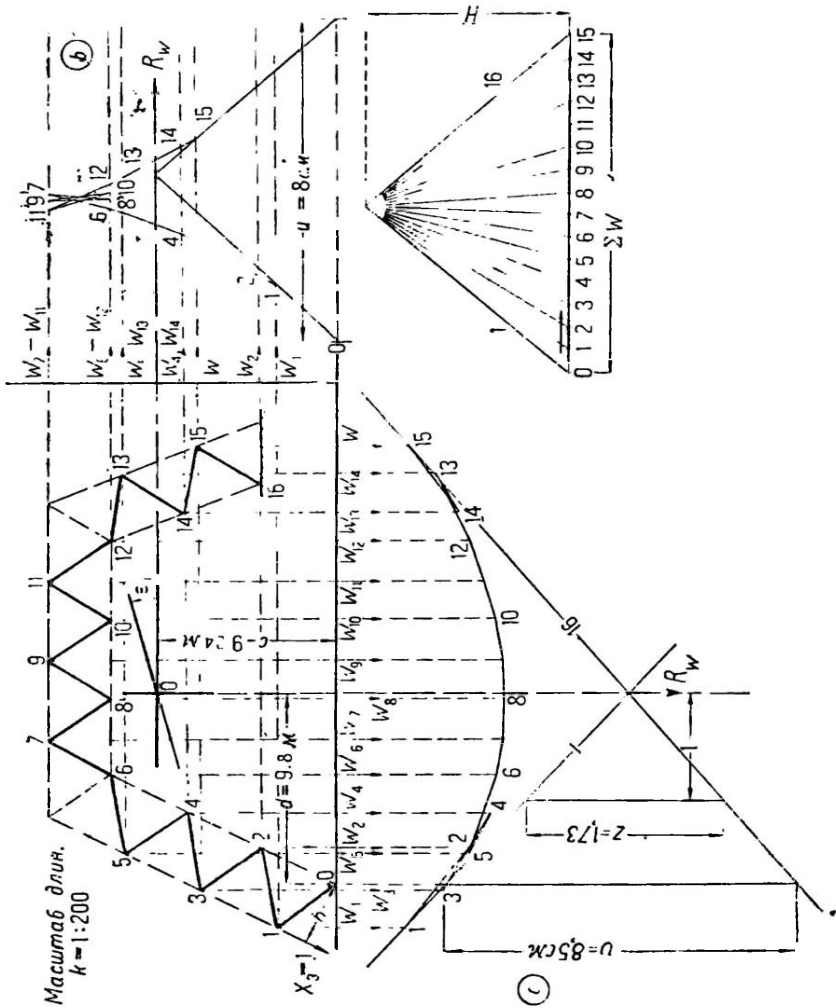
Черт. 151.

отсюда:

$$c = \frac{0,08 \cdot 200}{1,73} = 9,25 \text{ м}; \quad d = \frac{0,045 \cdot 200}{1,73} = 9,8 \text{ м},$$

что соответствует положению центра, найденному построением.

Так как система несимметрична, то для приведения к нулю перемещения $\delta_{12} = \delta_{21}$ надо перейти к главным осям (§ 10, 11).



Черт. 152.

Однако этот прием сопровождается сложными вычислениями и не создает упрощения, поэтому целесообразно остановиться на совместном решении уравнений:

$$X_1 \delta_{11} + X_3 \delta_{13} = -\Delta_{1p}$$

$$X_1 \delta_{31} + X_3 \delta_{33} = -\Delta_{3p}$$

$$X_2 \delta_{22} = -\Delta_{2p}$$

Перенос неизвестных X_1 и X_2 в мгновенный центр связан с вычислением новых по величине усилий \bar{N}_{1c} и \bar{N}_{2c} в стержнях фермы от единичных усилий $\bar{X}_1 = 1$ и $\bar{X}_2 = 1$, приложенных в точке, совпадающей с мгновенным центром.

Избегнуть в последующем расчете вычисления новых усилий \bar{N}_{1c} и \bar{N}_{2c} можно путем использования преобразования следующего вида.

Рассмотрим это преобразование в применении к усилию N_{1c} (черт. 150).

$$\bar{N}_{1c} X_1 = \frac{v-c}{r} X_1 = \frac{v}{r} X_1 - \frac{1}{r} c X_1 = \bar{N}_1 X_1 - \bar{N}_3 c X_1.$$

В этом преобразовании первый член $\bar{N}_1 X_1$ представляет собой усилие в стержне фермы от действия силы X_1 , приложенной в исходной точке; второй член представляет собой усилие в том же стержне от момента $X_1 c$ переноса, которое может быть выражено через усилие $\bar{N}_3 = \frac{1}{r}$ от момента $\bar{Y}_3 = 1$. Таким образом величина усилия $\bar{N}_{1c} X_1$ может быть вычислена по усилиям \bar{N}_1 и \bar{N}_3 , которые уже были определены при нахождении координат мгновенного центра (см. табл. 24).

§ 39. РАСЧЕТ НА ПОСТОЯННУЮ НАГРУЗКУ

Определение лишних неизвестных в статически неопределимых фермах делается путем решения канонических уравнений, составляемых по числу лишних связей, входящих в образование фермы и в прикреплении ее к земле.

Если канонические уравнения приводятся к системе уравнений с одним неизвестным в каждом, то сами неизвестные определяются отношениями:

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}}; \quad X_2 = -\frac{\Delta_{2p}}{\delta_{22}} \quad (112)$$

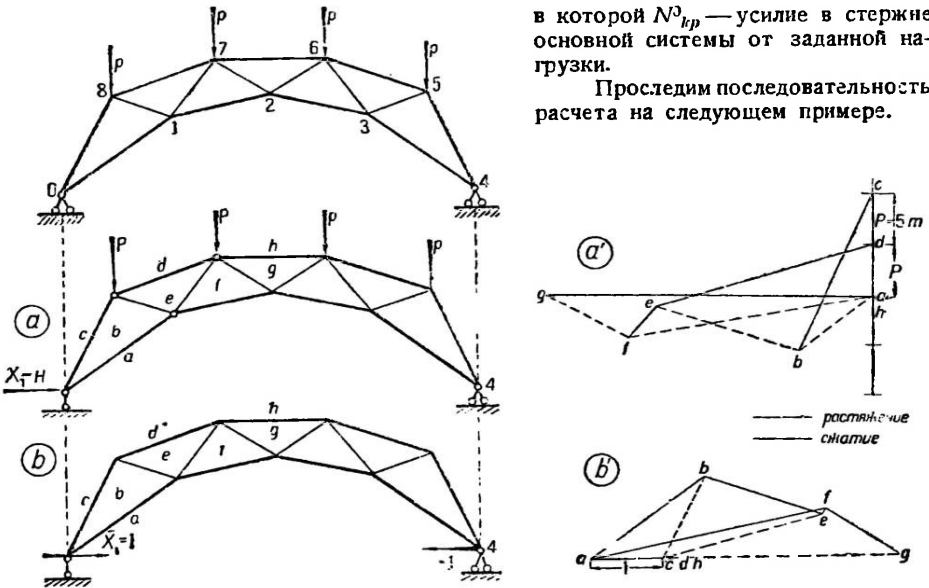
и т. д.

Вычисление окончательных усилий N_k в каждом стержне фермы, по которому производится проверка прочности, делается по формуле (3):

$$N_k = N_{kp}^0 + \bar{N}_{k1} X_1 + \bar{N}_{k2} X_2 + \dots + \bar{N}_{kn} X_n, \quad (113)$$

в которой N_{kp}^0 — усилие в стержне основной системы от заданной нагрузки.

Проследим последовательность расчета на следующем примере.



Черт. 153.

Пример 15. Пусть требуется произвести расчет двухшарнирной арочной фермы с нагрузкой, показанной на черт. 153.

1) Система один раз статически неопределима.

2) В качестве расчетной статически определенной системы принимаем ферму, свободно лежащую на двух опорах, с левой подвижной опорой, где приложена неизвестная сила — распор X_1 .

3) Определяем усилия в элементах фермы от заданной нагрузки (N_p^0) и от единичного воздействия (N_1), приложенного по направлению определяемого неизвестного (черт. 153, б). В рассматриваемом случае определение усилий целесообразно сделать построением плана Кремоны.

Вычисление перемещений проводим в табличной форме¹ (табл. 25):

Таблица 25

Вычисление перемещений Δ_{1p} и δ_{11} для фермы, показанной на черт. 153

| № элементов | s | F | $\frac{s}{F}$ | N_{ip}^0 | \bar{N}_{i1} | $\frac{\bar{N}_{i1}s}{F}$ | $\frac{N_{ip}^0 s}{F}$ | $\frac{N_{ip}^0 \bar{N}_{i1} s}{F}$ |
|-------------|------|-------|---------------|------------|----------------|---------------------------|------------------------|-------------------------------------|
| | m | m^2 | m^{-1} | m | m | m/m | m^2/m | m^2/m |
| 0-1 4-3 | 8,00 | 1 | 8,00 | 8,75 | -2,1 | -16,8 | 35,28 | -147,0 |
| 1-2 3-2 | 6,30 | 1 | 6,30 | 23,75 | -3,4 | -21,42 | 72,83 | -508,7 |
| 0-8 4-5 | 6,60 | 1 | 6,60 | -17,0 | +1,4 | -9,24 | 12,94 | -157,1 |
| 8-7 5-6 | 6,40 | 1 | 6,40 | -21,5 | +2,4 | 15,36 | 36,86 | -330,2 |
| 7-6 — | 6,00 | 1 | 1/2 6,00 | -31,26 | +3,4 | 10,2 | 34,68 | -318,9 |
| | | | | | | | $\Sigma = 192,59$ | -1 461,9 |
| 8-1 5-3 | 3,60 | 1/2 | 7,20 | +14,25 | -1,8 | -12,96 | 23,33 | -184,7 |
| 1-7 3-6 | 4,00 | 1/4 | 16,00 | +4,0 | +0,1 | 1,60 | 0,16 | +6,4 |
| 7-2 6-2 | 4,00 | 1/4 | 16,00 | +8,75 | -1,3 | -20,8 | 27,04 | -182,0 |
| | | | | | | | $\Sigma = 50,53$ | -373,1 |

4) Определяем неизвестное X_1 по формуле (112), в которую подставляем суммы складываемых из последних двух столбцов:

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} = -\frac{(-1 461,9 - 373,1) 2EF_0}{(192,59 + 50,53) 2EF_0} = 7,55 m.$$

Если пренебречь учетом влияния решетки, то величина неизвестного

$$X_1 = -\frac{-1 461,9}{192,59} = 7,54 m.$$

т. е. почти совпадает с величиной неизвестного, полученной при учете влияния решетки.

5) Вычисляем усилия в элементах заданной системы, пользуясь для этого формулой (113), которая приводится к виду:

$$N_i = N_{ip}^0 + \bar{N}_{i1} X_1.$$

Вычисление усилий дано в табл. 26.

Таблица 26

Усилия в элементах фермы, показанной на черт. 153

| Элементы | Усилия N_i | | Элементы | Усилия N_i | |
|----------|---------------------------|----------|----------|--------------------------|----------|
| | Формула | Величина | | Формула | Величина |
| 0-1 | $8,75 - 7,55 \cdot 2,1$ | -7,10 m | 8-1 | $14,25 - 7,55 \cdot 1,8$ | +0,51 m |
| 1-2 | $23,75 - 7,55 \cdot 3,4$ | -1,92 " | 1-7 | $-4,0 + 7,55 \cdot 0,1$ | -3,55 " |
| 0-8 | $-17,00 + 7,55 \cdot 1,4$ | -6,43 " | 7-2 | $+8,75 - 7,55 \cdot 1,3$ | -1,06 " |
| 8-7 | $-21,5 + 7,55 \cdot 2,4$ | -3,38 " | | | |
| 7-6 | $-31,26 + 7,55 \cdot 3,4$ | -5,93 " | | | |

¹ Величина множителя E не введена в определение членов вида $N_{ip}^0 \frac{s}{F}$ и $N_{ip}^0 \bar{N}_{i1} \frac{s}{F}$, так как она сокращается, как общий множитель, входящий в выражении числителя и знаменателя.

В разобранным примере выяснилось, что величина неизвестного очень мало изменяется от того, определена ли она с учетом усилий во всех стержнях или только с учетом усилий в поясных стержнях. Это подтверждается и другими аналогичными расчетами и объясняется следующим.

В фермах с простой решеткой влияние усилий в последней на величину перемещений составляет примерно 40—50% от влияния усилий в поясных стержнях. Влияние решетки значительно уменьшается в балочных фермах с параллельными поясами и в арочных фермах. Оно больше в балочных фермах с резко выраженным вогнутым контуром одного (черт. 157) или обоих поясов. Однако на величину неизвестных усилия в решетке влияют незначительно, так как они входят в числитель и знаменатель отношений (112), определяющих неизвестные; величина частного поэтому близка к величине, получаемой при учете деформаций только поясных стержней.

Обычно учет влияния деформаций решетки изменяет величину неизвестного примерно на 1—2%. Это позволяет пренебрегать в расчетах, особенно в первом приближении, влиянием решетки.

§ 40. КОНТРОЛЬ ВЫЧИСЛЕНИЙ В РАСЧЕТЕ ФЕРМ

При нескольких неизвестных в системе надо при составлении канонических уравнений проводить проверку правильности вычисления коэффициентов при неизвестных и свободных членах, входящих в уравнения. Эти проверки делаются приемами, указанными в § 12; изменяется только процесс вычисления перемещений, которые выполняются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} E \delta_{ks} &= \sum (\bar{N}_1 + \bar{N}_2 + \dots + \bar{N}_n) \bar{N}_k \frac{s}{F}, \\ E \delta_{ps} &= \sum (\bar{N}_1 + \bar{N}_2 + \dots + \bar{N}_n) N_p \frac{s}{F}. \end{aligned} \right\} \quad (114)$$

Независимо от этих проверок должна проводиться проверка всех вычислений по окончательным значениям усилий в заданной ферме, получаемым по формуле (113). Эта проверка аналогична проверке, делаемой в системах со сплошными сечениями, и состоит в вычислении перемещения в статически неопределимой системе, заведомо известного по своей величине. Вычисление перемещения производится по формуле:

$$\Delta_k = \sum_{i=1}^{i=m} N_i \frac{\bar{N}_{ik} s_i}{EF_i} = \sum_{i=1}^{i=m} (N_{pi} + \bar{N}_{i1} X_1 + \bar{N}_{i2} X_2 + \dots + \bar{N}_{ik} X_k + \dots + \bar{N}_{in} X_n) \frac{\bar{N}_{ik} s}{EF}. \quad (115)$$

Здесь m — число стержней;

n — число лишних неизвестных.

Входящая в формулу (115) величина окончательного усилия N_i известна, так как это усилие всегда вычисляется независимо от проводимой проверки; что

касается множителя $\frac{\bar{N}_{ik} s_i}{EF_i}$, то, если перемещение определяется по направлению неизвестного, это множитель также бывает известен для каждого стержня из вычислений, проводимых для определения коэффициентов при неизвестных. Таким образом указанный прием проверки не требует нового подготовительного вычислительного процесса, если перемещение определяется по направлению лишнего неизвестного. В этом случае определяемое перемещение:

$$\Delta_k = \sum_{i=1}^{i=n} N_i \frac{\bar{N}_{ik} s_i}{EF_i} = 0. \quad (116)$$

Приведем в качестве примера проверку правильности вычислений, сделанных в примере 15. Из этого расчета мы берем величины полных усилий N_i в стерж-

жнях фермы (см. табл. 26) и величины $\frac{\bar{N}_{i1}s_i}{F_i}$ для тех же стержней (см. табл. 25).

По этим данным вычисляем величины $N_i \frac{\bar{N}_{i1}s_i}{F}$. Вычисление дано в табл. 27.

Таблица 27

Контроль вычислений в расчете фермы, показанной на черт. 153

| Элементы | Усилие N_i | Величины $\bar{N}_{i1} \frac{s_i}{F}$ | $N_i \cdot N_{i1} \cdot \frac{s_i}{F}$ | |
|----------|--------------|---------------------------------------|--|---------|
| | | | + | - |
| 0-1 | -7,10 | -16,8 | 119,28 | — |
| 1-2 | -1,92 | -21,42 | 41,13 | — |
| 0-8 | -6,43 | 9,24 | — | — 58,41 |
| 8-7 | -3,38 | 15,34 | — | — 51,85 |
| 7-6 | -5,93 | 10,2 | — | — 60,49 |
| 8-1 | +0,51 | -12,96 | — | — 6,61 |
| 1-7 | -3,55 | 1,60 | — | — 5,68 |
| 7-2 | -1,06 | -20,83 | 22,08 | — |
| | | | 183,49 | 183,04 |

Величина перемещения

$$\Delta_k = 183,49 - 183,04 = 0,45.$$

Следовательно ошибка менее 0,5%, что вполне допустимо¹.

§ 41. ВЛИЯНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРНОГО РЕЖИМА

Изменение температурного режима статически неопределимых ферм по сравнению с температурой их замыкания в процессе сборки вызывает дополнительные напряжения в стержнях. Эти напряжения вычисляются по усилиям, вызываемым лишним неизвестным, которое определяется по формуле:

$$X_k = -\frac{\Delta_{kt}}{\delta_{kk}} = -\frac{Eaf^2 \sum \bar{N}_{ik}s_i}{\sum \bar{N}_{ik}^2 \frac{s_i}{F_i}} \quad (117)$$

Под знак суммы в числителе вносятся только те стержни фермы, которые подверглись изменению температурного режима. В эту сумму со знаком плюс входят те стержни, для которых усилия \bar{N}_i положительны (нагрев предполагается положительным).

Сумма, входящая в знаменатель, охватывает деформации всех стержней фермы (поясов и решетки). Это обстоятельство заставляет вычислять величину δ_{kk} с учетом влияния деформаций поясов и решетки. Неучет влияния деформации решетки может привести к ошибкам в величине неизвестного до 30% и даже 40%.

В соответствии с видом статически неопределимой системы представляется возможным допускать те или иные упрощения.

При расчете неразрезных ферм можно не учитывать величину неизвестного при равномерном нагреве обоих поясов фермы по незначительности ее влияния.

В системах комбинированных (черт. 144) влияние усилий N в стержнях балочной части ничтожно по сравнению с влиянием усилий в стержнях арочной

¹ Рекомендуется также прием проверки по работе T нагрузок $\sum (P_x x + P_y y)$ и внутренних усилий:

$$\sum (P_x x + P_y y) = \sum N_i s_i \quad (a)$$

Этот прием разработан Горбуновым и Уманским (см. сборник „Рамы и фермы“, М. 1933; статью „О зависимости между нагрузкой, усилием и геометрическими элементами стержневых систем“). Но по нашему мнению вычисление равенства (a) не менее сложно, чем вычисление $\sum N_i \bar{N}_{ik} \frac{s_i}{F_i}$ по подготовленным данным.

части и подвесок. Это позволяет не учитывать влияния усилий балочной части в сумме числителя.

В арочных системах с затяжкой, которая сама может подвергнуться изменению температурного режима, в числитель формулы (117) должен быть добавлен член, учитывающий влияние нагрева затяжки на t_1° :

$$X_{1t} = - \frac{(\alpha t^{\circ} \sum \bar{N}_1 s + \alpha t_1^{\circ} l) E}{\sum \bar{N}_1^2 \frac{s}{F}} \quad (118)$$

Первый член числителя может иметь любой знак, так как он определяет влияние нагрева стержней самой арки, в которых единичная сила, приложенная по направлению неизвестного (черт. 154), может вызывать усилия разных знаков. Второй член $\alpha t_1^{\circ} l$ положителен, так как он определяет влияние нагрева затяжки, которая растягивается усилием X_1 . Нагрев затяжки уменьшает величину температурного распора.

§ 42. ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАЗМЕРОВ СЕЧЕНИЙ СТЕРЖНЕЙ

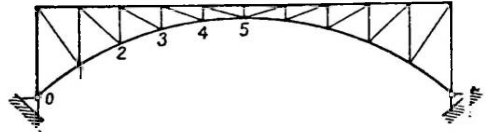
Расчет статически неопределимых ферм затрудняется необходимостью знать площади F поперечных сечений стержней, без чего невозможно вычисление величин δ и Δ в канонических уравнениях. Точный расчет может иметь место лишь в системах, в которых площади поперечных сечений всех стержней одинаковы; в этом случае величина площади F сечения может быть выведена за знак суммы в отношениях вида:

$$X_1 = - \frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} = - \frac{\frac{1}{EF} \sum N_p \bar{N}_1 s}{\frac{1}{EF} \sum \bar{N}_1^2 s}$$

и сокращается.

В фермах поперечные сечения поясных стержней и решетки сильно различаются между собой. Это заставляет делать предварительное определение необходимых величин сечений путем упрощенного расчета с введением ряда допущений.

В таких упрощенных расчетах не учитывают влияния деформаций решетки, которое обычно мало по сравнению с влиянием деформации поясов. Для характеристики влияния деформации решетки на величину распора в двухшарнирной арке (черт. 155) приводим в табл. 28 величины ординат линии влияния распора, вычисленные с учетом и без учета влияния деформации решетки ¹.



Черт. 155.

Таблица 28

Влияние учета деформации решетки на величину распора двухшарнирной арочной фермы (черт. 155). Ординаты линии влияния

| № ординат | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | |
|---------------------|---|------|------|------|------|------|
| С учетом решетки . | 0 | 0,38 | 0,74 | 1,09 | 1,36 | 1,47 |
| Без учета решетки . | 0 | 0,40 | 0,76 | 1,09 | 1,35 | 1,46 |

Незначительность влияния деформации решетки на величину неизвестного (в данном случае распора) объясняется тем, что неучет этой деформации в одинаковой степени изменяет величину числителя и знаменателя отношений (112), определяющих величину неизвестных.

При расчетах двухшарнирных арок делают предварительное определение поперечных сечений поясов, рассматривая арку, как трехшарнирную, затем задаются отношением

¹ Мюллер Бреслау, Графическая статика, вып. VIII, стр. 41, 1899.

$\frac{F_0}{F_u}$ поперечных сечений площади F_0 верхнего пояса к площади F_u нижнего пояса, считая

их как средние по длине пояса, и проводят расчет в этом предположении.

Для того чтобы показать, как влияет ошибка в отношении $F_0:F_u$ на величины усилий и распора, приводим в табл. 29 и 30 данные из расчетов двухшарнирной арочной фермы (черт. 155), сделанных в предположении:

$$F_0:F_u = 0,7; \quad F_0:F_u = 1; \quad F_0:F_u = 1,2.$$

Таблица 29

Влияние отношения $\frac{F_0}{F_u}$ на величину распора двухшарнирной фермы (черт. 155).
Ординаты линии влияния

| Отношение $F_0:F_u$ | № узлов | | | | | |
|------------------------|---------|------|------|------|------|------|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 0,7 | 0 | 0,39 | 0,77 | 1,13 | 1,42 | 1,55 |
| 1 | | 0,38 | 0,74 | 1,09 | 1,36 | 1,47 |
| 1,2 | 0 | 0,37 | 0,73 | 1,06 | 1,32 | 1,42 |

Из табл. 29 и 30 видно, что изменение отношений $F_0:F_u$ на $\pm 20\%$ сравнительно мало отзывается на изменении величины распора; оно больше в средней части, где разница достигает $3,5\%$. Также мало оно отзывается на изменении усилий в нижнем криволинейном поясе арки (черт. 155).

Влияние изменения этого отношения на величину распора, вызываемого изменением температуры, ничтожно (разница менее $0,1\%$).

Далее допускают в первоначальном расчете, что длина s стержней поясов одинакова, что значительно сокращает вычислительный процесс.

Таблица 30

Влияние отношения $\frac{F_0}{F_u}$ на величину усилий в стержнях поясов двухшарнирной арочной фермы (черт. 155). Усилия в m

| Отношение $\frac{F_0}{F_u}$ | Э л е м е н т ы п о я с о в | | | | | | | | | |
|--------------------------------|-----------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | O_1 | O_2 | O_3 | O_4 | O_5 | U_1 | U_2 | U_3 | U_4 | U_5 |
| 0,7 | 13 | 29 | 46 | 63 | 69 | 72 | 70 | 73 | 76 | 69 |
| 1,0 | 13 | 30 | 50 | 71 | 61 | 67 | 64 | 65 | 66 | 61 |
| 1,2 | 14 | 32 | 50 | 73 | 89 | 65 | 63 | 64 | 64 | 57 |

В предварительных расчетах комбинированных систем (черт. 144) рекомендуют принимать отношение средней площади F_ϕ поясов балочной фермы к средней площади F_c арочной части равным примерно $0,4-0,5$ т. е.:

$$F_\phi:F_c = 0,4 \div 0,5.$$

При расчетах неразрезной фермы рассматривают ее как неразрезную балку, определяют для нее опорные моменты и по этим последним определяют усилия в стержнях фермы и их площади сечений.

В отдельных случаях при наличии рассчитанной фермы, подобной той, которая проектируется, можно делать предварительное определение площадей по условию пропорциональности.

Предположим, что имеется ферма, в которой площади F поперечных сечений стержней вычислены по условию:

$$F = \frac{M}{h[\sigma]} = \frac{qx(1-z)l^2}{2h[\sigma]}.$$

Здесь $z = \frac{x}{l}$, q — сплошная равномерно распределенная нагрузка; $[\sigma]$ — допущенное напряжение; h — плечо усилия в стержне.

Если проектируемая ферма подобна первой, имеет пролет l_1 и отношения $\frac{h_1}{l_1} = \frac{h}{l}$, то площади F_1 сечений ее стержней могут быть определены приближенно по отношению:

$$\frac{F_1}{F} = \frac{q_1 l_1 [\sigma]}{q l [\sigma_1]}.$$

После того как тем или иным упрощенным путем будут определены площади поперечных сечений, должен быть сделан новый расчет всей системы с учетом полученных значений площадей сечений и действительных длин s стержней фермы. Но и в этом последующем расчете арочных ферм и балочных ферм с параллельными поясами можно не учитывать влияния деформации решетки на определение величины неизвестного. Обычно этого второго расчета бывает достаточно для проектировки фермы.

§ 43. РАСЧЕТ НА ПОДВИЖНУЮ НАГРУЗКУ

Расчет статически неопределимых балочных и арочных ферм на подвижную нагрузку проводится при помощи линий влияния. Построение последних делается на основе соображений, изложенных в § 14—15 настоящего курса.

Для построения их в расчетах ферм используются или упругие грузы (ч. I, § 98) или диаграммы Виллио (ч. I, § 110).

Вычисление упругих грузов можно делать по формулам, приведенным в табл. 31; но в отдельных случаях, в частности в фермах со сложной решеткой, приходится вычисление упругих грузов делать по исходной формуле [ч. I, § 98, формула (201)]:

$$EW = \sum \bar{N}_m \bar{N}_x \frac{s}{F}, \quad (119)$$

в которой \bar{N}_m — усилия в стержнях фермы от единичных пар, прикладываемых к стержням, ограничивающим узел фермы, в котором определяется упругий груз \bar{N}_x — усилие от единичного воздействия приложенного по направлению неизвестного

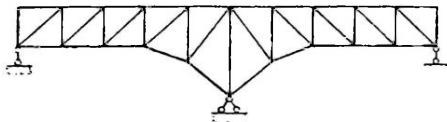
В фермах с параллельными поясами и близкими к ним, а также в арочных фермах можно пренебрегать влиянием усилий в решетках на величину упругих грузов; это значительно упрощает вычисление их. Поясные усилия в фермах, как известно, выражаются через моменты, поэтому формулы упругих грузов, учитывающие влияние только деформации поясов¹, приводятся к виду [ч. I, § 98, формула (202)]:

$$EW_m = \frac{\bar{N}_x s}{h_m F \cos \alpha} = \frac{\bar{M}_x d}{F h_m^2 \cos^3 \alpha}. \quad (120)$$

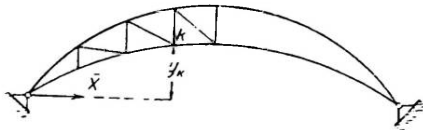
В ней \bar{N}_x — усилия в поясном элементе от единичного воздействия $\bar{X} = 1$ по направлению неизвестного; α — угол наклона поясного стержня к горизонту; d — горизонтальное расстояние между узлами фермы; h_m — высота фермы по вертикали у узла, относительно которого берется момент; $s = \frac{d}{\cos \alpha}$ — длина стержня пояса; $h_m \cos \alpha$ — плечо поясного усилия относительно точки моментов (черт. 156).

В частном случае балочной фермы с параллельными поясами и одинаковой длиной панели (черт. 157) формула (120) приводится к виду:

$$EW_m = \frac{d \bar{N}_x}{h F}, \quad (121)$$



Черт. 157.



Черт. 158.

¹ Если контур фермы резко изменяется (черт. 157) и отношение высоты фермы к пролету резко возрастает, влияние решетки на величину упругих грузов значительно возрастает и пренебрегать им нельзя. Например, в примере, разобранным в части I на стр. 275 влияние решетки на упругие грузы в углах 0, 1, 2, 3 равно нулю, влияние же ее на упругие грузы в углах 6, 7 доходит до 60%.

Выражения для величин фиктивных грузов в простых фермах

| Схема фермы | Выражение фиктивного груза |
|-------------|---|
| | <p>Груз, прикладываемый в узле нижнего пояса:</p> $W_{m-1} = \frac{-1}{h_{m-1}} \left[-\frac{\Delta O_m}{\cos \beta_m} + \frac{\Delta D_{m-1}}{\cos \varphi_{m-1}} + \frac{\Delta D_m}{\cos \varphi_m} \right].$ <p>Груз, прикладываемый в узле нижнего пояса:</p> $W_m = \frac{1}{h_m} \left(\frac{\Delta U_{m+1}}{\cos \alpha_{m+1}} - \frac{\Delta D_m}{\cos \varphi_m} - \frac{\Delta D_{m+1}}{\cos \varphi_{m+1}} \right).$ |
| | <p>Груз, прикладываемый в узле нижнего пояса:</p> $W_m = -\frac{1}{h_m} \left[-\frac{\Delta U_{m+1}}{\cos \alpha_{m+1}} + \frac{\Delta O_m}{\cos \beta_m} - \frac{\Delta D_m}{\cos \varphi_m} + \frac{\Delta D_{m+1}}{\cos \varphi_{m+1}} + \frac{\Delta V_{m-1} h_m}{d_m} - \Delta V_m (\operatorname{tg} \varphi_{m+1} + \operatorname{tg} \beta_m) \right].$ <p>Груз, прикладываемый в узле верхнего пояса:</p> $W_m = \frac{1}{h_m} \left[\frac{\Delta U_{m+1}}{\cos \alpha_{m+1}} - \frac{\Delta O_m}{\cos \beta_m} + \frac{\Delta D_m}{\cos \varphi_m} - \frac{\Delta D_{m+1}}{\cos \varphi_{m+1}} - \Delta V_m (\operatorname{tg} \varphi_m - \operatorname{tg} \alpha_{m+1}) + \frac{\Delta V_{m+1} h_m}{d_{m+1}} \right].$ |
| | <p>Груз, прикладываемый в узле нижнего пояса:</p> $W_m = -\frac{1}{h_m} \left[\frac{\Delta O_{m+1}}{\cos \beta_{m+1}} - \frac{\Delta U_m}{\cos \alpha_m} + \frac{\Delta D_m}{\cos \varphi_m} - \frac{\Delta D_{m+1}}{\cos \varphi_{m+1}} + \frac{\Delta V_{m+1} h_m}{d_{m+1}} - \Delta V_m (\operatorname{tg} \varphi_m - \operatorname{tg} \beta_{m+1}) \right].$ <p>Груз, прикладываемый в узле верхнего пояса:</p> $W_m = \frac{1}{h_m} \left[\frac{\Delta U_m}{\cos \alpha_m} - \frac{\Delta O_{m+1}}{\cos \beta_{m+1}} - \frac{\Delta D_m}{\cos \varphi_m} + \frac{\Delta D_{m+1}}{\cos \varphi_{m+1}} - \Delta V_m (\operatorname{tg} \alpha_m + \operatorname{tg} \varphi_{m+1}) - \frac{\Delta V_{m-1} h_m}{d_m} \right].$ |
| | <p>Груз, прикладываемый в узле нижнего пояса:</p> $W_m = -\frac{1}{h_m} \left[\frac{\Delta O_m}{\cos \beta_m} + \frac{\Delta O_{m+1}}{\cos \beta_{m+1}} - \frac{\Delta D_m}{\cos \varphi_m} - \frac{\Delta D_{m+1}}{\cos \varphi_{m+1}} + \frac{\Delta V_{m-1} h_m}{d_m} + \frac{\Delta V_{m+1} h_m}{d_{m+1}} - \Delta V_m (\operatorname{tg} \beta_m - \operatorname{tg} \beta_{m+1}) \right].$ <p>Груз, прикладываемый в узле верхнего пояса:</p> $W_m = \frac{1}{h_m} \left[-\frac{\Delta O_m}{\cos \beta_m} - \frac{\Delta O_{m+1}}{\cos \beta_{m+1}} + \frac{\Delta D_m}{\cos \varphi_m} + \frac{\Delta D_{m+1}}{\cos \varphi_{m+1}} - \Delta V_m (\operatorname{tg} \varphi_m + \operatorname{tg} \varphi_{m+1}) \right].$ |

| Схема фермы | Выражение фиктивного груза |
|-------------|--|
| | <p>Груз, прикладываемый в узле нижнего пояса:</p> $W_m = -\frac{1}{h_m} \left[-\frac{\Delta U_m}{\cos \alpha_m} - \frac{\Delta U_{m+1}}{\cos \alpha_{m+1}} + \frac{\Delta D_m}{\cos \varphi_m} + \frac{\Delta D_{m+1}}{\cos \varphi_{m+1}} - \Delta V_m (\operatorname{tg} \varphi_m + \operatorname{tg} \varphi_{m+1}) \right].$ <p>Груз, прикладываемый в узле верхнего пояса:</p> $W_m = \frac{1}{h_m} \left[\frac{\Delta U_m}{\cos \alpha_m} + \frac{\Delta U_{m+1}}{\cos \alpha_{m+1}} - \frac{\Delta D_m}{\cos \varphi_m} - \frac{\Delta D_{m+1}}{\cos \varphi_{m+1}} + \frac{\Delta V_{m-1} h_m}{d_m} + \frac{\Delta V_{m+1} h_m}{d_{m+1}} - \Delta V_m (\operatorname{tg} \alpha_m - \operatorname{tg} \alpha_{m+1}) \right].$ |
| | <p>Груз, прикладываемый в узле нижнего пояса:</p> $W_m = -\frac{1}{h_m} \left[\Delta O_{m+1} - \Delta U_{m+1} + \frac{1}{\cos \varphi} (-\Delta D_m + \Delta D'_m + \Delta D_{m+1} - \Delta D'_{m+1}) + \operatorname{tg} \varphi (2\Delta V_{m-1} + \Delta V'_{m-1} - 3\Delta V'_m - \Delta V'_m + \Delta V_{m+1}) \right].$ <p>Груз, прикладываемый в узле верхнего пояса:</p> $W_m = \frac{1}{h_m} \left[\Delta U_{m+1} - \Delta O_{m+1} + \frac{1}{\cos \varphi} (-\Delta D'_m + \Delta D_m + \Delta D'_{m+1} - \Delta D_{m+1}) + \operatorname{tg} \varphi (2\Delta V'_{m+1} + \Delta V''_{m+1} - 3\Delta V'_m - \Delta V'_m + \Delta V_{m+1}) \right].$ |

в которой отношение $d:h$ постоянно и может рассматриваться как масштабный множитель.

В расчетах апочных ферм, в которых за неизвестное принят распор, формула (120) приводится к виду (черт. 158):

$$EW_m = y_k \frac{d}{Fh^2 \cos^2 \alpha}, \tag{122}$$

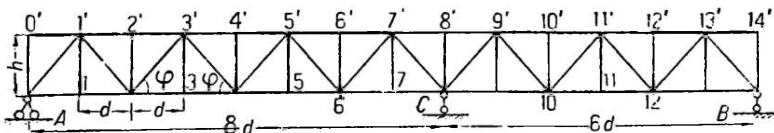
где y_k — расстояние от линии действия распора до узла фермы.

После построения линии влияния неизвестного линии влияния в остальных стержнях фермы строятся на основе формулы (39):

$$N = N^0 + \overline{N}_1 \overline{X}_1 + \overline{N}_2 \overline{X}_2 + \dots$$

с использованием указаний, данных в § 16.

Пример 16. Рассмотрим процесс построения линий влияния в двухпролетной ферме, показанной на черт. 159.

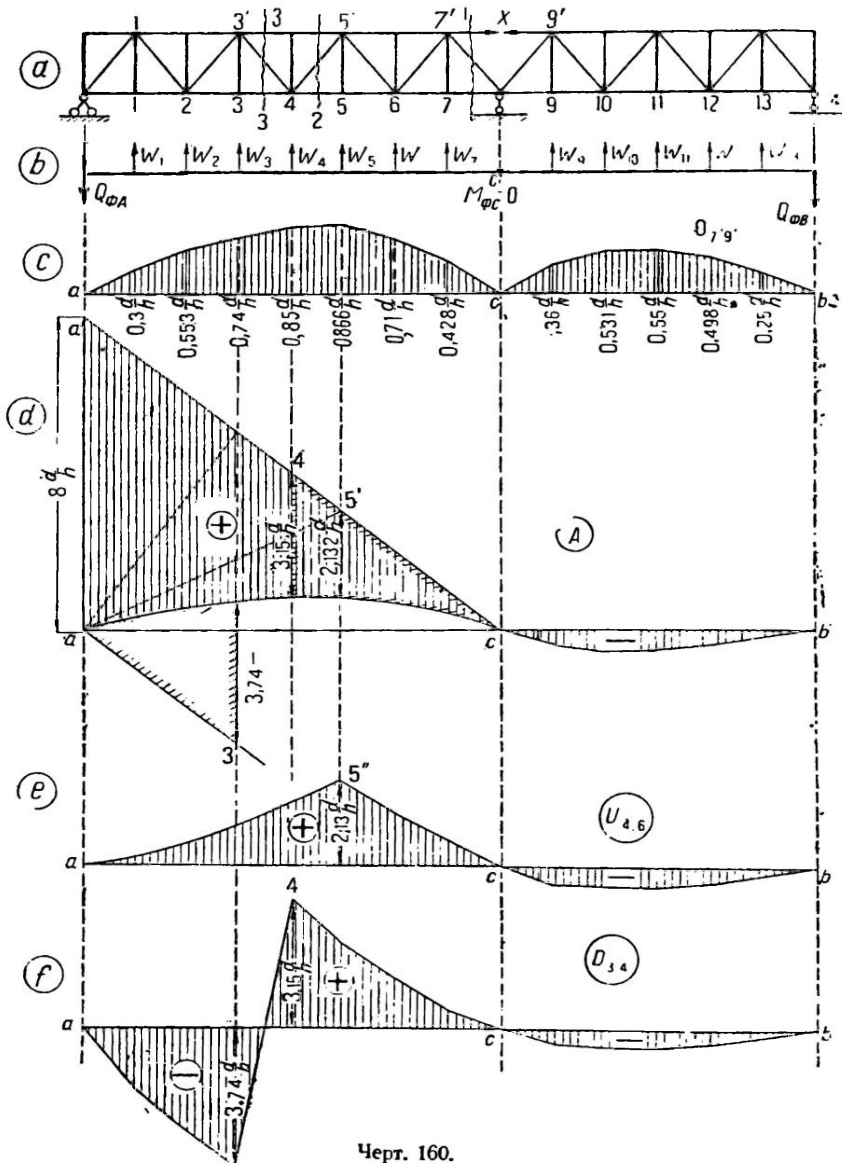


Черт. 159.

Эта ферма однажды статически неопределима; ее расчет целесообразно провести, приняв за лишнее неизвестное усилие в стержне 7'—9'; с устранением его система приводится к двум двухопорным фермам (черт. 160).

Входящий в выражение для неизвестного знаменатель целесообразно в данном случае определить расчетом путем суммирования по таблице. Что касается числителя δ_{71} , то определение его может быть сделано аналитически по упругим грузам от единичного воздействия на систему в направлении лишнего неизвестного (черт. 160, а). Вычисление этих упругих грузов делаем по формуле (121):

$$W = \pm \frac{N_2 d}{EFh}$$



Черт. 160.

Геометрические элементы и усилия от единичного воздействия в ферме примера 16

| Элемент фермы | F см ² | \bar{N} кг | $\frac{\bar{N}s}{EF}$ см | $\frac{\bar{N}^2s}{EF}$ кг·см | Элемент фермы | F см ² | \bar{N} кг | $\frac{\bar{N}s}{EF}$ см | $\frac{\bar{N}^2s}{EF}$ кг·см |
|---------------|---------------------|------------------|--------------------------|-------------------------------|---------------|---------------------|------------------|--------------------------|-------------------------------|
| 0—2 | $\frac{2}{3} F_0$ | $-\frac{1}{8}$ | $-90 k$ | $90 m$ | 7—9 | F_0 | +1 | $480 k$ | $3840 m$ |
| 1—3 | $\frac{2}{3} F_0$ | $+\frac{1}{8} 2$ | $+180 k$ | $360 m$ | 8—10 | $\frac{5}{6} F_0$ | $-\frac{1}{6} 5$ | $-480 k$ | $3200 m$ |
| 2—4 | F_0 | $-\frac{1}{8} 3$ | $-180 k$ | $540 m$ | 9—11 | $\frac{5}{6} F_0$ | $+\frac{1}{6} 4$ | $+384 k$ | $2048 m$ |
| 3—5 | F_0 | $-\frac{1}{8} 4$ | $+240 k$ | $960 m$ | 10—12 | $\frac{4}{5} F_0$ | $-\frac{1}{6} 3$ | $-300 k$ | $1200 m$ |
| 4—6 | $\frac{3}{4} F_0$ | $-\frac{1}{8} 5$ | $-400 k$ | $2000 m$ | 11—13 | $\frac{2}{3} F_0$ | $+\frac{1}{6} 2$ | $+240 k$ | $640 m$ |
| 5—7 | F_0 | $+\frac{1}{8} 6$ | $+360 k$ | $2360 m$ | 12—14 | $\frac{2}{3} F_0$ | $-\frac{1}{6} 1$ | $-120 k$ | $160 m$ |
| 6—8 | $\frac{5}{4} F_0$ | $-\frac{1}{8} 7$ | $-336 k$ | $2352 m$ | | | | $\Sigma = 19750 m$ | |

В табл. 32 даны величины поперечных сечений F элементов, а также значения усилий \bar{N} от единичного воздействия.

В этой таблице множители

$$k = \frac{1}{30} \cdot \frac{d}{8F_0E} = \frac{d}{240F_0E}; \quad m = \frac{1}{8} k$$

введены, как общие множители, для упрощения вычислений.

Суммой членов последнего столбца определяется величина:

$$\bar{v}_{11} = 19750 \frac{k}{8}.$$

Подставляя данные из этой таблицы в выражения для упругих грузов, получим следующие величины их:

В левом пролете:

$$W_1 = +\frac{1}{h} 90 k; \quad W_2 = +\frac{1}{h} 180 k; \quad W_3 = +\frac{1}{h} 180 k;$$

$$W_4 = +\frac{1}{h} 240 k; \quad W_5 = +\frac{1}{h} 400 k; \quad W_6 = +\frac{1}{h} 360 k;$$

$$W_7 = +\frac{1}{h} 336 k.$$

В правом пролете:

$$W_9 = +\frac{1}{h} 480 k; \quad W_{10} = +\frac{1}{h} 384 k; \quad W_{11} = +\frac{1}{h} 300 k;$$

$$W_{12} = +\frac{1}{h} 240 k; \quad W_{13} = +\frac{1}{h} 120 k.$$

Ординаты эпюры перемещений определяем аналитически, как моменты для фиктивных балок, находящихся под действием этих упругих грузов (черт. 160, б).

а) Для левого пролета:

Фиктивная поперечная сила:

$$Q_{\phi A} = -\frac{k}{8h} (90 \cdot 7 + 180 \cdot 6 + 180 \cdot 5 + 240 \cdot 4 + 400 \cdot 3 + 360 \cdot 2 + 336 \cdot 2) = -728,25 \frac{k}{h}.$$

Моменты в точках приложения грузов или ординаты упругой линии:

$$f_1 = -Q_{\phi A} d = -728,25 \frac{kd}{h};$$

$$f_2 = -Q_{\phi A} 2d + 90 \frac{kd}{h} = -1360,50 \frac{kd}{h};$$

$$f_3 = -1824 \frac{k}{h} d; \quad f_4 = -2103 \frac{k}{h} d; \quad f_5 = -2141 \frac{k}{h} d;$$

$$f_6 = -1751 \frac{k}{h} d; \quad f_7 = -1057 \frac{k}{h} d.$$

б) Для правого пролета:
Фиктивная поперечная сила:

$$Q_{\text{фв}} = \frac{-k}{6h} (120 \cdot 5 + 240 \cdot 4 + 300 \cdot 3 + 384 \cdot 2 + 480) = 616 \frac{k}{h}$$

Моменты в точках приложения грузов или ординаты упругой линии:

$$f_{13} = -616 \frac{k}{h} d; \quad f_{12} = -1110 \frac{k}{h} d; \quad f_{11} = -1364 \frac{k}{h} d;$$

$$f_{10} = -1318 \frac{k}{h} d; \quad f_9 = -888 \frac{kd}{h}.$$

Переход от ординат эпюры прогибов к ординатам линии влияния лишнего неизвестного должен быть сделан делением на измеритель \bar{v}_{11} :

$$y_m = -\frac{f}{\bar{v}_{11}} = \frac{-f_m \frac{kd}{h}}{19750 k \frac{1}{8}} = \frac{-f_m d}{2468,75 h},$$

где f_m — ордината эпюры перемещений.

По этой формуле вычислены ординаты линии влияния усилия в стержне O_7 , и по ним построена линия влияния (черт. 160, с).

Рассмотрим построение нескольких линий влияния усилий в стержнях фермы.

1) Левая опорная реакция левого пролета.

При нахождении груза, равного единице, в левом пролете, опорное давление определяется из выражения момента относительно шарнира опоры С:

$$A = \frac{1}{l_1} (l_1 - x) - \frac{h}{l_1} X_1 = \frac{h}{l_1} \left(\frac{l_1 - x}{h} - y_{x1} \right).$$

Второй член правой части этого уравнения определяется ординатами линии влияния усилия X_1 ; первый член — определяется прямой, для построения которой надо на левой опоре, при $x = 0$, отложить ординату:

$$aa' = \frac{l_1}{h} = \frac{8d}{h}$$

и соединить вершину ее с нулем на правой опоре этого пролета (черт. 160, d).

При нахождении груза, равного единице, в правом пролете опорная реакция той же опоры определяется из того же условия равновесия уравнением:

$$A = -\frac{h}{l_1} X_1,$$

из которого видно, что эта часть линии влияния вполне подобна линии влияния усилия X_1 в том же пролете, но обратна ей по знаку.

Истинная величина ординат линии влияния опорного сопротивления получится после умножения ординат построенной линии влияния на множитель:

$$-\frac{h}{l_1} = -\frac{h}{8d}.$$

2) Линия влияния усилия в любом из поясных стержней левого пролета определяется уравнениями следующего вида:

а) при положении груза, равного единице, в левом пролете, справа от сечения

$$N_n = \pm \frac{a}{h} \left[\frac{l_1 - x}{l_1} - \frac{h}{l_1} X_1 \right] = \pm \frac{a}{l_1} \left[\frac{l_1 - x}{h} - y_{x1} \right],$$

б) при положении груза в правом пролете

$$N_n = \mp \frac{a}{h} \cdot \frac{h}{l_1} X_1 = \mp \frac{a}{l_1} X_1.$$

В этих формулах a — расстояние точки момента усилия от левой опоры в левом пролете.

Построение этой линии влияния проводится на базе линии влияния неизвестного X_1 .

Первым членом в скобках $\frac{l_1 - x}{h}$ определяется положение „правой“ прямой, проходящей через вершину ординаты $\frac{l_1}{h}$ под левой опорой (черт. 160, d), и через нуль — под правой опорой С. Для получения ординат линии влияния в левой части от сечения надо, как

всегда, провести „левую“ прямую, проходящую через нуль под левой опорой и пересекающуюся с „правой“ прямой на вертикали под точкой моментов.

На черт. 160, *d* проведено построение линии влияния усилия в пояском стержне $U_{1,3}$ для чего на прямую $a'a$ линии влияния опорной реакции A несена точка моментов \bar{z}' и проведена левая прямая $a\bar{z}'$. По ординатам, ограничиваемым контуром $a\bar{z}'cb$, построена на черт. 160, *e* линия влияния усилия в этом стержне.

Ординаты ее должны умножаться на множитель:

$$\frac{a}{l_1} = \frac{5}{8}.$$

3) Линия влияния усилия в любом стержне решетки левого пролета определяется уравнениями следующего вида:

а) при положении груза в левом пролете справа от сечения

$$D_u = \pm \frac{A}{\sin \varphi} = \pm \frac{h}{l_1 \sin \varphi} \left[\frac{l_1 - x}{h} - y_{x1} \right], \quad (a)$$

б) при положении груза в правом пролете справа от сечения

$$D_u = \pm \frac{A}{\sin \varphi} = \mp \frac{h}{l_1 \sin \varphi} y_{x1}.$$

с) при положении груза $P=1$ в левом пролете слева от сечения

$$D_u = \pm \frac{A-1}{\sin \varphi} = \pm \frac{h}{l_1 \sin \varphi} \left(-\frac{x}{h} - y_{x1} \right).$$

Первыми членами в скобках определяются уравнение $\frac{l_1 - x}{h}$ „правой“ прямой и уравнение $-\frac{x}{h}$ „левой“ прямой линии влияния усилия раскоса в основной системе. На черт. 160, *d* эти прямые показаны двумя параллельными прямыми ca' и $a\bar{z}$.

На черт. 160, *d* проведено определение ординат линии влияния усилия в раскосе $D_{3,4}$; сама линия влияния по этим ординатам построена на черт. 160, *f*; между узлами 3 и 4 линия влияния изменяется по прямой $3-4$.

Действительная величина ординат этой линии влияния определяется умножением их на множитель:

$$\frac{h}{l_1 \sin \varphi}.$$

Аналогичные построения могут быть сделаны для усилий всех стержней левого и правого пролетов системы.

Все они очерчиваются ломаными линиями с вершинами под узлами вследствие передачи нагрузки в узлы фермы.

Задачи и упражнения

35. Определить усилия в стержнях фермы, показанной на черт. 161 и находящейся под действием груза $P=120 \text{ т}$. Площади поперечных сечений показаны на чертеже.

Указание. При выборе основной системы и учете нагрузки следует использовать свойства симметрии. Расчет рекомендуется проводить в табличной форме (табл. 33). Должна быть сделана проверка правильности расчета (§ 40).

Таблица 33

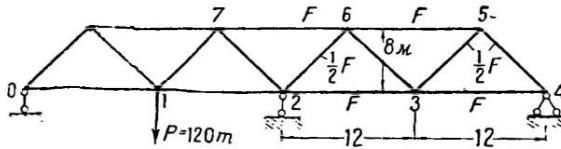
Образец таблицы к задаче 35

| № эле- ментов s | F | $\frac{s}{F}$ | \bar{N}_1 | $\bar{N}_1 \frac{s}{F}$ | $\bar{N}_1^2 \frac{s}{F}$ | $N_p^0 \bar{N}_1 \frac{s}{F}$ | $N_p = N_p^0 + \bar{N}_1 X_1$ | $N_p \frac{\bar{N}_1 s}{F}$ |
|----------------------|-----|---------------|-------------|-------------------------|---------------------------|-------------------------------|-------------------------------|-----------------------------|
| 0—1 | | | | | | | | |
| 1—2 | | | | | | | | |
| 0—8 | | | | | | | | |
| и т. д. | | | | | | | | |

36. Определить усилия в стержнях фермы, показанной на черт. 162 и находящейся под действием двух сосредоточенных грузов P . Поперечные сечения поясных стержней вдво больше сечений решетки.

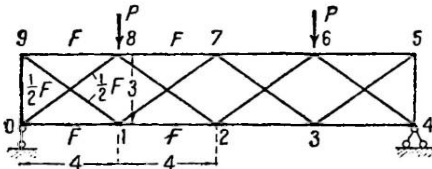
Указание. Основная система может быть получена устранением любого стержня: целесообразно устранить одну из стоек. Разобрать, почему в заданной ферме будут работать от заданной нагрузки только стержни 0—8—6—4—2—0.

37. Показать, как отзовется на величине усилий в стержнях арки (черт. 153) замена одной опоры подвижной с постановкой затяжки между ее пятовыми шарнирами (черт. 163), сечение затяжки равно $2F_0$, длина затяжки $l = 24$ м.



Черт. 161.

Указание. Надо использовать данные расчета в примере 15. Ответ должен быть дан путем сопоставления величин распоров арки с затяжкой и без затяжки. Это сопоставление следует сделать с учетом влияния решетки.

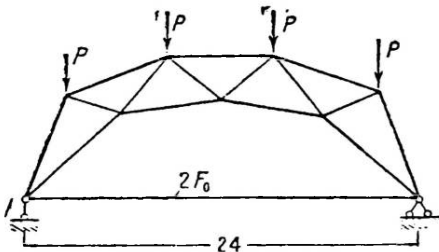


Черт. 162.

Решающему надлежит уяснить себе физический смысл происходящего снижения величины распора.

38. Определить величину распора в арке, показанной на черт. 153, если нижний пояс ее подвергнется нагреву на $t^{\circ} = 20^{\circ}$.

Сопоставить полученное выражение распора с распором, который будет иметь место в той же арке при постановке в нее затяжки, нагрев которой на 5° меньше нагрева нижнего пояса арки. Длина затяжки $l = 24$ м; коэффициент линейного расширения материала арки при нагреве на 1°

$$\alpha = \frac{1}{80000}; E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2.$$


Черт. 163.

39. Определить, как изменится величина усилия в стержне U_{1-2} фермы, показанной на черт. 161, если крайняя левая опора просядет на 2 см.

Указание. При решении надо воспользоваться данными, полученными из решения задачи 32. Процесс решения проводится в порядке указаний § 7. $E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$.

40. Определить усилие в стержне U_{1-2} фермы, показанной на черт. 161, при условии нагрева верхнего пояса фермы на 20° .

Указание. При решении руководиться пояснениями, данными в § 39.

41. Доказать правильность построения линий влияния усилий в раскосе D_{3-4} и стержне пояса U_{2-3} в ферме, показанной на черт. 164 и воспринимающей нагрузку по нижнему поясу. Поперечные сечения всех стержней одинаковы.

42. Доказать правильность контура линии влияния усилия в стержне D_{7-8} двухшарнирной арки, показанной на черт. 165.

Указание. Линия влияния указанного стержня зависит от линии влияния распора, поэтому прежде всего надо доказать правильность построения линии влияния распора по ее виду и по величине двух-трех ординат.

Надо установить формулу, по которой должны определяться упругие грузы, служащие для построения линии влияния распора, допустив возможные упрощения в ней. При

Геометрические элементы и упругие грузы для арочной фермы (черт. 165)

| № узлов | y_k | h_k | $W_k \cdot d = \frac{y_k}{h_k^2}$ | $\frac{y_k^2}{h_k^2}$ | M |
|----------------|--------|--------|-----------------------------------|-----------------------|----------|
| 1 ¹ | 0,720d | 0,20d | — 7,43 ¹ | 5,36 ¹ | 0 |
| 1 ¹ | 0,475d | 0,20d | — 11,88 | 5,64 | |
| 2 | 1,440d | 0,52d | — 5,33 | 7,67 | — 60,61 |
| 3 | 1,275d | 0,63d | — 3,21 | 4,10 | |
| 4 | 2,560d | 0,94d | — 2,90 | 7,42 | — 88,04 |
| 5 | 1,875d | 1,71d | — 1,84 | 7,45 | |
| 6 | 3,360d | 1,26d | — 2,12 | 7,11 | — 104,62 |
| 7 | 2,275d | 1,29d | — 1,37 | 3,11 | |
| 8 | 3,840d | 1,45d | — 1,83 | 7,01 | — 109,82 |
| 9 | 2,475d | 1,44d | — 1,19 | 2,95 | |
| 10 | 4,000d | 1,525d | — 1,72 | 6,88 | — 116,6 |

вычисления упругих грузов можно принять, что длины s и поперечные сечения F стержней пояса одинаковы во всей арке.

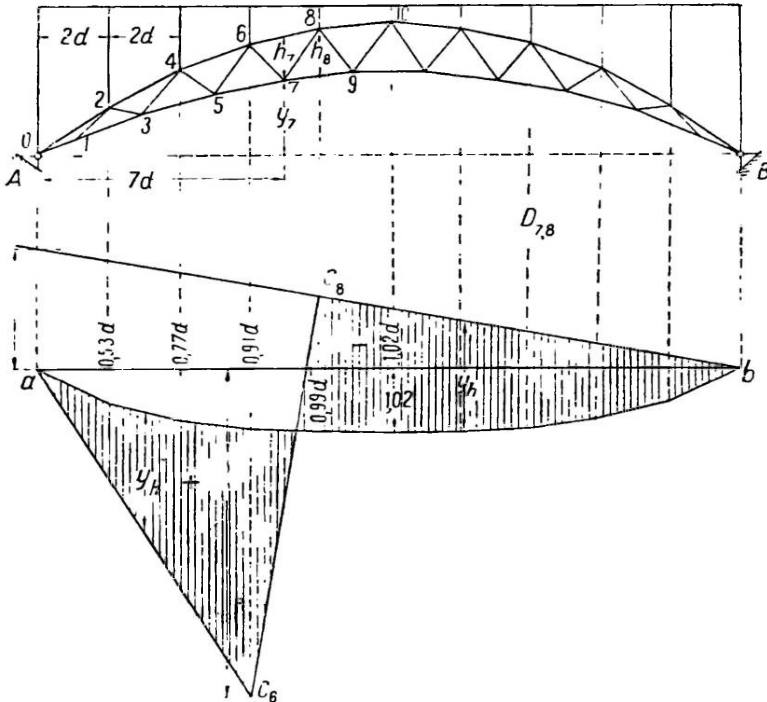
Для облегчения решения в нижеприводимой табл. 34 выписаны величины y_k ординат узлов арки, плечи h_k усилий в стержнях арки, величины упругих грузов W_k (без указания расчетной формулы), статические моменты их относительно линии пят и вертикалей отдельных узлов.

Решающему надо вычислить две-три ординаты эпюры прогибов и перевести эти ординаты в ординаты линии влияния неизвестного.

Проверив правильность линии влияния неизвестного, надо перейти к написанию уравнения линии влияния усилия стержня D_{7-9} . На основе этого уравнения проверить правильность контура, показанного на черт. 165, и ординат его и установить масштаб линии влияния.

Координаты точки пересечения поясов, пересекаемых для определения усилия в раскосе: абсцисса — 2,46d, ордината 1,33d. Плечо раскоса относительно той же точки 7,9d.

¹ В величину этого груза введен множитель $1/2$, так как длина элемента 0—1 пояса вдвое меньше длины остальных элементов.

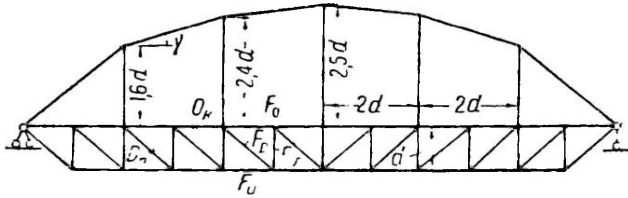


Черт. 165.

43. Построить линии влияния стержней O_k и D_n в ферме, показанной на черт. 166. Указание. Постановкой этой задачи предусматривается не проведение вычислитель-

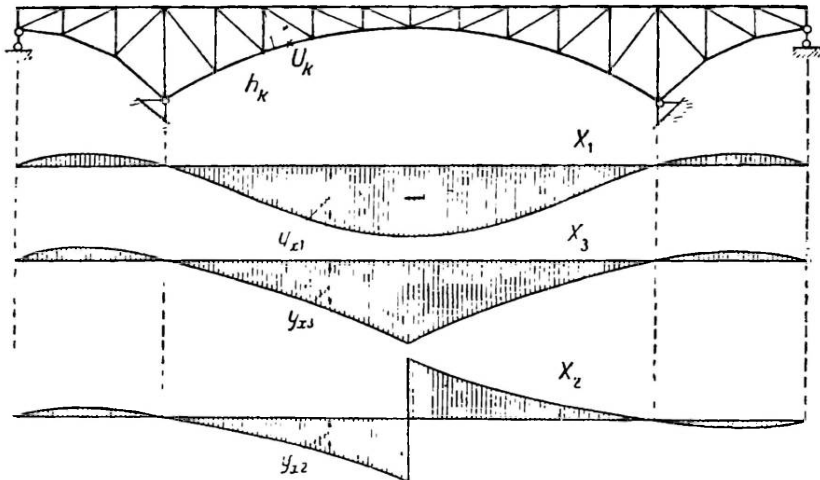
ного процесса, который велик, а проверка усвоения процесса, поэтому решающий должен дать ответ на следующие моменты процесса решения:

1) Обосновать выбор основной системы, показав, какие сравнительные преимущества представит каждая из них в процессе решения. Обязательно сопоставление схем с устранением стержня в арочной части и стержня в поясе балочной части.



Черт. 166.

- 2) Задавшись неизвестным, следует представить себе очертание линии влияния его.
- 3) Указать, что должно быть вычислено и по каким формулам для получения линии влияния неизвестного. Написать выражение одного упругого груза применительно к заданной ферме.
- 4) Показать, как должен быть определен масштаб линии влияния, и усилия каких стержней фермы окажут влияние на его величину.
- 5) Составить уравнения линий влияния усилий, указанных в задании стержней.
- 6) Задавшись приближенным контуром линии влияния неизвестного, построить линию влияния искомого усилия и установить масштаб измерения ее ординат.
44. Обосновать правильность контуров линий влияния распора X_1 , поперечной силы X_2 и момента X_3 , относящихся к ферме, показанной на черт. 167.



Черт. 167.

Указание. От решающего требуется, не производя вычислений, показать усвоение им процесса расчета; он должен дать ответы на следующие вопросы по ходу решения задачи:

- 1) Обосновать выбор основной системы и установить те преобразования, какие при ведут к упрощению решения канонических уравнений. Надо показать формулы, которые должны быть использованы для проведения этих преобразований.
- 2) Нарисовать контуры, которые должны иметь линии влияния неизвестных в условиях основной системы.
- 3) Показать формулу, которой надо воспользоваться, чтобы вычислить упругие грузы для построения линии влияния распора и написать ее для одного узла применительно к данной системе.

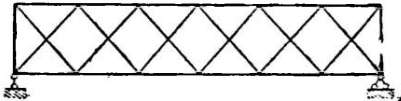
4) Установить масштаб линий влияния, указав процесс вычисления и его величину на схемах чертежа.

5) Задавшись буквенным обозначением ординат в заданных контурах линий влияния неизвестных и буквенными обозначениями координат моментных точек, написать выражения трех ординат линии влияния усилия в стержне пояса U :

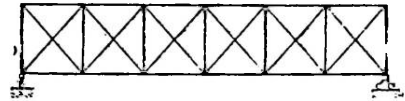
а) при положении груза $P=1$ в правой половине арки; б) при положении его в левой половине арки справа от стержня U и с) при положении его слева от стержня U .

§ 44. ФЕРМЫ СО СЛОЖНОЙ РЕШЕТКОЙ

Фермы со сложной решеткой имели большое сравнительно распространение в прошлом столетии. Применением сложной решетки достигалась возможность уменьшения длины панели при сохранении рационального угла наклона раскосов. В современных проектировках встречаются фермы двухрешетчатые без стоек (черт. 168) и двухрешетчатые со стойками (черт. 169). Но независимо от новых



Черт. 168.



Черт. 169.

проектировок приходится иметь дело с перерасчетами старых ферм со сложной решеткой на новые нагрузки; это заставляет нас обратить внимание на некоторые особенности расчета этих ферм.

Сложная решетка оказывает большое влияние на распространение деформаций в ферме¹, поэтому нельзя пренебрегать учетом ее влияния на величину деформаций и лишних неизвестных.

Лишние стержни входят в состав фермы со сложной решеткой, создавая ее статическую неопределимость. С устранением этих стержней фермы приводятся к виду статически определимых, но со сложной же решеткой, расчет которых сложен даже для простейших из них (ферм с параллельными поясами). Точный расчет ферм с параллельными поясами и сложной решеткой проводится при помощи уравнений статики с использованием приемов, указанных в § 40 и 41 части I настоящего курса.

Например ферма двухрешетчатая, показанная на черт. 168, приводится путем устранения одной из стоек к статически определимому виду (черт. 170). Определение усилий в ней от заданной нагрузки и от единичного воздействия не представляет затруднений (ч. I, § 41).

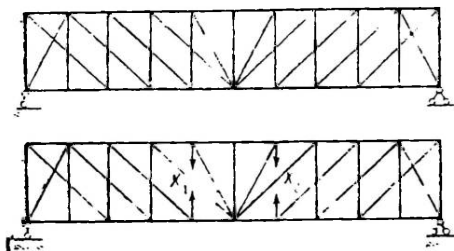
После того как определено неизвестное, усилие в любом стержне фермы определяется обычным порядком. Например усилие в стержне пояса U_{3-4} определяется выражением (черт. 170):

$$U_{3-4} = U_{3-4}^0 + X_1 \bar{U}_{3-4} = \frac{1}{h} (A^0 3d + D_{3-4}^0 d \sin \varphi - X_1 \frac{d \sin \varphi}{\sin \varphi}),$$

в котором A^0 — опорная реакция и D_{3-4}^0 — усилие в раскосе основной системы от заданной нагрузки; $X_1 \frac{1}{\sin \varphi}$ — усилие в раскосе D_{3-4} основной системы, вызываемое лишним неизвестным X_1 ; $d \sin \varphi$ — плечо усилия в раскосе D_{3-4} относительно моментной точки (узла $3'$); φ — угол наклона раскоса к поясу.

¹ О степени этого влияния можно судить по значимости слагаемых, входящих в состав сумм, определяющих величины фиктивных упругих грузов в нижеприведенном примере.

Двухраскосная ферма, показанная на черт. 171, дважды статически неопределима и приводится к основной ферме устранением по одному стержню в каждой половине фермы. Необходимость устранения по одному стержню в каждой половине диктуется тем соображением, что обе половины представляют собой два неизменяемых диска, независимых друг от друга в своем образовании, поэтому каждое неизвестное вызывает усилия в стержнях только той половины фермы, в которой оно находится. Благодаря этому побочное перемещение

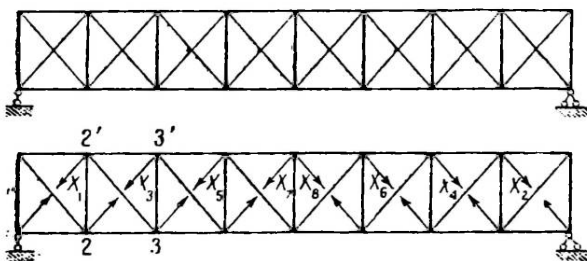


Черт. 171.

В фермах двухрешетчатых со стойками (черт. 172) число лишних связей определяется числом панелей. Она приводится к статически определимой устранением по одной диагонали в каждой панели. Устранение диагоналей следует делать, сохраняя симметрию в образовании основной фермы; это позволяет каждые две симметричные диагонали разбить на парные неизвестные (§ 9), в соответствии с чем канонические уравнения разбиваются на две группы:

$$\delta_{12} = \sum \bar{N}_1 \bar{N}_2 \frac{s}{F} = 0$$

и канонические уравнения упругости распадаются на два уравнения, каждое с одним неизвестным; это позволяет определить их независимо друг от друга.

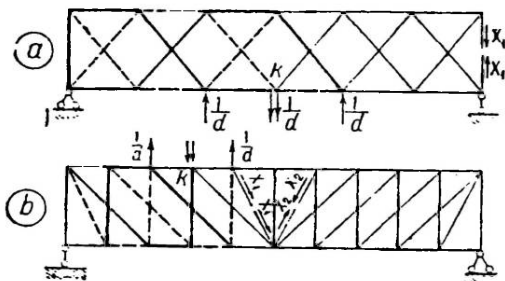


Черт. 172.

$$\begin{aligned} Y_1 \delta_{11} + Y_3 \delta_{13} &= 0; \\ Y_1 \delta_{31} + Y_3 \delta_{33} + Y_5 \delta_{35} &= 0; \\ Y_3 \delta_{53} + Y_5 \delta_{55} + Y_7 \delta_{57} &= 0; \\ Y_5 \delta_{75} + Y_7 \delta_{77} &= 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_2 \delta_{22} + Y_4 \delta_{24} &= 0; \\ Y_2 \delta_{42} + Y_4 \delta_{44} + Y_6 \delta_{46} &= 0; \\ Y_4 \delta_{64} + Y_6 \delta_{66} + Y_8 \delta_{68} &= 0; \\ Y_6 \delta_{86} + Y_8 \delta_{88} &= 0. \end{aligned}$$

В написании этих групп учтена еще одна особенность рассматриваемой системы, заключающаяся в том, что каждое из неизвестных вызывает усилие только в стержнях, входящих в образование той панели, где проходит само неизвестное. Например неизвестное X_3 (черт. 172) вызывает усилие только в стержнях 2—2', 3—3', 2'—3', 2'—3, 2—3; поэтому только стойки фермы, как входящие в образование двух смежных панелей, воспринимают усилия от двух неизвестных, лежащих в этих панелях. Эта особенность обращает ряд побочных перемещений в нули и приводит канонические уравнения к трехчленному виду, как это показано выше. Совместное решение



Черт. 173.

полученных трехчленных уравнений следует проводить приемом Гаусса, изложенным дальше в § 51.

Построение линий влияния в фермах со сложной решеткой осложняется тем, что единичные пары, прикладываемые к стержням грузового пояса, у узла,

где вычисляется упругий груз, вызывают усилия в стержнях, лежащих не только в пределах панелей, где они приложены, но и вне ее; при этом число этих стержней фермы, на которые распространяется влияние каждой пары, изменяется в зависимости от вида решетки и положения единичных пар на ферме. На черт. 173 жирными линиями показаны стержни основных систем (сплошные линии — сжатые, пунктирные — растянутые), усилия в которых должны быть учтены при вычислении упругого груза в узле K фермы. Эта переменность факторов, влияющих на величины упругих грузов, не позволяет дать типовую формулу для вычисления их, и их приходится вычислять по формуле (119) общего вида:

$$EW = \sum \bar{N}_m \bar{N}_x \frac{s}{F}.$$

Здесь \bar{N}_m — усилия в стержнях фермы от единичных пар, прикладываемых в панелях, примыкающих к узлу, для которого вычисляется упругий груз; \bar{N}_x — усилия в тех же стержнях, вызываемые воздействием $\bar{X}_1 = 1$, приложенным по направлению лишнего неизвестного.

Пример 17. Рассмотрим для иллюстрации процесса расчета и построения линий влияния в стержнях фермы, показанной на черт. 174.

Она однажды статически неопределима. Устраиваем левую стойку V_{4-15} и рассматриваем основную систему под действием единичной силы $\bar{X}_1 = 1$. Эта сила вызывает в стержнях усилия \bar{N}_1 и деформации $\Delta = \frac{\bar{N}_1 s}{EF}$. Величины этих деформаций, увеличенные в E раз, выписаны в графе 1 нижеприводимой табл. 35¹.

Для вычисления упругих грузов по формуле (119) прикладываем последовательно к узлам фермы единичные пары и вычисляем усилия N_m в стержнях фермы, вызываемые этими парами. Величины этих усилий выписаны в той же табл. 35. При вычислении усилий было принято (черт. 174) $h = d$ и $\varphi = 45^\circ$.

По этим усилиям и деформациям стержней, вызываемым единичным воздействием $\bar{X}_1 = 1$, вычислены произведения:

$$\Delta N_m = \bar{N}_m \bar{N}_1 \frac{s}{F}.$$

Величины их, сокращенные на общий множитель $\frac{2}{h}$, выписаны в указанной табл. 35.

Суммой величин, входящих в каждый столбец таблицы со значениями $N_m \Delta$, определяется величина каждого упругого груза:

$$EW_3 = -\frac{2}{h} [(4 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,267) \sqrt{2} + 3 \cdot 0,025 + 2 \cdot 0,0286 + 0,02 + 0,1] = -\frac{2}{h} 2,134;$$

$$EW_4 = +\frac{2}{h} 1,998; \quad EW_5 = -\frac{2}{h} 1,485;$$

$$EW_6 = +\frac{2}{h} 0,777; \quad EW_7 = -\frac{2}{h} 0,254;$$

$$EW_8 = +\frac{2}{h} 0,10.$$

Вычисляем ординаты эпюры прогибов как статических моментов, вызываемых упругими грузами в фиктивной балке.

Фиктивная опорная реакция:

$$Q_{\phi, A} = \frac{1}{12d} (-2,134 \cdot 11 + 1,988 \cdot 9 - 1,485 \cdot 7 + 0,777 \cdot 5 - 0,254 \cdot 3 + 0,10 \cdot 1) \frac{2d}{h} = 1,047 \frac{2}{h}.$$

Ординаты эпюры прогибов:

$$f_3 = 1,047 \frac{2}{h} \cdot \frac{1}{2} d = 1,047;$$

$$f_4 = \left(1,047 \frac{3}{2} d - 2,134d \right) \frac{2}{h} = -1,127;$$

$$f_5 = +0,695; \quad f_6 = -0,453; \quad f_7 = -0,047; \quad f_8 = 0,149.$$

¹ Так как вычисление этих деформаций проводится обычным порядком, то мы его здесь не приводим. Величины деформаций взяты нами из книги проф. Симинского К. К., Строительная механика, Киев 1927.

Вычисление фиктивных упругих грузов в ферме (черт. 174)

| Ферма | $\Delta - \frac{N_{10}}{F}$ | W ₃ | | W ₄ | | W ₅ | | W ₆ | | W ₇ | | W ₈ | |
|-------|-----------------------------|------------------------|----------------------|------------------------|----------------------|------------------------|----------------------|---------------------------|---------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------|--------------------------|
| | | \bar{N}_{10} | $\bar{N}_{10\Delta}$ | \bar{N}_{11} | $\bar{N}_{11\Delta}$ | \bar{N}_{12} | $\bar{N}_{12\Delta}$ | \bar{N}_{13} | $\bar{N}_{13\Delta}$ | \bar{N}_{14} | $\bar{N}_{14\Delta}$ | \bar{N}_{15} | $\bar{N}_{15\Delta}$ |
| 3-15 | 0 | $-\frac{2\sqrt{2}}{h}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 15-5 | -0,2 | $+\frac{2\sqrt{2}}{h}$ | $-0,2\sqrt{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{h}$ | $+0,2\sqrt{2}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5-13 | +0,267 | $-\frac{2\sqrt{2}}{h}$ | $+0,267\sqrt{2}$ | $+\frac{2\sqrt{2}}{h}$ | $+0,267\sqrt{2}$ | $-\frac{2\sqrt{2}}{h}$ | $-0,267\sqrt{2}$ | $+\frac{\sqrt{2}}{h}$ | $-0,267\sqrt{2}$ | $+\frac{0,267\sqrt{2}}{2}$ | $+\frac{0,267\sqrt{2}}{2}$ | 0 | 0 |
| 13-7 | -0,2 | $+\frac{2\sqrt{2}}{h}$ | $-0,2\sqrt{2}$ | $-\frac{2\sqrt{2}}{h}$ | $+0,2\sqrt{2}$ | $+\frac{2\sqrt{2}}{h}$ | $-0,2\sqrt{2}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 16-4 | 0 | $-\frac{\sqrt{2}}{h}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4-14 | 0,2 | $+\frac{2\sqrt{2}}{h}$ | $-0,2\sqrt{2}$ | $-\frac{2\sqrt{2}}{h}$ | $+0,2\sqrt{2}$ | $+\frac{\sqrt{2}}{h}$ | $-0,2\sqrt{2}$ | $-\frac{1}{2}0,2\sqrt{2}$ | $-\frac{1}{2}0,2\sqrt{2}$ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 14-6 | +0,267 | $-\frac{2\sqrt{2}}{h}$ | $+0,267\sqrt{2}$ | $+\frac{2\sqrt{2}}{h}$ | $+0,267\sqrt{2}$ | $-\frac{2\sqrt{2}}{h}$ | $-0,267\sqrt{2}$ | $-\frac{0,2\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{0,2\sqrt{2}}{2}$ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 6-12 | -0,2 | $+\frac{2\sqrt{2}}{h}$ | $-0,2\sqrt{2}$ | $-\frac{2\sqrt{2}}{h}$ | $+0,2\sqrt{2}$ | $+\frac{2\sqrt{2}}{h}$ | $-0,2\sqrt{2}$ | $-\frac{2\sqrt{2}}{h}$ | $-0,2\sqrt{2}$ | $-\frac{2\sqrt{2}}{h}$ | $+\frac{2}{h}$ | $+\frac{2}{h}$ | $-\frac{0,2\sqrt{2}}{2}$ |
| 12-7 | +0,1 | $-\frac{2}{h}$ | -0,1 | $+\frac{\sqrt{2}}{h}$ | 0,1 | $-\frac{2}{h}$ | 0,1 | $-\frac{2}{h}$ | -0,1 | $+\frac{2}{h}$ | $-\frac{2}{h}$ | 0,1 | 0 |
| 4-5 | +0,025 | $-\frac{2}{h}$ | -0,025 | $+\frac{2}{h}$ | +0,025 | $-\frac{2}{h}$ | +0,025 | $-\frac{1}{h}$ | $-\frac{1}{2}0,025$ | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5-6 | -0,020 | $+\frac{2}{h}$ | -0,020 | $-\frac{2}{h}$ | +0,020 | $+\frac{2}{h}$ | -0,020 | $+\frac{2}{h}$ | -0,020 | $+\frac{1}{2}0,02$ | 0 | 0 | 0 |
| 6-7 | +0,025 | $-\frac{2}{h}$ | -0,025 | $+\frac{2}{h}$ | +0,025 | $-\frac{2}{h}$ | -0,025 | $-\frac{2}{h}$ | -0,025 | $+\frac{2}{h}$ | $+\frac{2}{h}$ | $-\frac{1}{h}$ | $-\frac{1}{2}0,025$ |
| 12-13 | +0,0286 | $-\frac{2}{h}$ | -0,286 | $+\frac{2}{h}$ | +0,286 | $-\frac{2}{h}$ | +0,286 | $-\frac{2}{h}$ | -0,286 | $+\frac{2}{h}$ | $+\frac{2}{h}$ | 0 | 0 |
| 13-14 | -0,025 | $+\frac{2}{h}$ | -0,025 | $-\frac{2}{h}$ | +0,025 | $+\frac{2}{h}$ | -0,025 | $+\frac{2}{h}$ | -0,025 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 14-15 | +0,0286 | $-\frac{2}{h}$ | -0,0286 | $+\frac{2}{h}$ | +0,0286 | $-\frac{2}{h}$ | +0,0286 | -0 | -0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

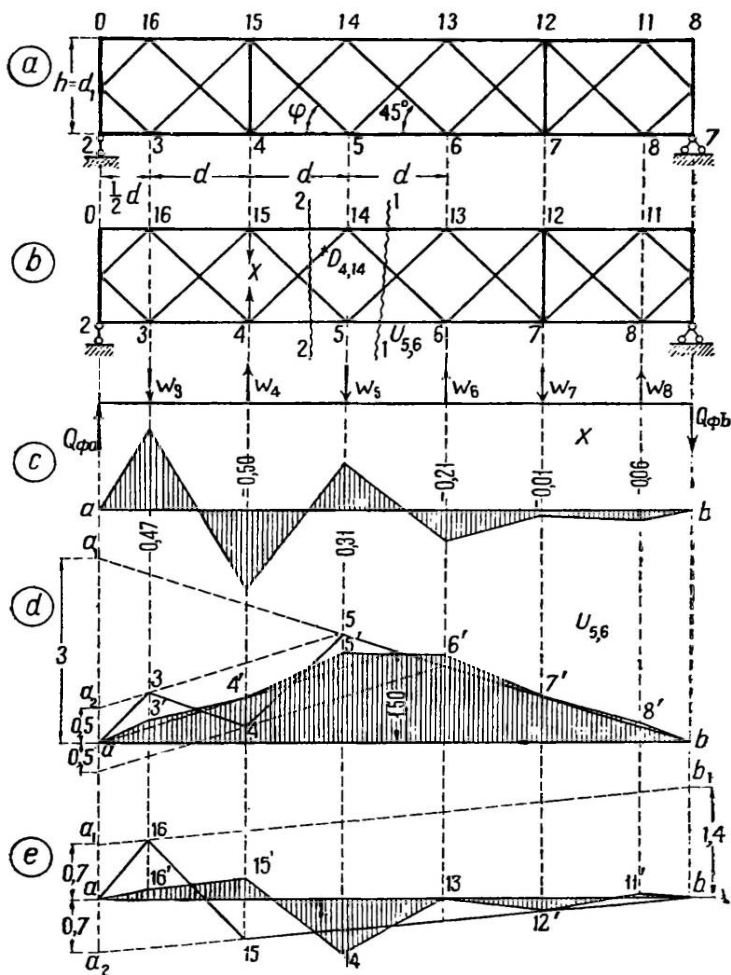
Вычисляем масштабный множитель δ_{11} для линии влияния:

$$\delta_{11} = \sum \bar{N}_i \Delta = 3 \cdot 0,025 + 2 \cdot 0,0286 + 0,02 + (4 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,267) \sqrt{2} + 2 \cdot 0,1 = 2,228.$$

Значения ординат линии влияния неизвестного определяется по условию:

$$X_1 = - \frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}} = - \frac{f}{2,228}.$$

На черт. 174, *с* показана линия влияния X_1 при действии нагрузки $P = 1$ на верхние узлы; при действии нагрузки на нижние узлы знаки ординат будут обратными.



Черт. 174.

После того как построена линия влияния неизвестного, построение линий влияния усилий в остальных стержнях фермы не представляет затруднений и проводится на основании уравнений статики с использованием приемов, указанных в § 41 части I.

Например, уравнение линии влияния усилия в стержне U_{5-6} фермы, пока-

занной на черт. 174, б, при положении груза справа от сечения 1—1 напишется так (ч. I, § 41):

$$U_{5-6} = \frac{1}{h} \left[\frac{l-x}{l} \left(2,5d + \frac{1}{2} \frac{d \sin \varphi}{\sin \varphi} \right) - X_1 \frac{d \sin \varphi}{\sin \varphi} \right],$$

$$U_{5-6} = \frac{d}{h} \left[3 \frac{l-x}{l} - y_{x1} \right] = U_{5,4}^0 - y_{x1} \frac{d}{h}.$$

Первый член этого уравнения представляет собой „правую“ прямую б—5 в линии влияния усилия $U_{5,6}^0$; на черт. 174, d эта линия влияния очерчена контуром а—3—4—5—б; построение выполнено по указаниям, данным в части I, черт. 184. Второй член представляет собой ординаты линии влияния (черт. 174, с) неизвестного X_1 , которые должны быть просуммированы с ординатами линии влияния усилия $U_{5,4}^0$. Это суммирование ординат выполнено в табл. 36 и по ним построена окончательная линия влияния, площадь которой на черт. 174 заштрихована.

Уравнение линии влияния усилия в раскосе $D_{4,14}$ той же фермы, при положении груза $P=1$ справа от разреза 2—2 напишется так (ч. I, § 41):

$$D_{4,14} = -\frac{1}{\sin \varphi} \left(\frac{A}{2} + X_1 \right) = -0,7 \frac{l-x}{l} - 1,412 y_{x1} = D_{4,14}^0 - 1,412 y_{x1}.$$

При положении груза $P=1$ слева от сечения в узле 16 уравнение усилия будет:

$$D_{4,14} = -\frac{1}{\sin \varphi} \left(\frac{A}{2} - 1 + X_1 \right).$$

Первый член в этих уравнениях определяет собой ординаты линии влияния усилия $D_{4,14}^0$ в этом стержне основной системы от действия груза $P=1$; на черт. 174, e показан контур а—16—15—б этой линии влияния (ч. I, черт. 184) при движении груза $P=1$ по верхнему поясу фермы. Второй член в тех же уравнениях вычисляется по ординатам y_{x1} линии влияния неизвестного. Суммарные ординаты вычислены в табл. 36 и по ним на черт. 174, e построена окончательная линия влияния усилия $D_{4,14}$, показанная на чертеже штриховкой.

Таблица 36

Вычисление ординат линий влияния элемента нижнего пояса и раскоса в ферме (черт. 174)

| № узлов | Линия влияния U_{5-6} | | | Линия влияния $D_{4,14}$ | | |
|---------|-------------------------|----------|-----------|--------------------------|---------------|------------|
| | U_{5-6}^0 | y_{x1} | U_{5-6} | $0,7 \frac{l-x}{l}$ | $1,41 y_{x1}$ | $D_{4,14}$ |
| 3 | 0,25+0,5 | -0,47 | 0,28 | +0,75 | -0,663 | +0,09 |
| 4 | 0,75-0,5 | +0,51 | 0,76 | -0,525 | +0,719 | +0,19 |
| 5 | 1,75 | -0,31 | 1,44 | -0,41 | -0,437 | -0,847 |
| 6 | 1,25 | 0,21 | 1,46 | +0,292 | +0,296 | +0,004 |
| 1 | 0,75 | 0,01 | 0,76 | -0,175 | +0,014 | -0,161 |
| 8 | 0,25 | 0,06 | 0,31 | -0,058 | +0,084 | +0,026 |

Аналогичным приемом могут быть построены линии влияния усилия в любом стержне.

Наличие криволинейного пояса в ферме со сложной решеткой сильно усложняет определение усилий в них от любого вида нагрузки; их приходится определять или приемом Геннеберга (ч. I, § 42) или кинематическим методом (ч. I, § 43). Сложность вычисления упругих грузов в фермах с криволинейным поясом и сложной решеткой заставляет отказаться от пользования этим приемом и проводить построение эпюры прогибов при помощи диаграммы Виллио (ч. I, § 101). Построение же окончательных линий влияния усилий в стержнях ферм с криволинейными поясами и сложной решеткой проводится с помощью построения диаграмм скоростей (ч. I, § 45) или диаграммы Кремоны (ч. I, § 46).

Описанный выше процесс построения линий влияния, сопровождающийся сложными вычислениями, с успехом заменяется приближенным приемом, обеспечивающим достаточную точность.

Приближенный расчет ферм со сложной решеткой (черт. 175, а) состоит в том, что сложная решетка разлагается на ряд простых решеток, образующих неизменяемые фермы (черт. 175, б). При этом разложении нагрузка, действующая на заданную ферму, относится к той из новых простых ферм, к которой относится узел с приложенной нагрузкой.

При таком разложении усилия в стержнях решетки заданной фермы получаются из рассмотрения простой фермы. Что же касается усилий в поясных стержнях, то, так как они входят в каждую из простых ферм, расчетные усилия в них определяются суммой усилий в этом стержне, вычисляемых для него в каждой из простых ферм.

Например усилие стержня U_{3-4} (черт. 176, а) определяется суммой:

$$U_{3-4} = U_{3-4}^I + U_{3-4}^{II} = \frac{1}{n} (M_{3'} + M_{3''}),$$

в которой U_{3-4}^I — усилие стержня в ферме со сплошной решеткой (черт. 176, б) и U_{3-4}^{II} — усилие в ферме с пунктирной решеткой.

Линии влияния усилий в стержнях поясов заданной фермы также образуются из ординат двух линий влияния, построенных для того же стержня простых ферм. В контур общей искомого линии влияния вносится ордината той из двух линий влияния, к которой относится узел с помещенным в нем грузом $P=1$.

Например линия влияния стержня U_{4-5} строится по двум линиям влияния простых ферм, показанных на черт. 176, б. Площадь искомого линии влияния, построенной по этим простым линиям влияния, заштрихована.

Линия влияния усилий в стержнях решетки заданной фермы может быть построена приближенно на основании следующих соображений. Пока груз $P=1$ находится справа от сечения, проведенного через панель, где находится стержень решетки, линия влияния усилия, независимо от того в каком узле помещается груз, определяется уравнением:

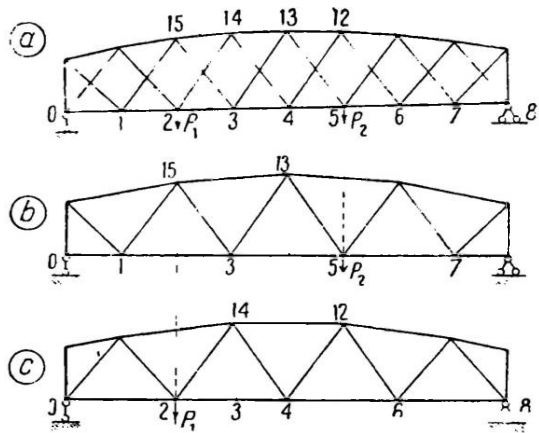
$$D_{3-3'} = + \frac{A}{\sin \alpha},$$

характеризуемым прямой a, b (черт. 176).

При положении груза, равного единице, в узлах $1'$ и $3'$ уравнение линии влияния будет:

$$D_{3-3'} = \frac{1}{\sin \alpha} (A - 1)$$

и характеризуется прямой ab_1 , показанной на том же чертеже. Но когда груз будет находиться в узле 2, то он, вызывая опорную реакцию, сам не будет влиять на усилие стержня $D_{3-3'}$, как это следует из образования решетки; по-



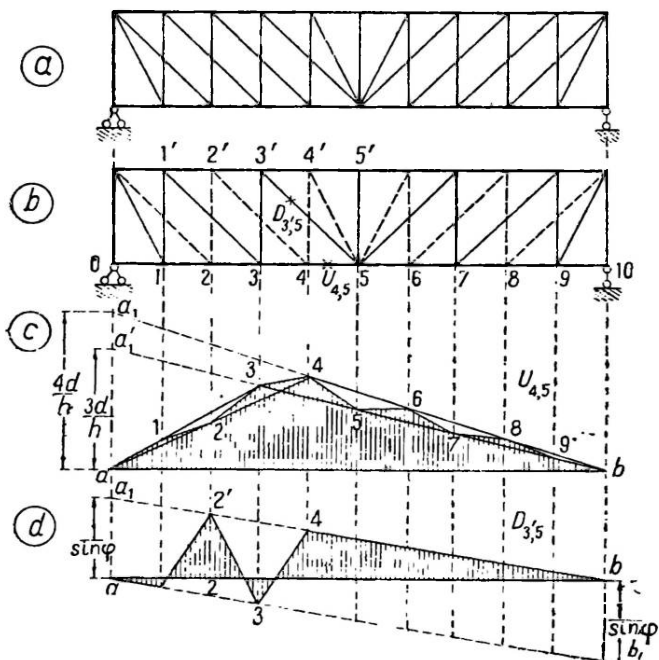
Черт. 175.

этому при положении груза в узле 2 ордината линии влияния определяется уравнением:

$$D_{s-3'} = \frac{A}{\sin \varphi},$$

т. е. ординатой 2—2' прямой a_1b .

Таким образом искомая линия влияния очертится контуром, показанным на черт. 176, d штриховкой.



Черт. 176.

Приближенный расчет двухрешетчатых ферм со стойками во всех панелях (черт. 172) проводится в предположении, что диагонали работают только на растяжение. В целях оправдания такого допущения они проектируются мало жесткими, что лишает их возможности воспринимать сжимающие усилия.

СЛОЖНЫЕ РАМЫ

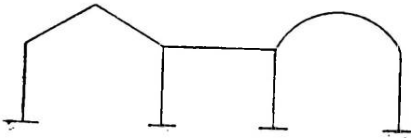
§ 45. ВЫБОР ОСНОВНОЙ СИСТЕМЫ

В общем отделе мы дали основные установки для расчета простых рам с малым числом неизвестных. Сложные рамы отличаются от простых тем, что число контуров в них больше, соответственно чему в них увеличивается число неизвестных, а следовательно и число канонических уравнений, необходимых для определения этих неизвестных. Задача проектировщика таких рам заключается прежде всего в том, чтобы выбором основной системы возможно упростить процесс по вычислению перемещений и решению канонических уравнений.

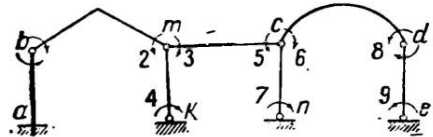
Выбор основной системы в сложной раме всегда требует сопоставления нескольких систем, так как трудно указать сразу, какая основная система является более простой. Постараемся выяснить на отдельных примерах те положения, которыми следует руководиться при выборе основной системы в сложной раме.

1. **Схема основной системы.** В каждой основной системе, выбираемой для сложной рамы, обычно есть одна или несколько основных частей, к которым примыкают дополнительные части. Основная часть отличается от дополнительных тем, что она сама может существовать независимо от других частей, и нагрузка, действующая на нее, не передается на другие части основной системы. Дополнительные же части не могут сохранить неизменяемости без опирания на основные части.

В отдельных случаях дополнительные части могут опираться не на основную часть, а на другие дополнительные части, являющиеся промежуточными.

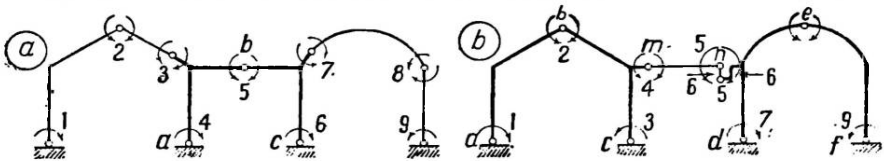


Черт. 177.



Черт. 178.

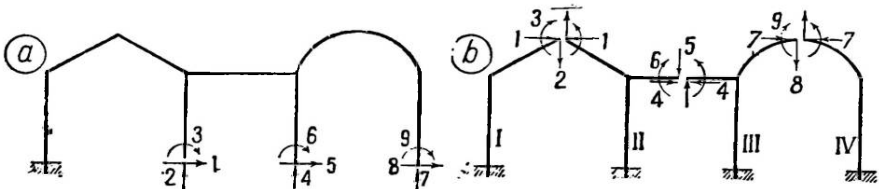
Например, девять раз статически неопределимую рамную систему, показанную на черт. 177, мы можем включением только шарниров привести к основной системе, показанной на черт. 178. Рассматривая последнюю, можно видеть, что она в целом неизменяема. Основной ее частью является один стержень ab . В этом легко убедиться из того, что он может существовать независимо от остальной



Черт. 179.

части. Если же выделить трехшарнирную часть cde , то сразу становится ясным, что она не сохранит неизменяемости без опирания на часть mnp . Таким же путем можно показать, что часть mnp не может существовать без опирания на часть bmk , и эта последняя — без опирания на стержень ab .

На черт. 179, a показан другой вариант основной системы к той же сложной раме; в нем основная часть abc представляет собой трехшарнирную арку с консолями.



Черт. 180.

На черт. 179, b показан третий вариант основной системы для той же сложной рамы; в нем две основные части abc и def , представляющие собой трехшарнирные арки, из которых каждая может существовать самостоятельно. Дополнительной частью является двухопорная балочка mnp .

На черт. 180 показаны еще два вида основных систем для той же сложной рамы, полученных путем введения в нее разрезов. В первой из них (черт. 180, a)

имеется только одна основная часть, захватывающая всю систему и представляющая собой ломаный брус с консолями, заделанный одним концом. Во второй системе (черт. 180, б) имеются четыре основные части, представляющие каждая самостоятельный неизменяемый брус, заделанный одним концом.

ОпираНИЕ дополнительных частей на промежуточные дополнительные части весьма часто встречается в многоэтажных рамах (черт. 181).

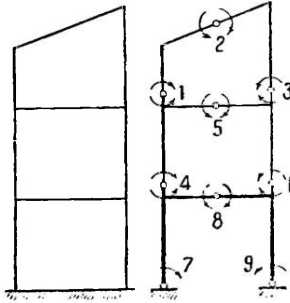
Промсмотренные примеры позволяют отметить некоторые положения, которые следует учитывать при выборе основной расчетной системы в сложной раме.

1) Так как нагрузка, действующая на основную часть расчетной системы, не вызывает усилий и моментов в ее дополнительных частях, то целесообразно, где это возможно, выбирать расчетную систему с несколькими основными частями.

2) В связи со сказанным целесообразно при выборе расчетной системы не устранять по возможности лишние опорные связи в заданной статически неопределимой системе, а использовать опоры для образования возможно большего числа основных частей.

3) Намечая дополнительные части, надо следить за тем, чтобы каждая из них была неизменяемой, независимо от остальных частей.

4) Введение разрезов обеспечивает расчленение системы на отдельные основные части, но сопровождается развитием эпюр моментов по длине рассеченных частей.



Черт. 181.

5) Включение двух шарниров на прямолинейных участках рамы не расчленяет систему, но уничтожает моменты на выделенном ими участке и этим создает упрощение в расчете.

2. Оценка основной системы. Приведенные выше схемы основных систем показывают, какое большое количество разнообразных систем может быть намечено для расчета одной и той же рамной системы. Возникает вопрос, какую же из них следует выбрать для расчета.

Матрица 1

коэффициентов при неизвестных в канонических уравнениях

| α | X_1 | X_2 | X_3 | X_4 | X_5 | X_6 |
|----------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| 1 | δ_{11} | δ_{12} | δ_{13} | δ_{14} | δ_{15} | δ_{16} |
| 2 | δ_{21} | δ_{22} | δ_{23} | δ_{24} | δ_{25} | δ_{26} |
| 3 | δ_{31} | δ_{32} | δ_{33} | δ_{34} | δ_{35} | δ_{36} |
| 4 | δ_{41} | δ_{42} | δ_{43} | δ_{44} | δ_{45} | δ_{46} |
| 5 | δ_{51} | δ_{52} | δ_{53} | δ_{54} | δ_{55} | δ_{56} |
| 6 | δ_{61} | δ_{62} | δ_{63} | δ_{64} | δ_{65} | δ_{66} |

б

Одним из критериев для оценки качества основной системы является обращение в нуль наибольшего числа побочных перемещений в канонических уравнениях, благодаря чему упрощается решение последних.

Обращение в нуль побочных перемещений можно проследить сопоставлением эпюр моментов, вызываемых действием единичных сил или моментов, прикладываемых по направлению неизвестных. Это сопоставление может быть заменено равноценным ему изучением искривлений (деформаций) отдельных стержней, вызываемых изгибом. И тот и другой приемы требуют навыка, который надо развивать в себе, чтобы при сопоставлении схем не строить для каждой из них иногда трудоемких эпюр.

При проведении оценки схем основных систем можно рекомендовать составлять таблицу, представляющую собой схему — „матрицу“ коэффициентов при неизвестных в канонических уравнениях (см. матрицу 1). По ее диагонали ab рас-

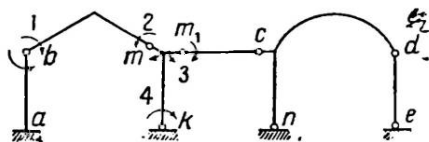
полагаются „главные“ перемещения, имеющие всегда положительный знак, а по обеим сторонам от нее помещаются взаимно равные „побочные“ перемещения, из которых часть и даже все могут обращаться в нуль в зависимости от выбора основной системы.

Проведем оценку схем на конкретных примерах.

Начнем оценку основных систем, предназначенных для расчета сложной рамы (черт. 177), со схемы (черт. 180, *a*). Все единичные воздействия, приложенные к брусу, заделанному одним концом, вызывают моменты в сечениях, лежащих между точкой приложения воздействия и местом заделки. Ясно, что в этих условиях ни одно из побочных перемещений не обращается в нуль. Такая схема, в которой основная часть распространяется на всю основную систему, крайне нецелесообразна.

Нецелесообразной будет также схема, показанная на черт. 178, или черт. 182, так как в ней стойка *ab*, образующая основную часть, будет изгибаться под действием всех единичных моментов, прикладываемых у шарниров по направлению неизвестных¹. Следовательно, ни одно из побочных перемещений не обратится в нуль.

По схеме черт. 180, *b*, не строя эпюр, можно сказать, что эпюры моментов, вызываемые неизвестными X_1, X_2, X_3 , распространяются только на I и II основные



Матрица 2

коэффициентов при неизвестных для основной системы (черт. 180, *b*)

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | | | | | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | | | | 0 | 0 | 0 |
| 3 | | 0 | 1 | | | | 0 | 0 | 0 |
| 4 | | | | 1 | 0 | | | | |
| 5 | | | | 0 | 1 | 0 | | | |
| 6 | | | | | 0 | 1 | | | |
| 7 | 0 | 0 | 0 | | | | 1 | 0 | |
| 8 | 0 | 0 | 0 | | | | 0 | 1 | 0 |
| 9 | 0 | 0 | 0 | | | | | 0 | 1 |

Матрица 3

коэффициентов при неизвестных для основной системы (черт. 183)

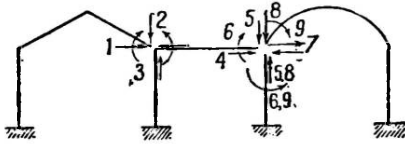
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | | | | 0 | 0 | 0 |
| 2 | | 1 | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | | | 1 | | | | 0 | 0 | 0 |
| 4 | | 0 | | 1 | | | | 0 | |
| 5 | | 0 | | | 1 | | 0 | 0 | 0 |
| 6 | | 0 | | | | 1 | | 0 | |
| 7 | 0 | 0 | 0 | | 0 | | 1 | | |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | 1 | |
| 9 | 0 | 0 | 0 | | 0 | | | | 1 |

части; эпюры моментов, вызываемые действием неизвестных X_4, X_5, X_6 , — только на II и III, и эпюры моментов от неизвестных X_7, X_8 и X_9 — только на III и IV основные части.

¹ Для облегчения разбора того, как распространяется влияние единичных моментов, прикладываемых к шарниру, объединяющему три и более стержней (черт. 178), можно рекомендовать рассматривать их как бы расчлененными (черт. 182). При таком расчленении становится очевидным, что момент X_2 должен распространяться на ломаные стержни *mb* и *mk*, как на трехшарнирную арку и на стержень *ab*, как на ее опору; консоль *mm1* не будет участвовать в работе арочной части. Очевидно, также, что момент X_3 передающийся на консоль *mm1*, заставит работать трехшарнирную арочную часть *bmk* с ее опорой *ab*, а также балочную часть *m1c*, опирающуюся на шарнирно подвижную опору *cn*.

Кроме того неизвестные X_3 , X_5 и X_8 являются обратно симметричными, в то время как остальные — прямо симметричные. В соответствии с этим ряд побочных перемещений обращается в нули, что показано в матрице 2.

В схеме, показанной на черт. 179, *b* имеются две самостоятельные части *abc* и *def*; загрузка каждой из них не вызывает деформаций в стержнях другой и деформаций в средней части *mn*. Нагрузка же, расположенная на средней дополнительной части системы, вызывает деформации изгиба в обеих основных частях.



Черт. 183.

Следовательно в этой схеме обращаются в нули побочные перемещения:

$$\delta_{17} = \delta_{18} = \delta_{19} = \delta_{27} = \delta_{28} = \delta_{29} = \delta_{37} = \delta_{38} = \delta_{39} = 0$$

и взаимные им.

Возвратимся еще раз к схеме черт. 180, *b*. Мы сделали в ней разрезы в серединах верхних ригелей. Ничто нам не препятствует сделать эти разрезы над стойками (черт. 183). При переносе разрезов в углы над стойками вертикальные силы X_2 , X_5 и X_8 не будут вызывать моментов в сечениях стоек, по которым они направлены; это обратит в нуль дополнительное число побочных перемещений (матрица 3), и основная система, показанная на черт. 183, будет лучшей из всех рассмотренных выше.

Разберем теперь случай многоэтажной рамы (черт. 184, *a*) и дадим оценку основным системам, возможным для ее расчета и показанным на том же чертеже под различными литерями.

Основная система, показанная на черт. 184, *b*, представляет собой два бруса, заделанных каждый одним концом. На нижние части их распространяются моменты от всех единичных воздействий, приложенных в местах разрезов. Такая основная система не целесообразна.

На черт. 184, *c* показана другая основная система, состоящая также из двух брусков с заделанными концами, но разрезы сделаны в стойках рамы. Эти разрезы относятся к одному и тому же брусу, поэтому каждые две равные и противоположные силы и два равных и противоположных момента, приложенные в местах разреза, не вызывают опорных реакций и моментов в местах заделки. В этом случае эпюры моментов, вызываемые действием двух равных и противоположных сил или моментов, приложенных у разреза, распространяются только на тот замкнутый контур, в котором сделан разрез. Благодаря этому обращается в нуль ряд побочных перемещений (матрица 2).

Место разреза может быть выбрано где угодно; сделаем его у концов ригелей (черт. 184, *d*).

При таком расположении разрезов горизонтальные силы X_1 , X_4 и X_7 не будут вызывать моментов по длине ригелей. Это еще увеличивает число побочных перемещений, обращающихся в нуль (матрица 4).

Основная система, показанная на черт. 184, *e*, имеет одну основную часть 1—2—3 и две дополнительные 4—5—6 и 7—8—9 в виде трехшарнирных арок, опирающихся на нижележащую под каждой из них. Единичные моменты, приложенные в шарнирах каждой арки, вызывают распор в ее пятах, которые в свою очередь вызывают моменты в сечениях нижележащей арки. Поэтому эпюры от всех единичных моментов распространяются на нижнюю арку, и ни одно побочное перемещение не обращается в нуль. Такая основная система не целесообразна.

Картина распространения эпюр моментов резко изменяется, если пятовые шарниры отнести к ригелям (черт. 184, *f*). В этом случае единичные моменты, приложенные в ключевых шарнирах, будут вызывать моменты только в пределах стержней арки, где они приложены. Это приведет к обращению в нуль ряд побочных перемещений (матрица 5).

Сопоставляя матрицы 4 и 5, можно видеть, что они почти равноценны по количеству побочных перемещений, обращающихся в нули. Предпочтение следует отдать той из двух основных систем, в которой контуры эпюр проще для вычисления по ним остальных перемещений. Это, очевидно, будет иметь место для основной системы с разрезами (черт. 184, d).

Матрица 4

коэффициентов при неизвестных для основной системы (черт. 184, d)

| № | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | | 1 | | | | | 0 | 0 | 0 |
| 3 | | | 1 | | | | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | | | 1 | | | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | | | | 1 | | 0 | | |
| 6 | 0 | | | | | 1 | 0 | | |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | | |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | | 1 | |
| 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | | | 1 |

Матрица 5

коэффициентов при неизвестных для основных систем (черт. 184, f)

| № | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | | 0 | | 0 | 0 | 0 |
| 2 | | 1 | | | 0 | | 0 | 0 | 0 |
| 3 | | | 1 | | 0 | | 0 | 0 | 0 |
| 4 | | | | 1 | | | | 0 | |
| 5 | 0 | 0 | 0 | | 1 | | | 0 | |
| 6 | | | | | | 1 | | 0 | |
| 7 | 0 | 0 | 0 | | | | 1 | | |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | 1 | |
| 9 | 0 | 0 | 0 | | | | | | 1 |

3. Особые случаи. Встречаются сложные рамы, схема которых при включении в нее шарниров во все узлы остается неизменяемой. Такая рамная система показана на черт. 185.

Постановка шарниров во всех узлах такой рамы приводит ее к виду фермы. Нагрузка, приложенная в узлах такой основной системы, вызывает в ее стержнях только продольные усилия, определяемые путем разложения по условиям статике. Если пренебречь влиянием продольных сил на смещения узлов, то все известные члены в канонических уравнениях обращаются в нули:

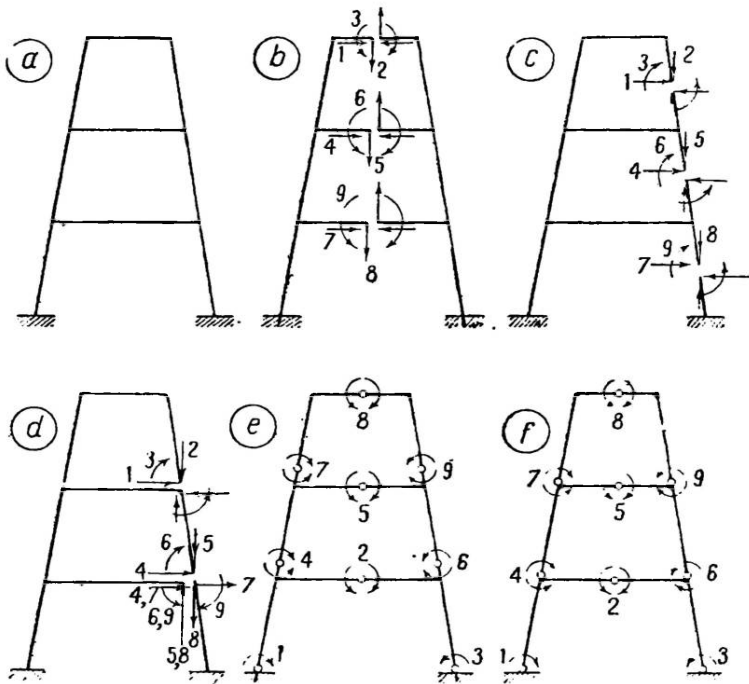
$$\Delta_{1p} = \Delta_{2p} = \Delta_{3p} = \dots = \Delta_{np} = 0.$$

Если же все известные члены в канонических уравнениях равны нулю, то, как известно из математики, все неизвестные, входящие в эти уравнения, равны нулю, так как детерминант из коэффициентов при неизвестных в системе канонических уравнений не равен нулю.

Итак, если рамная система с прямыми стержнями при введении в нее шарниров во все узлы остается неизменяемой, то при действии на нее сил, приложенных в узлах, узловые моменты в ней равны нулю. Это является результатом допущенного нами неучета смещения узлов под действием продольных деформаций.

Отметим, что в таких же условиях будут находиться рамы, в которых равные, взаимнопротивоположные силы, приложенные в симметричных узлах рамы, не вызывают смещений всех узлов ее (черт. 186, a, b, c).

В этих условиях стержни рамы не изгибаются и в них имеют место только продольные силы. Это позволяет, не проводя расчета рамы, устанавливать, что в условиях указанного нагружения неизвестные моменты и поперечная сила в разрезе каждого из контуров, образующих рамную систему, равны нулю.



Черт. 184.

Задачи и упражнения

45. Наметьте ряд основных систем для расчета рамы, показанной на черт. 187, и охарактеризуйте их с точки зрения обращения в нуль наибольшего числа побочных перемещений.

Указание. В числе вариантов возможных основных систем рассмотреть:

а) вариант, в котором в числе прочих лишних связей сняты связи в опорах 0 и 6;

б) вариант, в котором в числе устраненных связей поставлены шарниры в узлах 1, 2, 4 и 5;

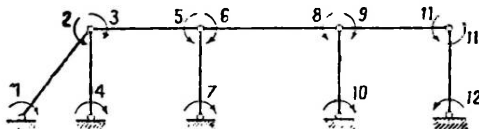
с) вариант, в котором в числе устраненных связей произведен разрез в узле 3.

46. Повторить предшествующую задачу за ачу в отношении рамы, показанной на черт. 188.

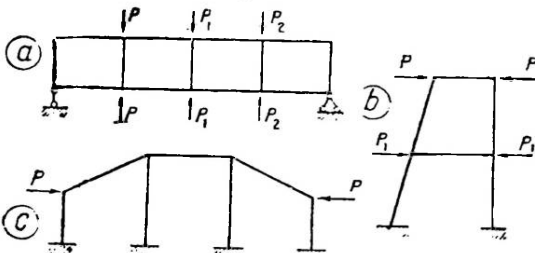
Указание. В числе вариантов возможных основных систем рассмотреть:

а) вариант с разрезом в трех местах;

б) вариант с постановкой только шарниров, из которых шарнир в узле 4 перережет все стержни, сходящиеся в нем, и рама разбивается на три трехшарнирные

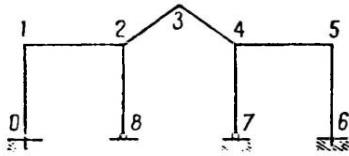


Черт. 185.

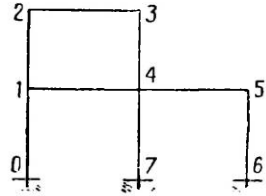


Черт. 186.

47. Для рамы, показанной на черт. 187, выбрать две симметричные основные системы, из которых одна должна быть получена постановкой только шарниров и дать им характеристику по числу обращющихся в нуль побочных перемещений и грузовых членов.

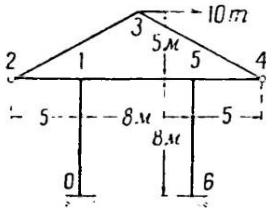


Черт. 187.

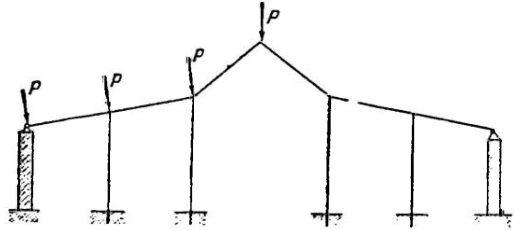


Черт. 188.

48. Установить, какое число канонических уравнений потребуется совместно решить для определения неизвестных в раме, показанной на черт. 190.

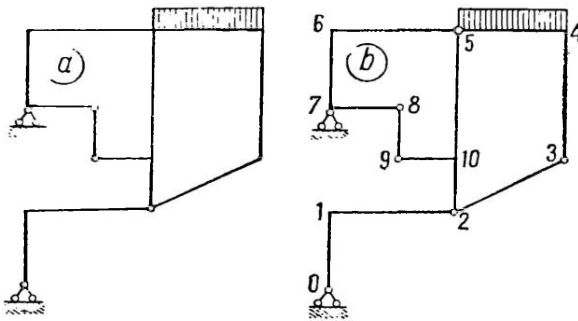


Черт. 189.



Черт. 190.

Указание: Рекомендуется продумать основную систему, образованную включением только шарниров (см. особые случаи).



Черт. 191.

49. На черт. 191, а показана рамная система, которая для проведения расчета приведена к основной системе, показанной на черт. 191, б. Показать, где в ней основная часть и где дополнительная часть.

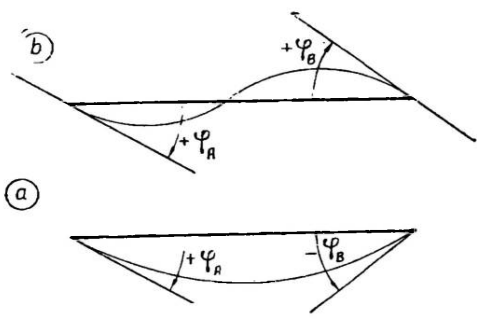
Указание: Разбор системы надо начать с опорных точек и выяснить, какого вида статически определимую систему они могут создать; этим будет установлена основная часть ее.

§ 46. ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВИДА ДЕФОРМИРОВАННОЙ РАМНОЙ СИСТЕМЫ

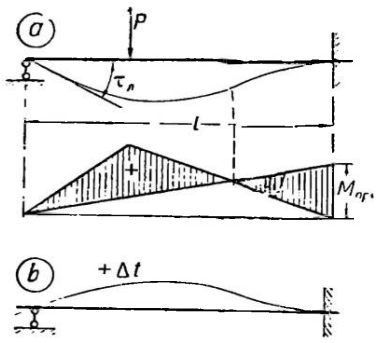
Вид рамы в деформированном состоянии, вызванном действием заданной нагрузки, температуры или смещением опор, может облегчить в отдельных случаях выбор основной системы, представление о форме линии влияния и т. д. Схему рамы

в деформированном состоянии можно получить на основе сравнительно простых соображений о возможном развитии линейных смещений и поворотов узлов и искривления осей стержней. Деформации в рамках могут происходить со смещением и без смещения узлов.

1. Влияние поворота узлов рамы при отсутствии смещения узлов. Из расчета простых двухопорных балок нам известно, что под действием заданной



Черт. 192.



Черт. 193.

нагрузки и неравномерного нагрева крайних волокон происходит искривление оси балки и поворот ее опорных сечений на некоторые углы φ_A и φ_B (черт. 192, а). Этим углам приписываются разные знаки, так как угол φ_A направлен по ходу часовой стрелки, а φ_B — против хода часовой стрелки.

Если оба угла в результате расчета будут однозначны (черт. 192, б), то это будет свидетельствовать о том, что ось балки изменяет знак кривизны.

Наличие заделки конца балки сопровождается появлением отрицательного момента на участке, прилегающем к заделке (черт. 193, а), и изменением кривизны оси балки, вызываемой действием нагрузки. Но так как опорное сечение у места заделки поворачиваться не может, то касательная, проведенная к упругой кривой у места заделки, совпадает с осью балки, и сама упругая кривая вся располагается по ту или другую сторону от первоначального положения ее оси (черт. 193, б).



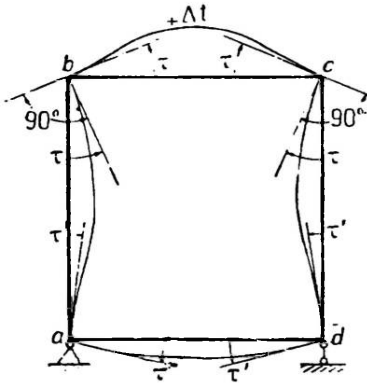
Черт. 194.

Жесткое прикрепление концов балки к стойкам (черт. 194) представляет собой нечто промежуточное между шагнирным опиранием и жесткой заделкой. Такое закрепление называется упругой заделкой. В условиях последней опорное сечение балки получает поворот на некоторый угол τ меньший, чем угол φ в балке шарнирной; поворот оси балки на угол τ происходит за счет того, что ось стойки также искривляется. Принимают, что по условию жесткого соединения в узлах поворот оси ригеля и стойки происходит на один и тот же угол τ (черт. 194).

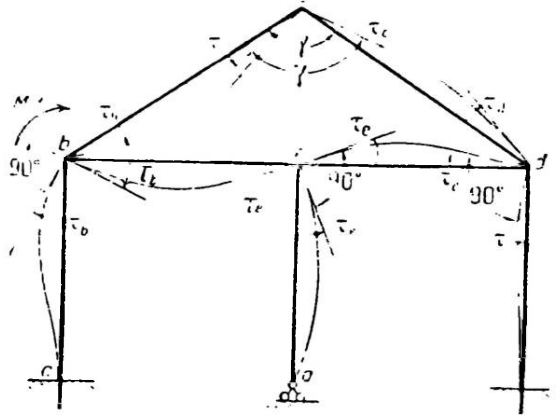
Под влиянием упругого сопротивления стойки в балке (ригеле) возникает отрицательный момент, меньший по величине, чем в условиях полной заделки ее конца, но он все-таки изменяет кривизну оси балки, вызываемую действием нагрузки и т. д.

В рамных системах, кроме изгибающих моментов в сечениях элементов, имеют место еще продольные и поперечные силы, которые вызывают соответ-

ствующие им деформации. Однако эти деформации невелики по сравнению с деформациями, вызываемыми изгибом, а потому, при приближенном построении деформации системы, ими можно пренебречь.



Черт. 195.

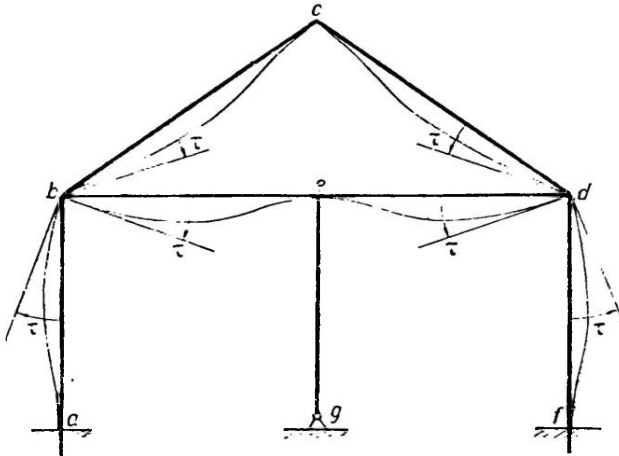


Черт. 196.

В рамных системах поворот в каждом узле распространяется на оси всех элементов, сходящихся в этом узле, и через них передается на соседние с ним узлы рамы. Если при этом не происходит поступательного смещения узлов, то

вся деформация легко строится по углам поворотов.

Например, если представить себе симметричную систему, показанную на черт. 195, под действием неравномерного нагрева верхнего ригеля, то деформация рамы в этих условиях будет симметричной без перекоса самой рамы. Под влиянием неравномерного нагрева стержень ригеля стремится искривиться в сторону нагрева (в данном случае кверху); в зависимости от этого узлы при вершинах b и c повернутся на некоторый угол τ , и



Черт. 197.

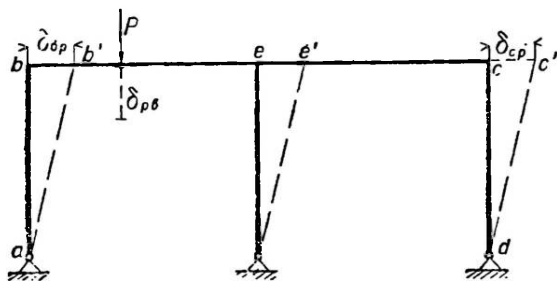
сам стержень bc получит два перегиба от действия опорных моментов, возникающих под влиянием сопротивления стоек; углы поворота τ вызовут искривление стоек внутрь рамы и поворот узлов a и d на угол τ' ; сами стойки получат изгиб осей по двоякой кривизне вследствие развития опорных моментов, вызываемых сопротивлением нижних ригелей; нижний ригель под влиянием поворота в узлах a и d искривится книзу.

Если в системе, показанной на черт. 196, вследствие воздействия момента весь узел b повернется на некоторый угол τ_b , то это вызовет изгиб элементов ba , bc , be . Искривление осей элементов be и bc вызовет в свою очередь

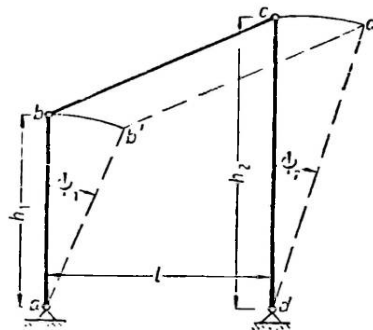
поворот узлов c и e на величины τ_c и τ_e , что будет сопровождаться искривлением осей элементов cd , eg и ed и вызовет поворот узла d на величину τ_d и соответственно искривит элемент df .

Из приведенного построения деформации системы легко усмотреть, что если в ней произойдет симметричный поворот на один и тот же угол τ двух симметричных узлов b и d (черт. 197), по условно симметричности самой системы все деформации в ней будут симметричны; узлы c и e не будут иметь поворота и стержень eg , лежащий на оси симметрии, не получит искривления.

Из аналогичного рассуждения можно видеть, что если в той же системе произойдет обратно симметричный поворот узлов b и d , то искривление элементов be , ed возрастет и поворот узла e будет вдвое больше, чем при наличии поворота только в узле b , а потому искривление элемента eg , лежащего на оси симметрии, возрастает вдвое.



Черт. 198.



Черт. 199.

2. Влияние перекоса системы. При несимметричном нагружении рамной системы происходит перекос ее, сопровождающийся смещением узлов.

Перекос системы от действия горизонтальной нагрузки понятен сам по себе. Что касается горизонтального перекоса от действия несимметричной вертикальной нагрузки, то представление о нем можно получить, исходя из следующих соображений.

Если рассматривать систему под действием несимметрично расположенного груза P (черт. 198), то по общему закону о взаимности перемещений перемещение узла b определится выражением:

$$\delta_{bp} = \delta_{pb}.$$

Так как перемещение точки приложения груза P от действия нагрузки в точке b несомненно имеет место, то следовательно должно иметь место и смещение узла b от действия вертикального груза на ригель; также должно иметь место и смещение узла c в ту же сторону, как и узла b .

Указанные перекосы вызывают изменение наклона оси или повороты осей отдельных элементов рамы на некоторые углы. На черт. 199 показан перекос рамы со стойками разной длины; под влиянием горизонтального смещения стойки рамы получают наклонное положение, повернувшись на углы ψ_1 и ψ_2 , а наклонный ригель bc переместится в положение $b'c'$. Если пренебречь незначительностью деформации ригеля под действием продольных сил, то можно считать, что ригель перемещается параллельно самому себе, т. е. что дуги bb' и cc' равны. Это не будет иметь места в рамах с ломаными и криволинейными ригелями.

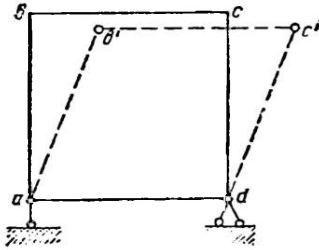
Наличие горизонтального перемещения вызывает перекос всей системы. Если система имела бы шарниры в узлах, то при перекосе часть углов, образуемых стержнями, увеличилась бы в размерах, а часть наоборот уменьшилась бы (черт. 200), т. е. по одной диагонали прямые углы обратились бы в тупые,

а по другой — в острые. В системах с жесткими узлами такое изменение углов невозможно; углы в них при смещении узлов сохраняют свою величину, вследствие чего происходит искривление осей прилегающих стержней; касательные к искривленным осям образуют в своем пересечении те же углы, какие имели место в пересечении элементов до перекоса.

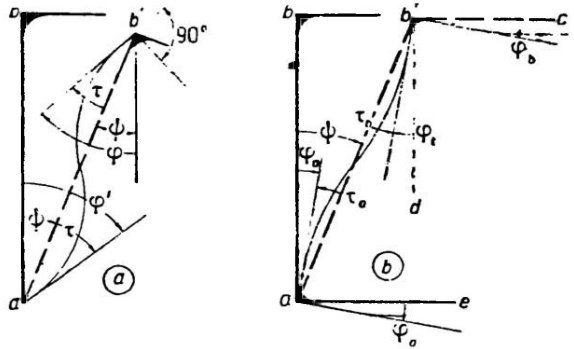
Если обозначить через φ и τ соответственно углы наклона касательной к первоначальному и новому направлению оси элемента (черт. 201, а), то для угла τ будем иметь выражение:

$$\tau = \varphi - \psi;$$

здесь ψ есть угол перекоса стержня. В этом выражении



Черт. 200.



Черт. 201.

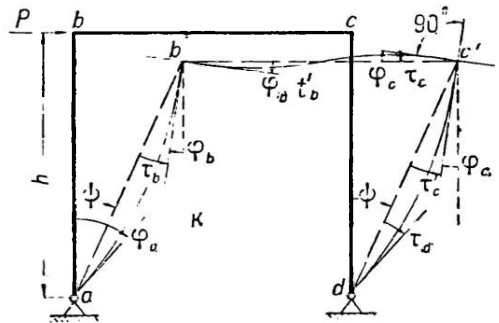
принято, что все углы имеют положительную величину, т. е. направлены по часовой стрелке.

При деформации от перекоса системы с жесткими узлами, оси элементов, ограничивающих перекашиваемый угол, не могут занять положения сторон угла $ab'c$ (черт. 201, б) или угла $ea'b'$ и не могут сохранить направления $cb'd$ и $ea'b$, которое они имели до деформации. Очевидно, что если не будет каких-либо дополнительных причин, вызывающих новое искривление осей стержней, касательные к искривленным осям стержней должны проходить внутри угла перекоса, т. е. углы τ должны лежать внутри углов ψ . Это обстоятельство необходимо иметь в виду при приближенном построении деформаций, так как опыт показывает, что правильную схему деформации можно получить только учитывая угол ψ перекоса стержней в шарнирной системе и принимая угол τ внутри его.

На черт. 202 показано построение деформаций в прямоугольной двухшарнирной раме, вызванных действием горизонтальной силы. Под действием этой нагрузки шарнирная четырехугольная рама $abcd$ заняла бы форму параллелограмма $ab'c'd$ с наклоном стоек на угол ψ и с перемещением ригеля рамы параллельно самому себе.

Вследствие наличия жестких углов произойдет искривление всех осей. Ось стержня ab получит общее искривление внутрь рамы, и касательная к упругой оси в узле b' пройдет внутри угла ψ ($kb'a$).

Так как касательные к упругим кривым должны составлять тот же угол, который имел место до изгиба, то касательная к упругой линии ригеля в узле b' должна пройти ниже ригеля под углом τ'_b ; следовательно в левой части ось ригеля получит искривление книзу. В узле c' правой стойки касательная к упругой кривой стойки пройдет под углом τ'_c к вертикали, меньшим угла ψ , следо-



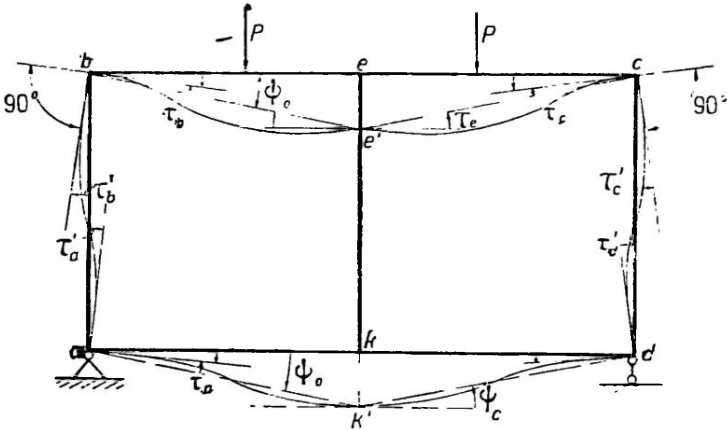
Черт. 202.

вательно ось стойки изогнется внаружу рамы: соответственно касательная к упругой кривой у узла c' должна пройти выше ригеля, и искривление оси ригеля в правой части будет направлено вверх.

Все сказанное относительно горизонтальных смещений остается справедливым при наличии вертикальных смещений узлов.

3. Деформация при одновременном повороте узлов и перекосе системы. Наличие двух причин — поворота углов и перекоса системы — осложняет построение деформированного вида системы тем, что кривизна, вызываемая одной из причин, может изменить свой знак под влиянием другой причины, что зависит от величины углов ψ и φ , определяемых расчетом.

Однако в простейших случаях загрузка представляется возможным установить исходные направления кривизны, пользуясь изложенными выше условиями изгиба брусьев и изгибов элементов при перекосах системы.



Черт. 203.

Пусть, например, требуется построить деформацию симметричной системы, показанной на черт. 203, находящейся под действием симметричной нагрузки. В этой системе под действием нагрузки может происходить просадка средней стойки, что вызывает перекос системы. В отношении верхнего ригеля, несущего нагрузку, просадка узла представляет собой то же, что просадка опоры в неразрезной балке, и сопровождается искривлением осей, прилегающих пролетов по S-образной кривой с положительными ординатами вблизи осевшей опоры и отрицательными — у других концов. Загружение пролетов ригеля силами P вызывает искривление его книзу, которое меняет знак у концов, как это соответствует условиям упругой заделки. Отсюда следует, что и по условию нагрузки и по условиям перекоса кривизна оси ригеля у концов b и c должна быть выгнута кверху, но по условиям упругости стоек ba и cd касательная к ней не может быть выше линии bc ; этим определяется направление углов поворота τ_b и τ_c . Что касается кривизны у узла e , то вполне очевидно, что она должна быть отрицательной. Кривизна нижнего ригеля устанавливается условиями перекоса его под действием просадки kk' от давления стойки и будет иметь двоякую кривизну в обеих панелях ak и kd рамы. Направление кривизны устанавливается направлением касательных, которые должны в этом случае проходить внутри угла перекоса ψ_0 . Наконец направлением углов поворота $+\tau_a'$, $+\tau_b'$ и $-\tau_c'$, $-\tau_d'$ устанавливается изгиб осей стоек рамы. В результате построения получены разнозначные искривления осей у всех углов рамы, как этого и надо было ожидать, так как моменты у концов элементов, сходящихся в одном узле, равны и противоположны по знаку.

Заканчивая на этом вопрос о схематическом изучении вида деформированной системы, отметим, что это изучение, имеющее значение для выбора основной

системы и построения линий влияния, обычно сводится к изучению деформаций от единичных воздействий на систему, что, как можно видеть из изложенного, значительно проще и не требует изучения развития деформаций от суммарного действия нагрузок, перекоса и пр.

§ 47. УПРОЩЕНИЯ, ПОЛУЧАЕМЫЕ ОТ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СИММЕТРИИ

При выборе основной системы надо учитывать возможность преобразований неизвестных. Такие преобразования прежде всего возможны по условиям симметрии основной системы.

В сложных рамах встречаются системы с одной и реже с двумя осями симметрии.

Из предыдущего (§ 9) нам известно, что в системах с одной осью симметрии при выборе основной системы с неизвестными, расположенными симметрично, можно разложить неизвестные на парные прямо и обратно симметричные неизвестные и этим достигается распадение канонических уравнений на две группы; в одну из них войдут все симметричные неизвестные, в другую — все обратно симметричные неизвестные.

Этот прием распространяется как на неизвестные, выделяемые из опорных закреплений, так и на неизвестные, выделяемые в симметрично расположенных разрезах и шарнирах.

Например для симметричной рамы, показанной на черт. 204, можно предложить несколько симметричных основных систем (показанных на том же чертеже под литерами *b*, *c*, *d*).

В системе, показанной на черт. 204, *b*, неизвестное X_9 , расположенное на оси симметрии, создает симметричную эпюру (черт. 205, *a*). Остальные неизвестные на той же схеме расположены попарно симметрично, но не равны между собой; их можно разложить на новые неизвестные, удовлетворяющие условиям:

$$\begin{aligned} Y_1 + Y_2 = X_1 \quad Y_3 + Y_4 = X_3 \quad Y_5 + Y_6 = X_5 \quad Y_7 + Y_8 = X_7 \\ Y_1 - Y_2 = X_2 \quad Y_3 - Y_4 = X_4 \quad Y_5 - Y_6 = X_6 \quad Y_7 - Y_8 = X_8 \end{aligned}$$

Эпюры от этих новых неизвестных показаны на черт. 205. Перемещения, вычисленные по ним, приводят канонические уравнения к распадению на две группы, что видно по эпюрам и из матрицы 6.

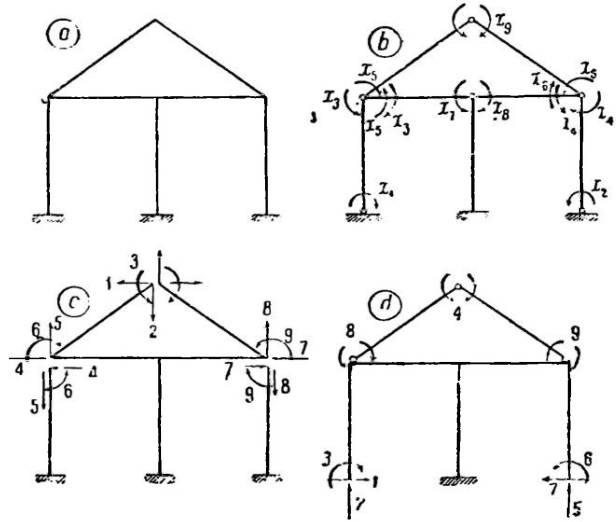
I группа уравнений — с симметричными неизвестными:

$$Y_1, Y_3, Y_5, Y_7, X_9.$$

II группа уравнений — с обратно симметричными неизвестными:

$$Y_2, Y_4, Y_6, Y_8.$$

В основной системе, показанной на черт. 204, *c*, разложение на новые парные неизвестные может быть проведено для симметрично направленных неизвестных X_4 и X_7 , X_5 и X_8 , X_6 и X_9 .



Черт. 204.

Побочные перемещения, обращаясь в нуль по этой системе, показаны в матрице 7. Канонические уравнения распадаются на две группы:

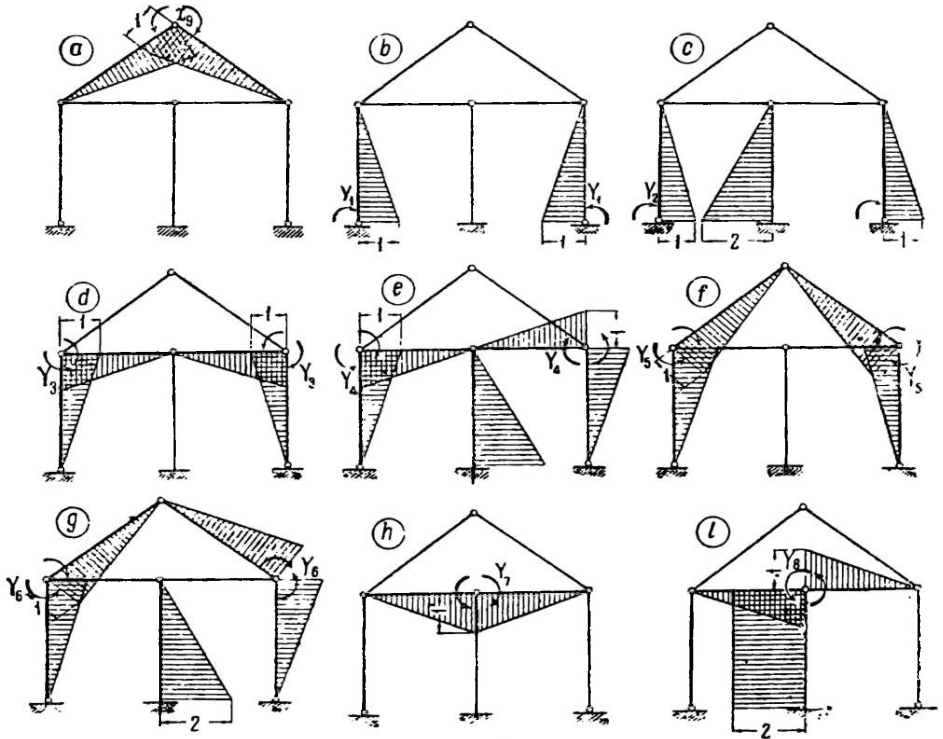
$$I \text{ с неизвестными } X_1, X_3, Y_4, Y_5, Y_6, \\ II \text{ с неизвестными } X_2, Y_7, Y_8, Y_9.$$

Матрица 6
коэффициентов при неизвестных для основной системы (черт. 204,б)

| | Y_1 | Y_2 | Y_3 | Y_4 | Y_5 | Y_6 | Y_7 | Y_8 | X_9 |
|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

Матрица 7
коэффициентов при неизвестных для основной системы (черт. 204,с)

| | X_1 | X_2 | X_3 | Y_4 | Y_5 | Y_6 | Y_7 | Y_8 | Y_9 |
|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |



Черт. 205.

Разобранные два случая в достаточной степени характеризуют значение этого приема для расчета сложных рам.

Напомним, что распадение канонических уравнений на две группы с симметричными и обратно симметричными неизвестными позволяет указывать без

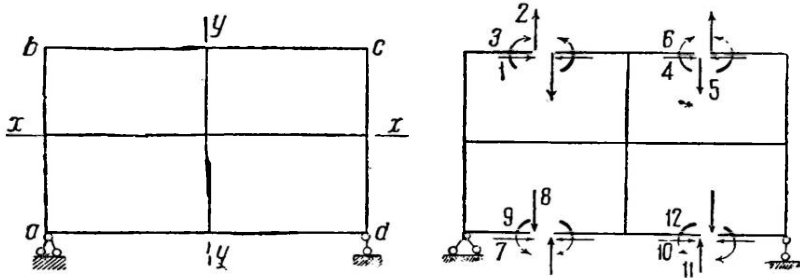
расчета те неизвестные, которые в условиях симметричного или обратно симметричного нагружения обращаются в нули.

Действительно, при симметричном нагружении все известные (грузовые) члены Δ_{kP} в уравнениях с обратно симметричными неизвестными обращаются в нули. Последнее связано с обращением в нуль всех неизвестных, входящих в эти уравнения, т. е. обратно симметричных неизвестных.

При обратно симметричной нагрузке обращаются в нуль все симметричные неизвестные.

В системах с двумя осями симметрии (черт. 206) возможно распадение канонических уравнений на четыре группы. Разберем такое разложение на конкретном примере рамы, показанной на черт. 206.

В этой раме двенадцать лишних неизвестных, расположенных симметрично относительно двух осей. Считаем, что неизвестные каждого вида, например X_2 ,



Черт. 206.

X_5, X_8, X_{11} , не равны между собой по величине. Каждую группу неизвестных такого вида можно разложить на четыре новых неизвестных, которые будут удовлетворять условиям:

| | | |
|--|--------------------------------------|---------|
| 1) полной симметрии (черт. 207,а) | $Y_2 + Y_5 + Y_8 + Y_{11} = X_2;$ | } (123) |
| 2) обратной симметрии относительно оси Y (черт. 207,б) | $Y_2 - Y_5 + Y_8 - Y_{11} = X_5;$ | |
| 3) обратной симметрии относительно оси X (черт. 207,с) | $Y_2 + Y_5 - Y_8 - Y_{11} = X_8;$ | |
| 4) обратной симметрии относительно двух осей (черт. 207,д) | $Y_2 - Y_5 - Y_8 + Y_{11} = X_{11}.$ | |

Такое разложение возможно, и величина каждого из вводимых новых неизвестных определяется значениями:

$$Y_2 = \frac{1}{4}(X_2 + X_5 + X_8 + X_{11}); \quad Y_5 = \frac{1}{4}(X_2 + X_5 - X_8 - X_{11});$$

$$Y_8 = \frac{1}{4}(X_2 - X_5 + X_8 - X_{11}); \quad Y_{11} = \frac{1}{4}(X_2 - X_5 - X_8 + X_{11}).$$

Из сопоставления эпюр (черт. 207), вызываемых действием этих новых неизвестных $\bar{Y}_2 = \bar{Y}_5 = \bar{Y}_8 = \bar{Y}_{11} = 1$, видно, что все они взаимно нулевые.

Сложение их по вышеуказанным суммам (123) создает эпюры, вызываемые действием каждого из неизвестных $\bar{X}_2 = \bar{X}_5 = \bar{X}_8 = \bar{X}_{11} = 1$.

Все рассуждения, сделанные выше, могут быть повторены в отношении двух других групп одноименных неизвестных:

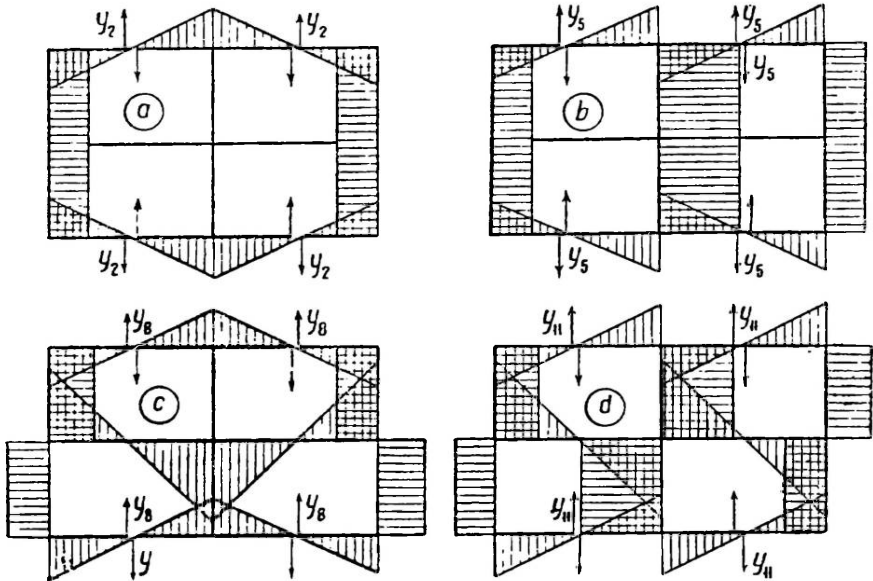
$$X_1, X_4, X_7, X_{10} \text{ и } X_3, X_6, X_9, X_{12}.$$

Они также распадутся на четыре подгруппы.

В результате 12 канонических уравнений разобьются на четыре самостоятельные группы уравнений:

$$\begin{aligned}
 Y_1\delta_{11} + Y_2\delta_{12} + Y_3\delta_{13} &= -\Delta_{1p}; & Y_4\delta_{44} + Y_5\delta_{45} + Y_6\delta_{46} &= -\Delta_{4p}; \\
 Y_1\delta_{21} + Y_2\delta_{22} + Y_3\delta_{23} &= -\Delta_{2p}; & Y_4\delta_{54} + Y_5\delta_{55} + Y_6\delta_{56} &= -\Delta_{5p}; \\
 Y_1\delta_{31} + Y_2\delta_{32} + Y_3\delta_{33} &= -\Delta_{3p}; & Y_4\delta_{64} + Y_5\delta_{65} + Y_6\delta_{66} &= -\Delta_{6p}; \\
 Y_7\delta_{77} + Y_8\delta_{78} + Y_9\delta_{79} &= -\Delta_{7p}; & Y_{10}\delta_{10,10} + Y_{11}\delta_{10,11} + Y_{12}\delta_{10,12} &= -\Delta_{10p}; \\
 Y_7\delta_{87} + Y_8\delta_{88} + Y_9\delta_{89} &= -\Delta_{8p}; & Y_{10}\delta_{11,10} + Y_{11}\delta_{11,11} + Y_{12}\delta_{11,12} &= -\Delta_{11p}; \\
 Y_7\delta_{97} + Y_8\delta_{98} + Y_9\delta_{99} &= -\Delta_{9p}; & Y_{10}\delta_{12,10} + Y_{11}\delta_{12,11} + Y_{12}\delta_{12,12} &= -\Delta_{12p};
 \end{aligned}$$

Мы показали возможность использования разложения канонических уравнений на четыре группы при наличии в системе двух осей симметрии. Дальнейшего



Черт. 207.

уточнения этого приема мы не будем делать, так как случай таких рам редко встречается в производстве, и часто бывает целесообразна замена его другими приемами.

§ 48. РАСЧЕТ СИММЕТРИЧНЫХ РАМ ПО УСЛОВНЫМ ОСНОВНЫМ СИСТЕМАМ

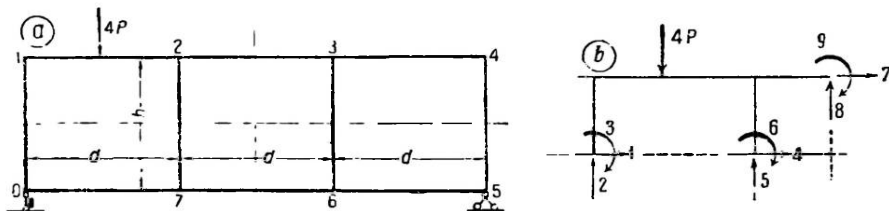
Иногда в расчетах симметричных рам может быть применен прием расчленения их на отдельные части. Расчленение делается по виду деформации рамы под действием нагрузки. Использование этого приема целесообразно в тех случаях, когда в выделяемой части можно найти дополнительные условия для определения лишних неизвестных, прикладываемых к выделенной части. Разберем этот прием на примере рамы, показанной на черт. 208, а.

Эта рама девять раз статически неопределима, и нагрузка расположена на ней произвольно. Выделение в раме одной четверти двумя сечениями по осям симметрии (черт. 208, б) не создает в указанных условиях дополнительных данных для определения неизвестных.

Разложим заданную нагрузку на прямо и обратно симметричную относительно двух осей симметрии рамы.

1. При симметричном расположении нагрузки относительно обеих осей симметрии (черт. 209, *a*) деформация рамы будет симметричной относительно обеих осей. В этих условиях углы наклона касательных к упругой кривой у мест пересечения их с осями симметрии равны нулю ($y' = 0$), и поперечные силы в этих сечениях рамы равны нулю ($Q = 0$); также узлы рамы 2, 3, 7 и 6 не получают горизонтальных смещений, следовательно продольные силы в стержнях 2—3 и 7—6 равны нулю ($N = 0$).

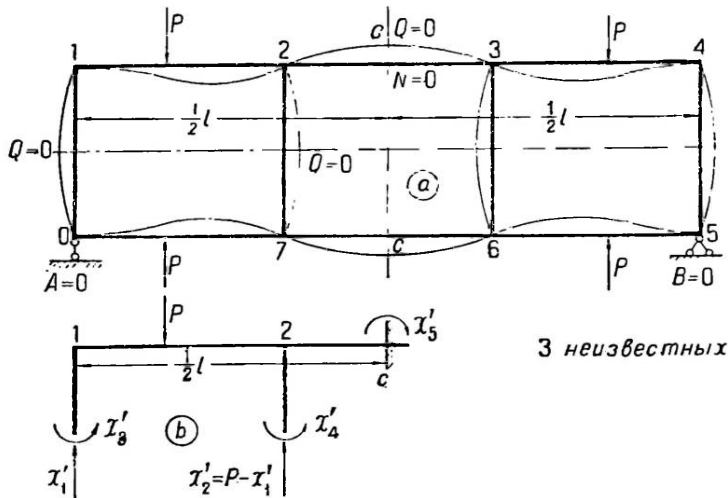
Выделение в этих условиях из рамы одной ее четверти (черт. 209, *b*) позволяет рассматривать ее как балку, заделанную одним концом, с приложенными



Черт. 208.

к ней пятью неизвестными X_1' , X_2' , X_3' , X_4' и X_5' . Из них момент X_3' определяется по условиям статики, как момент в заделанном конце балки, и сила X_2' — из условия проекций на вертикальную ось: $X_3' = P - X_1'$. Следовательно для определения остаются три неизвестных.

2. В случае симметричного нагружения относительно вертикальной оси и обратно симметричного относительно горизонтальной оси деформация системы будет иметь вид, показанный на черт. 210, *a*.



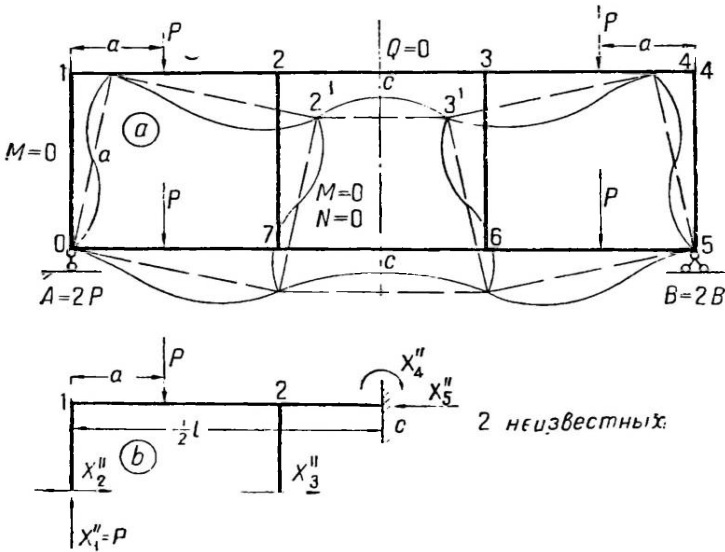
3 неизвестных

Черт. 209.

При таком нагружении опорные реакции равны по величине и по знаку $A = B = 2P$ и симметричны относительно вертикальной оси симметрии. Так как упругие кривые в горизонтальных поясах рамы вполне одинаковы и симметричны, то поперечные силы по концам их должны быть одинаковыми; из этого следует, что опорное давление распределяется поровну между верхними и нижними узлами в каждой опорной стойке, поэтому продольные силы в опорных стойках рамы равны силам P ($N = P$).

По условию симметричного нагружения относительно вертикальной оси касательные к упругим кривым в сечениях на этой оси симметрии параллельны осям стержней 2—3 и 7—6 ($y' = 0$), и поперечные силы в этих сечениях равны нулю ($Q = 0$). По условию же обратно симметричного нагружения относительно горизонтальной оси ординаты упругой кривой в сечениях на этой оси равны нулю ($y = 0$), и моменты в сечениях стержней рамы на этой оси равны нулю ($M = 0$). Кроме того узлы 2, 7, 3 и 6 рамы смещаются на одну и ту же величину, следовательно продольные силы в стойках 2—7 и 3—6 рамы равны нулю ($N = 0$).

При таком виде деформаций вся рама может быть расчленена на четыре части (черт. 210, б), из которых каждая может рассматриваться как балка, заделанная в сечениях по оси вертикальной симметрии. Из числа неизвестных, кото-



Черт. 210.

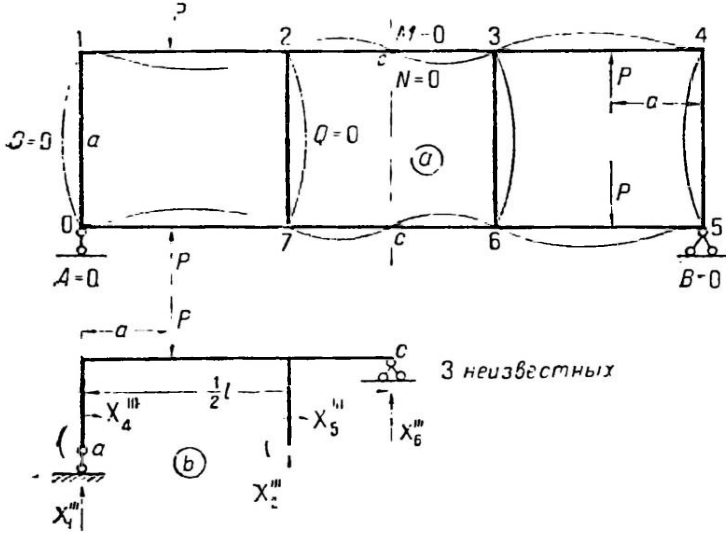
рые должны быть приложены в местах разреза, сила $X_1'' = P$ как продольная сила опорной стойки; момент X_4'' в заделке и продольная сила X_5'' определяются из условия равновесия выделенной балки; следовательно для определения остаются два неизвестных: X_2'' и X_3'' .

3. При нагружении, симметричном относительно горизонтальной оси и обратно симметричном относительно вертикальной оси деформация рамы будет иметь вид, показанный на черт. 211, а.

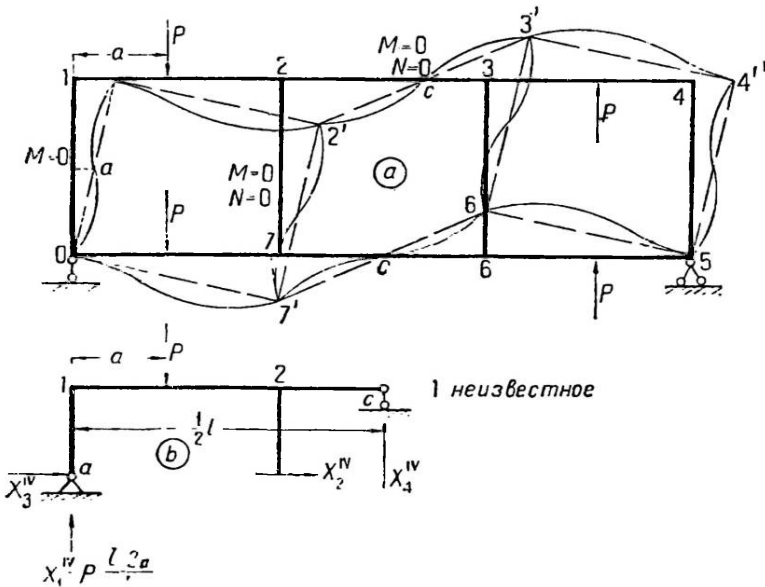
По условию обратно симметричного нагружения относительно вертикальной оси рамы ординаты упругой оси и моменты в сечениях стержней на линии этой оси равны нулю; и так как узлы 2, 3, 7 и 6 не смещаются, то продольные силы в стержнях 2—3 и 7—6 равны нулю. По условию симметрии в нагружении относительно горизонтальной оси углы наклона касательных к упругой кривой и поперечные силы в сечениях стоек по линии оси рамы равны нулю.

При этих условиях всю раму можно рассматривать расчлененной на четыре части (черт. 211, б) и рассматривать каждую из них, как балку, свободно лежащую на двух опорах; одна опора в точке С представляется в виде неподвижного шарнира, а другая в точке А на середине опорной стойки — в виде подвижного шарнира, имеющего горизонтальное смещение. Из числа лишних неизвестных, которые должны быть приложены в сечениях по разрезам, силы X_1''' и X_6''' определяются из условий равновесия, как реакции балки; следовательно остается определить три лишних неизвестных: X_2''' , X_4''' и X_5''' .

4. В случае обратно симметричного нагружения относительно обеих осей симметрии деформация рамы будет иметь вид, показанный на черт. 212, а с горизонтальными и вертикальными смещениями всех узлов.



Черт. 211.



Черт. 212.

Опорные реакции в этом случае равны, но противоположны по знаку $A = -B = 2P \frac{l-2a}{l}$, т. е. обратно симметричны относительно вертикальной оси. Так как упругие кривые обоих поясов вполне одинаковы, то поперечные силы

по их концам должны быть одинаковыми; это возможно только при условии разделения поровну опорных реакций между обоими концами опорных стоек; этим восстанавливается условие обратной симметричности рамы относительно горизонтальной оси.

По условиям обратной симметрии в загрузении ординаты упругой кривой и моменты в сечениях стержней на осях симметрии равны нулю. По условию одинаковых смещений узлов 2, 3 и 7, 6 продольные силы в стержнях 2—3, 2—7, 3—6 и 6—7 равны нулю.

Так как точки *a* и *c* системы при этом виде загрузки не получают вертикального смещения, то раму можно рассматривать расчлененной на четыре части и рассчитывать каждую из них, как балку, свободно опертую по концам (черт. 212, *b*) с неподвижной опорой в точке *a*. Из числа неизвестных, которые должны быть приложены в местах расчленений, сила

$$X_1^{IV} = \frac{1}{2} 2P \frac{l-2a}{l}$$

(по условию разделения опорных реакций), силы X_3^{IV} и X_4^{IV} определяются из условий равновесия простой балки; следовательно определению подлежит одна лишняя неизвестная сила X_2^{IV} .

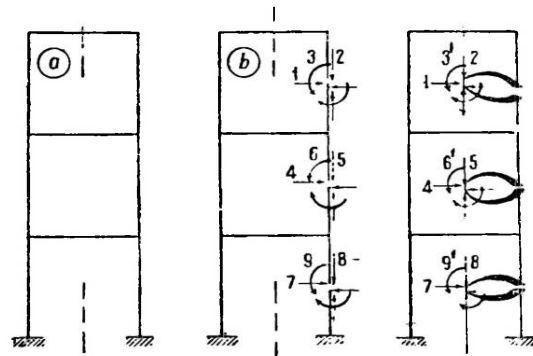
Таким образом мы показали, что при разложении нагрузки на прямо и обратно симметричную расчет рамы (черт. 208) может быть заменен расчетом одной четверти, выделяемой из нее, что значительно проще. Действительные величины усилий и моментов в сечениях рамы определяются суммированием усилий и моментов, полученных из расчета четверти рамы при всех видах загрузки.

§ 49. УПРОЩЕНИЕ КАНОНИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ПУТЕМ ПЕРЕНОСА НЕИЗВЕСТНЫХ

Из предыдущего (§ 11) нам известно, что в замкнутом контуре перенос неизвестных в центр фиктивных упругих сил влечет за собой обращение в нуль побочных перемещений, вызываемых этими неизвестными относительно друг друга.

В сложных рамах, состоящих из ряда замкнутых контуров (черт. 213, *a*), также возможен перенос неизвестных, относящихся к каждому контуру, в центр фиктивных упругих сил контура, что будет сопровождаться обращением в нуль соответственных побочных перемещений.

Например в основной системе (черт. 213, *b*), выбранной для расчета рамы, показанной на черт. 213, *a*, ряд побочных перемещений обращаются в нуль



Черт. 213.

по условию распространения эпюр моментов при сделанных разрезах. В матрице 8 эти перемещения показаны нулями обычного шрифта. Перенос неизвестных в каждом контуре в центр упругих сил (черт. 213, *c*) вызовет обращение в нуль еще ряда побочных перемещений; они показаны в той же матрице жирным шрифтом. Часть из них:

$$\delta_{23} = \delta_{32} = \delta_{36} = \delta_{63} = \delta_{89} = \delta_{98}$$

обращаются в нуль по свойству центра фиктивных упругих сил, другая же часть — по условию перенесения неизвестных на ось симметрии.

Из рассмотрения матрицы можно видеть, что канонические уравнения значительно упростились. В этом случае особо благоприятным оказался перенос

неизвестных благодаря тому, что центры упругих сил во всех контурах лежат на оси симметрии.

Перенос неизвестных в замкнутом контуре может быть сделан не только в центр упругих сил, но и в любую точку. Такой перенос не обращает в нуль всех побочных перемещений от переносимых сил в одном контуре, но он может повлечь обращение в нуль ряда других побочных перемещений между переносимыми неизвестными и неизвестными, относящимися к другим контурам.

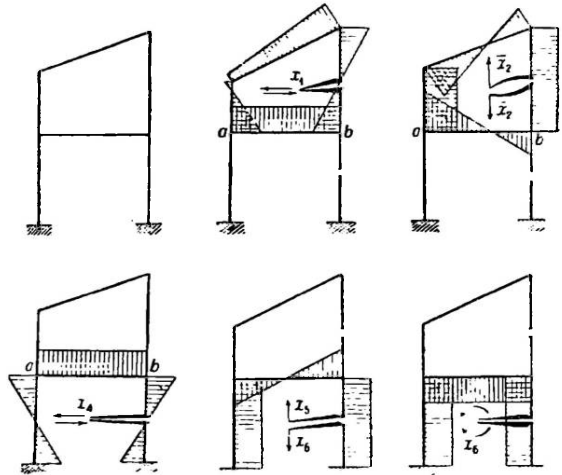
Этот прием имеет существенное значение для упрощения канонических уравнений при расчете несимметричных рамных систем.

Применим изложенные соображения к расчету несимметричной сложной рамы, показанной на черт. 214. В этой раме центр упругих сил верхнего контура

не лежит на оси симметрии нижнего контура, и эпюра, вызываемая действием силы X_2 , будет асимметрична. Хотя она будет двухзначна на протяжении нижнего ригеля ab , но благодаря своей асимметрии не обеспечит обращения в нуль побочных перемещений от этой силы и неизвестных нижнего контура. Обращение в нуль побочных перемещений δ_{24} , δ_{42} , δ_{26} и δ_{62} будет обеспечено, если перенос неизвестного X_2 в верхнем контуре будет сделан на ось симметрии нижнего контура.

Далее вполне очевидно, что эпюры моментов от сил X_1 и X_4 , отнесенных к центрам упругих сил в каждом из контуров, не равны нулю на длине ригеля ab , разделяющего эти контуры (черт. 214). Если бы эти силы были направлены вдоль этого ригеля, то указанные моменты были бы равны нулю, что обеспечило бы обращение в нуль всех побочных перемещений каждой из этих сил с силами соседних контуров.

Таким образом мы приходим к выводу о целесообразности переноса неизвестных в обоих контурах в точку на середине разделяющего их ригеля (черт. 215)



Черт. 214.

Матрица 8

коэффициентов при неизвестных для основной системы (черт. 213,с)

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Матрица 9

коэффициентов при неизвестных для основной системы (черт. 216)

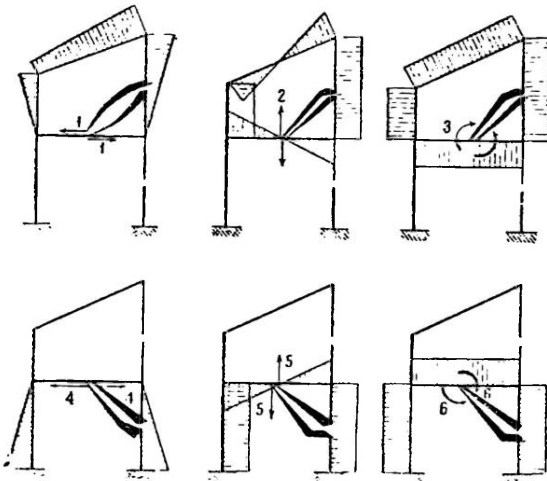
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

при таком переносе канонические уравнения приводятся к следующему сравнительно простому виду:

$$\begin{aligned} X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + X_3\delta_{13} &= -\Delta_{1p}; \\ X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + X_3\delta_{23} + X_6\delta_{25} &= -\Delta_{2p}; \\ X_1\delta_{31} + X_2\delta_{32} + X_3\delta_{33} + X_6\delta_{36} &= -\Delta_{3p}; \\ X_4\delta_{44} + X_6\delta_{46} &= -\Delta_{4p}; \\ X_3\delta_{52} + X_5\delta_{55} &= -\Delta_{5p}; \\ X_3\delta_{63} + X_4\delta_{64} + X_6\delta_{66} &= -\Delta_{6p}. \end{aligned}$$

Рассмотрим еще случай несимметричной рамы, показанной на черт. 216, а. Она отличается от рассмотренной выше рамы наличием второго пролета в первом ярусе.

Перенос в центры упругих сил обеспечит только обращение в нуль побочных перемещений для неизвестных, относящихся к каждому контуру. Можно ожидать обращения в нуль большего числа побочных перемещений, если в двухэтажной части и правом нижнем контуре перенос неизвестных будет сделан



Черт. 215.

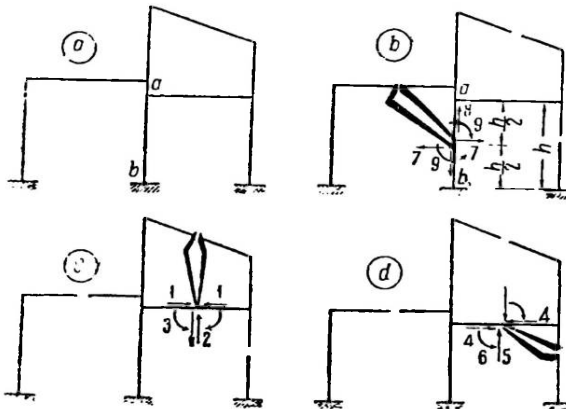
в среднюю точку ригеля, разделяющего эти контуры, как это было сделано в предыдущем случае, и если перенос неизвестных в левом нижнем контуре будет сделан на середину стойки *ab*.

В матрице 9 показаны все побочные перемещения, обращающиеся в нуль в условиях указанной основной системы и переноса неизвестных.

Кроме изложенного приема переноса в одну точку всех внутренних сил и момента, относящихся к одному сечению, можно делать переносы отдельно каждой из сил и заменять момент парой сил.

При замене момента парой сил, равнодействующая внутренних усилий, относящаяся к сечению, определяется тремя силами, из которых две взаимно параллельны, но не равны по величине.

Предположим например, что мы имеем раму с заделанными пятнами (черт. 217, а). Разрезом по середине ригеля мы приводим ее к виду двух статически определимых брусьев, находящихся под действием двух сил X_1, X_2 и момента X_3 , определяющих равнодей-

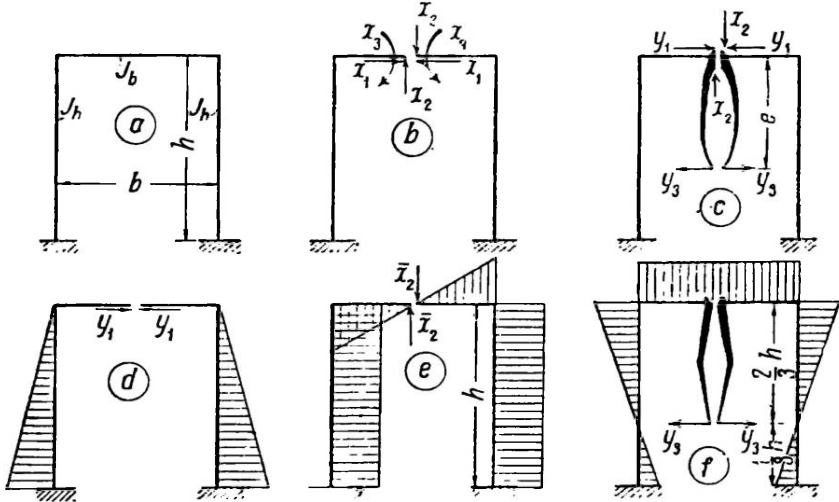


Черт. 216.

ствующую R , приложенную вне сечения. Мы можем заменить момент X_2 парой $Y_3 e$ с плечом e , выбираемым произвольно. Дадим силам Y_3 горизонтальное направление, тогда принятая нами основная система будет находиться под действием сил:

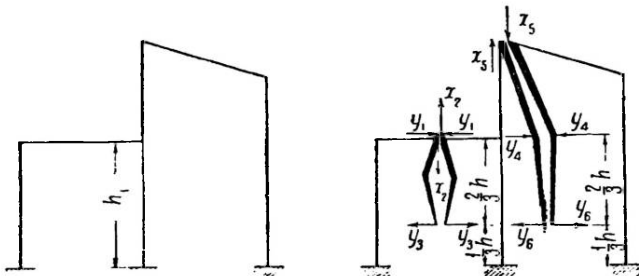
$$X_2, Y_1 = X_1 + Y_1 \text{ и } Y_3$$

Возможность произвольного выбора плеча пары сил позволяет использовать его для образования взаимно нулевых эпюр, т. е. таких, которые обеспечивают обращение в нуль побочных перемещений.



Черт. 217.

Например в частном случае рассматриваемой рамы, показанной на черт. 217, сила Y_3 может быть приложена на расстоянии $e = \frac{2}{3} h$ от ригеля рамы. Эпюра моментов от этой силы (черт. 217, f) имеет нулевую точку на уровне центра



Черт. 218.

тяжести эпюры моментов от силы Y_1 . Из сопоставления эпюр от действия указанных сил можно видеть, что все побочные перемещения обращаются в нуль.

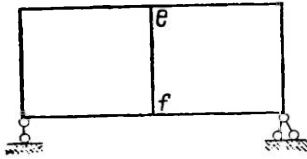
Разобранный пример является простым и достаточно очевидным. В более сложных рамах точки, в которые следует отнести силы пары, заменяющей момент, не всегда очевидны, поэтому приходится варьировать перенос и замену.

В предыдущем изложении мы для ясности обозначили новые силы через Y , однако в порядке расчета это не имеет значения и можно сохранить обозначение неизвестных сил через X .

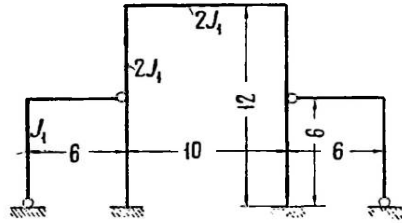
На черт. 218 показана рама, в которой описанным приемом достигнуто обращение в нуль 8 побочных перемещений из 15.

Задачи и упражнения

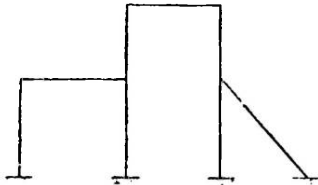
50. Путем включения шарниров в раму, показанную на черт. 219, получить основную систему, в которой канонические уравнения распадаются на группы. Сопоставить систему канонических уравнений, получаемую в этом случае, с уравнениями, получаемыми путем внесения разрезов.



Черт. 219.



Черт. 220.



Черт. 221.

51. В рамной системе, показанной на черт. 220, наметить ряд возможных основных систем и дать им оценку по числу побочных перемещений, обращающихся в нуль.

Указание. В числе возможных систем рассмотреть систему с разрезом и систему, получаемую только включением шарниров.

52. В рамной системе, показанной на черт. 221, наметить две-три основные системы и сопоставить их по количеству побочных перемещений, которые могут быть обращены в нуль соответствующим выбором места разреза, или переносом неизвестных в центр фиктивных упругих сил, или переносом в любую точку и т. п.

§ 50. ГРУППОВЫЕ НЕИЗВЕСТНЫЕ И ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

Развитие вопроса о приведении к нулю побочных перемещений наиболее широко охватывается введением в расчет вместо отдельных неизвестных целых групп их, связываемых определенными условиями. Этим приемом обобщаются способы использования парных неизвестных, переноса их и т. п.

Для выяснения, что представляет собой прием группирования, рассмотрим случай простой рамы, заделанной двумя концами (черт. 222). Приняв для нее за основную систему брус, заделанный одним концом, получим эпюры моментов от лишних неизвестных, показанные на том же чертеже. Нам известен прием приведения к нулю побочных перемещений в такой раме путем переноса неизвестных в центр упругих фиктивных сил (черт. 223). Покажем теперь, как можно получить те же результаты, рассматривая систему под одновременным действием комбинации групп, составляемых из тех же неизвестных.

Рассмотрим раму под действием группы, состоящей из силы \bar{X}_1 и части момента $\alpha_{13}\bar{X}_3$. Такая комбинация одновременных воздействий создаст эпюру моментов (черт. 224, а), ординаты которой определяются уравнением:

$$\bar{M}_{(1)} = \bar{M}_1 + \alpha_{13}\bar{M}_3 \quad (124)$$

Перемещение, вызываемое этой группой в какой-либо точке той же рамы по направлению единичного воздействия $\bar{X}_k = 1$, определяется выражением возможной работы:

$$1\delta_{k(1)} = \sum_s \int_s \bar{M}_k (\bar{M}_1 + \alpha_{13}\bar{M}_3) \frac{ds}{EJ} = \delta_{k1} + \alpha_{13}\delta_{k3} \quad (125)$$

Аналогичным образом мы можем рассматривать ту же раму под действием группы сил \bar{X}_2 и $\alpha_{23} \bar{X}_3$, которая создает эпюру моментов, определяемую уравнением (черт. 224, б):

$$\bar{M}_{(2)} = \bar{M}_2 + \alpha_{23} \bar{M}_3.$$

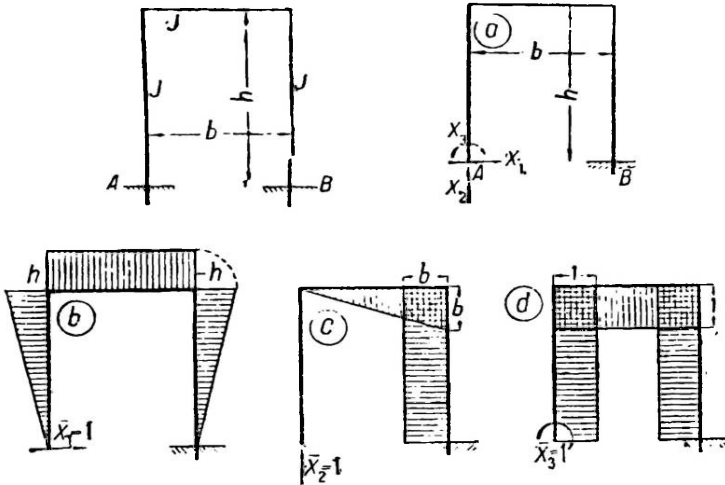
Перемещения, вызываемые ею в раме, определяются выражением возможной работы:

$$\delta_{h(2)} = \delta_{h2} + \alpha_{23} \delta_{h3}.$$

Мы взяли коэффициенты α_{13} , α_{23} произвольными, но мы можем поставить условие, чтобы побочные перемещения $\delta_{(1)3}$ и $\delta_{(2)3}$ обратились в нули. Это приведет к следующим условиям, определяющим значения этих коэффициентов:

$$\begin{aligned} \delta_{(1)3} = \sum \int (\bar{M}_1 + \alpha_{13} \bar{M}_3) \bar{M}_3 \frac{ds}{EJ} = 0; & \quad \alpha_{13} = - \frac{\sum \int \bar{M}_1 \bar{M}_3 \frac{ds}{EJ}}{\sum \int \bar{M}_3^2 \frac{ds}{EJ}} = - \frac{\delta_{13}}{\delta_{33}}; \\ \delta_{(2)3} = \sum \int (\bar{M}_2 + \alpha_{23} \bar{M}_3) \bar{M}_3 \frac{ds}{EJ} = 0; & \quad \alpha_{23} = - \frac{\sum \int \bar{M}_2 \bar{M}_3 \frac{ds}{EJ}}{\sum \int \bar{M}_3^2 \frac{ds}{EJ}} = - \frac{\delta_{23}}{\delta_{33}}. \end{aligned}$$

При этих значениях эпюры групповых моментов $\bar{M}_{(1)}$ и $\bar{M}_{(2)}$ получают очертания, точно совпадающие с очертаниями эпюр на черт. 223.



Черт. 222.

Таким образом мы показали на простом примере, что введение групповых единичных эпюр дает возможность приводить к нулю побочные перемещения. Это положение остается в силе для любой сложной комбинации групп.

Групповые перемещения обладают всеми свойствами, присущими простым перемещениям, и в том числе взаимностью

$$1_{(k)} \delta_{(k)(m)} = 1_{(m)} \delta_{(m)(k)}. \quad (126)$$

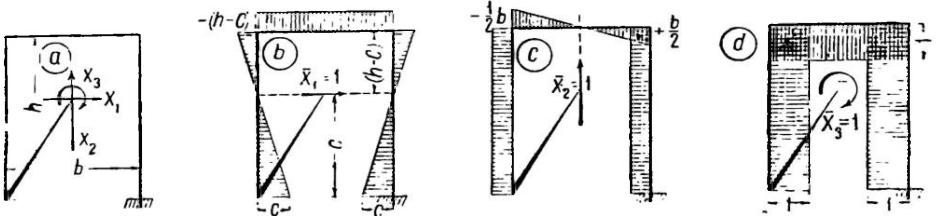
Эта зависимость очевидна, так как левую часть равенства следует рассматривать как возможную работу единичных сил и моментов группы k на переме-

щениях, вызываемых второй группой m ; правая же часть должно рассматриваться как взаимная работа сил и моментов второй группы на перемещениях, вызываемых первой группой.

С алгебраической точки зрения и правая и левая части определяются произведением одинаковых множителей:

$$\sum \int \bar{M}_{(k)} \bar{M}_{(m)} \frac{ds}{EJ}$$

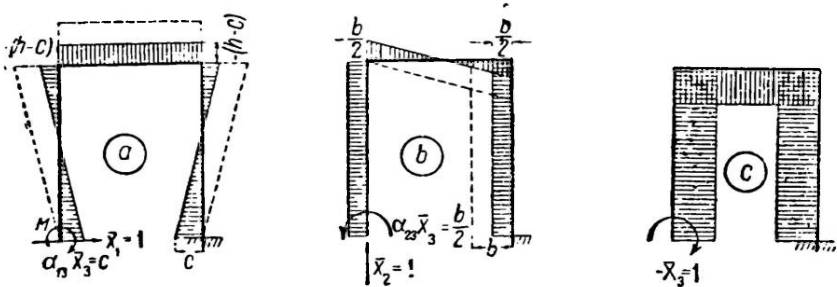
Разберем теперь, какой вид будут иметь канонические уравнения при групповых неизвестных.



Черт. 223.

Обозначим групповые неизвестные через $Y_{(1)}, Y_{(2)}, \dots, Y_{(n)}$, полагая, что они являются линейными функциями от простых неизвестных. Рассмотрим возможную работу этих групповых неизвестных на возможных для них перемещениях, вызываемых единичными воздействиями $\bar{Y}_{(k)} = 1$, приложенными по направлению сил и моментов в группе k . На основании теоремы о взаимности мы можем написать:

$$Y_{(1)} \delta_{(1)(k)} + Y_{(2)} \delta_{(2)(k)} + \dots + Y_{(k)} \delta_{(k)(k)} + \dots + Y_{(n)} \delta_{(n)(k)} + \sum P \delta_{(p)(k)} = \bar{Y}_{(k)} \Delta_{(k)} = 0. \quad (127)$$



Черт. 224.

Правая часть этого выражения представляет собой работу сил второго состояния на перемещениях первого состояния; она равна нулю, так как перемещения в заданной системе по направлению групповых неизвестных равны нулю.

Уравнение (127) отличается от общего вида канонических уравнений [см. формулы (5) и (7)] только тем, что все значки поставлены в скобки, что обозначает наличие групповых неизвестных и перемещений. Таких уравнений можно составить столько, сколько имеется неизвестных групп; решая их, определим величины групповых неизвестных.

В уравнении (5) символом X характеризуется воздействие, которому соответствуют определенные реакции, деформации, внутренние усилия и моменты в основной системе. Совершенно также в уравнениях (127) под обозначением Y подразумевается символ, характеризующий собой группу сил или моментов, свя-

занных между собой определенной зависимостью и вызывающих в основной системе деформации определенного вида и внутренние усилия и моменты определенной величины. С этой точки зрения различия между символами Y и X нет.

В условиях простых неизвестных и простых эпюр моментов окончательные эпюры моментов выражались в виде:

$$M = M^0 + \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + \dots + \bar{M}_n X_n.$$

В этом выражении величины неизвестных X_1, X_2, \dots, X_n являются числовыми коэффициентами при единичных эпюрах.

Аналогичным образом в условиях групповых единичных эпюр и групповых неизвестных окончательные эпюры момента будут выражаться в виде:

$$M = M^0 + \bar{M}_{(1)} Y_{(1)} + \bar{M}_{(2)} Y_{(2)} + \dots + \bar{M}_{(m)} Y_{(m)}. \quad (128)$$

Здесь величины $Y_{(1)}, Y_{(2)}, \dots, Y_{(m)}$ являются числовыми коэффициентами при единичных групповых эпюрах моментов.

Аналогичный вид имеют формулы для определения продольной и поперечной сил в сечении:

$$N = N^0 + \bar{N}_{(1)} Y_{(1)} + \bar{N}_{(2)} Y_{(2)} + \dots + \bar{N}_{(m)} Y_{(m)}, \quad (129)$$

$$Q = Q^0 + \bar{Q}_{(1)} Y_{(1)} + \bar{Q}_{(2)} Y_{(2)} + \dots + \bar{Q}_{(m)} Y_{(m)}. \quad (130)$$

Само собой понятно, что эти выражения (128) — (130) для M, N и Q остаются в силе и при изучении линий влияния в рамах.

Таким образом мы показали, что введение групповых неизвестных не изменяет общих принципов расчета статически неопределимых рам, но обобщает отдельные приемы и позволяет сводить к нулю побочные перемещения. Однако мы не будем приводить здесь разбор этих приемов последовательного группирования¹, так как этот процесс полностью укладывается в прием решения канонических уравнений способом Гаусса, излагаемым в следующих параграфах.

В последующем изложении мы не будем выделять особо обозначение групповых неизвестных и перемещений через скобки, так как это затрудняет написание и не имеет особого расчетного значения.

§ 51. РЕШЕНИЕ КАНОНИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ СОКРАЩЕННЫМ СПОСОБОМ ГАУССА

1. Последовательное исключение неизвестных и составление таблицы решения. Очень часто после всех возможных преобразований и упрощений все-таки остается ряд канонических уравнений с несколькими неизвестными. Решение таких уравнений всегда требует внимательного выполнения вычислений, проводимых с многозначными числами. Можно рекомендовать проводить решение этих уравнений способом Гаусса.

Способ Гаусса состоит в последовательном исключении неизвестных из всех канонических уравнений, пока не останется одно уравнение с одним неизвестным. Этот способ удобен тем, что при условии взаимности коэффициентов при неизвестных им обеспечивается не только сравнительно простой процесс последовательного исключения неизвестных, но и ряд контрольных проверок в процессе решения уравнений.

Предположим, что мы имеем систему канонических уравнений:

$$X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + X_3 \delta_{13} + \dots + X_n \delta_{1n} = -\Delta_{1p}, \quad \text{I}$$

$$X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + X_3 \delta_{23} + \dots + X_n \delta_{2n} = -\Delta_{2p}, \quad \text{II}$$

$$X_1 \delta_{31} + X_2 \delta_{32} + X_3 \delta_{33} + \dots + X_n \delta_{3n} = -\Delta_{3p}, \quad \text{III}$$

$$X_1 \delta_{n1} + X_2 \delta_{n2} + X_3 \delta_{n3} + \dots + X_n \delta_{nn} = -\Delta_{np}.$$

¹ См. издание нашего курса, т. II, § 20, 1933.

Для исключения первого неизвестного X_1 из всех остальных уравнений определим его из первого уравнения

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} - X_2 \frac{\delta_{12}}{\delta_{11}} - X_3 \frac{\delta_{13}}{\delta_{11}} - \dots - X_n \frac{\delta_{1n}}{\delta_{11}}. \quad (131)$$

Обозначим для удобства последующего написания:

$$-\frac{\delta_{12}}{\delta_{11}} = \alpha_{12}, \quad -\frac{\delta_{13}}{\delta_{11}} = \alpha_{13}, \quad -\frac{\delta_{1n}}{\delta_{11}} = \alpha_{1n}. \quad (132)$$

Подставим значение X_1 (131) во второе уравнение и, сделав приведение подобных членов, получим:

$$\begin{aligned} X_2 (\delta_{22} - \delta_{21} \frac{\delta_{12}}{\delta_{11}}) + X_3 (\delta_{23} - \delta_{21} \frac{\delta_{13}}{\delta_{11}}) + \dots \\ \dots + X_n (\delta_{2n} - \delta_{21} \frac{\delta_{1n}}{\delta_{11}}) = -(\Delta_{2p} - \Delta_{1p} \frac{\delta_{21}}{\delta_{11}}). \end{aligned} \quad (133)$$

По условию взаимности коэффициентов $\delta_{12} = \delta_{21}$

$$\alpha_{12} = -\frac{\delta_{12}}{\delta_{11}} = -\frac{\delta_{21}}{\delta_{11}}.$$

Это позволяет переписать уравнение (133) так:

$$\begin{aligned} X_2 (\delta_{22} + \alpha_{12} \delta_{12}) + X_3 (\delta_{23} + \alpha_{12} \delta_{13}) + \dots \\ + X_n (\delta_{2n} + \alpha_{12} \delta_{1n}) = -(\Delta_{2p} + \alpha_{12} \Delta_{1p}). \quad \text{II} \end{aligned} \quad (134)$$

В уравнении (134) коэффициент при каждом неизвестном может рассматриваться, как полученный суммированием коэффициента из II канонического уравнения с коэффициентом при том же неизвестном из I уравнения, помноженным на величину α_{12} :

$$\text{II}^I = \text{II} + \alpha_{12} \text{I}. \quad (135)$$

Например коэффициент при неизвестном X_3 равен:

$$\delta_{23} + \alpha_{12} \delta_{13}.$$

Отметим, что при таком трактовании коэффициент при неизвестном X_1 в уравнении (133) равен нулю:

$$\delta_{21} + \alpha_{12} \delta_{11} = \delta_{21} - \frac{\delta_{12}}{\delta_{11}} \delta_{11} = 0. \quad (136)$$

Для удобства последующих написаний обозначим коэффициенты при неизвестных в уравнении (134) через новые перемещения (смысл их объяснен дальше в § 52):

$$\delta_{22} + \alpha_{12} \delta_{12} = \delta_{22}^I; \quad \delta_{23} + \alpha_{12} \delta_{13} = \delta_{23}^I;$$

вообще

$$\delta_{2k} + \alpha_{12} \delta_{1k} = \delta_{2k}^I, \quad (137)$$

а также

$$\Delta_{2p} + \alpha_{12} \Delta_{1p} = \Delta_{2p}^I. \quad (138)$$

Значок в показателе устанавливает, что эти коэффициенты при неизвестных получены после исключения первого неизвестного.

Тогда уравнение (134) напишется так:

$$X_2 \delta_{22}^I + X_3 \delta_{23}^I + \dots + X_n \delta_{2n}^I = -\Delta_{2p}^I. \quad \text{II}^I \quad (139)$$

В таком же порядке нами может быть проведено исключение первого неизвестного из III канонического уравнения, после чего оно напишется так:

$$X_2 \delta_{32}^I + X_3 \delta_{33}^I + \dots + X_n \delta_{3n}^I = -\Delta_{3p}^I. \quad \text{III}^I \quad (140)$$

В этом уравнении коэффициенты при неизвестных получены процессом, аналогичным процессу получения коэффициента предыдущего уравнения:

$$\text{III}^I = \text{III} + \alpha_{13}I = \text{III} - \frac{\delta_{31}^I}{\delta_{11}^I} I.$$

В соответствии с формулой (137) можно написать:

$$\delta_{3k}^I = \delta_{3k} + \alpha_{13}\delta_{1k}; \quad \Delta_{3p}^I = \Delta_{3p} + \alpha_{13}\Delta_{1p}.$$

Проведя в этом порядке исключение неизвестного X_1 из всех уравнений, мы получим новую группу канонических уравнений с числом неизвестных $(n - 1)$.

В этой новой второй группе канонических уравнений мы можем провести исключение неизвестного X_2 , определив его из первого уравнения второй группы:

$$X_2 = -\frac{\Delta_{3p}^I}{\delta_{22}^I} - X_3 \frac{\delta_{23}^I}{\delta_{22}^I} - \dots - X_n \frac{\delta_{2n}^I}{\delta_{22}^I}. \quad (141)$$

Обозначив

$$-\frac{\delta_{23}^I}{\delta_{22}^I} = \alpha_{23}, \quad -\frac{\delta_{24}^I}{\delta_{22}^I} = \alpha_{24}, \quad \dots, \quad -\frac{\delta_{2n}^I}{\delta_{22}^I} = \alpha_{2n}, \quad (142)$$

и исключив X_2 из второго уравнения этой группы, получим:

$$\begin{aligned} X_3 \left(\delta_{33}^I - \delta_{32}^I \frac{\delta_{23}^I}{\delta_{22}^I} \right) + \dots + X_n \left(\delta_{3n}^I - \delta_{32}^I \frac{\delta_{2n}^I}{\delta_{22}^I} \right) = \\ = - \left(\Delta_{3p} - \Delta_{2p}^I \frac{\delta_{23}^I}{\delta_{22}^I} \right), \end{aligned} \quad (143)$$

или

$$X_3 (\delta_{33}^I + \delta_{23}^I \alpha_{23}) + \dots + X_n (\delta_{3n}^I + \delta_{2n}^I \alpha_{23}) = - (\Delta_{3p} + \Delta_{2p}^I \alpha_{23}). \quad \text{III}^{\text{II}} \quad (144)$$

Коэффициенты при неизвестных в этом уравнении (144) могут рассматриваться как полученные сложением коэффициентов из III^I уравнения (139), помноженных на α_{23} , с коэффициентами при тех же неизвестных в III^I уравнении (140):

$$\text{III}^{\text{II}} = \text{III}^I + \alpha_{23}\text{III}^I = \text{III} + \alpha_{13}I + \alpha_{23}\text{III}^I. \quad (145)$$

Нетрудно видеть, что процесс исключения второго неизвестного из второй группы канонических уравнений является повторением процесса исключения первого неизвестного в первой группе канонических уравнений.

После исключения второго неизвестного получается третья группа канонических уравнений, имеющая написание следующего вида:

$$X_3 \delta_{33}^{\text{II}} + X_4 \delta_{34}^{\text{II}} + \dots + X_n \delta_{3n}^{\text{II}} = - \Delta_{3p}^{\text{II}} \quad \text{III}^{\text{II}}$$

$$X_3 \delta_{34}^{\text{II}} + X_4 \delta_{44}^{\text{II}} + \dots + X_n \delta_{4n}^{\text{II}} = - \Delta_{4p}^{\text{II}} \quad \text{IV}^{\text{II}}$$

В них

$$\delta_{33}^{\text{II}} = \delta_{33}^I + \alpha_{23}\delta_{23}^I; \quad \delta_{3k}^{\text{II}} = \delta_{3k}^I + \alpha_{23}\delta_{2k}^I;$$

$$\Delta_{3p}^{\text{II}} = \Delta_{3p}^I + \alpha_{23}\Delta_{2p}^I$$

и вообще

$$\delta_{mk}^{\text{II}} = \delta_{mk}^I + \alpha_{2m}\delta_{2k}^I, \quad \Delta_{mp}^{\text{II}} = \Delta_{mp}^I + \alpha_{2m}\Delta_{2p}^I. \quad (146)$$

В этой новой группе может быть исключено следующее неизвестное X_3 в порядке, показанном выше.

Последовательный процесс исключения неизвестных продолжается до тех пор, пока не останется одно уравнение с одним неизвестным.

Этот процесс исключения неизвестных рекомендуется проводить в табличной форме по образцу табл. 37, составленной для решения системы уравнения с четырьмя неизвестными.

Таблица 37

Последовательное решение канонических уравнений способом Гаусса и составление проверок вычислений

| № уравнения | Множители α | X_1 | X_2 | X_3 | X_4 | P | Контроль |
|---------------------------------|--|--------------------------|----------------------------|-------------------------------|-------------------------------|--------------------------------|--|
| I | | δ_{11} | δ_{12} | δ_{13} | δ_{14} | $-\Delta_{1p}$ | $\sum_1 = \delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{13} + \delta_{14}$ |
| II | | δ_{21} | δ_{22} | δ_{23} | δ_{24} | $-\Delta_{2p}$ | $\sum_2 = \delta_{21} + \delta_{22} + \delta_{23} + \delta_{24}$ |
| I α_{12} | $\alpha_{12} = -\frac{\delta_{12}}{\delta_{11}}$ | $\delta_{11}\alpha_{12}$ | $\delta_{12}\alpha_{12}$ | $\delta_{13}\alpha_{12}$ | $\delta_{14}\alpha_{12}$ | $-\Delta_{1p}\alpha_{12}$ | $\alpha_{12} \sum_1$ |
| II ^I | II + I α_{12} | 0 | δ_{22}^I | δ_{23}^I | δ_{24}^I | $-\Delta_{2p}^I$ | $\sum_2^I = \delta_{22}^I + \delta_{23}^I + \delta_{24}^I$ |
| III | | δ_{31} | δ_{32} | δ_{33} | δ_{34} | $-\Delta_{3p}$ | $\sum_3 = \delta_{31} + \delta_{32} + \delta_{33} + \delta_{34}$ |
| I α_{13} | $\alpha_{13} = -\frac{\delta_{13}}{\delta_{11}}$ | $\delta_{11}\alpha_{13}$ | $\delta_{12}\alpha_{13}$ | $\delta_{13}\alpha_{13}$ | $\delta_{14}\alpha_{13}$ | $-\Delta_{1p}\alpha_{13}$ | $\alpha_{13} \sum_1$ |
| II ^I α_{23} | $\alpha_{23} = -\frac{\delta_{23}^I}{\delta_{22}^I}$ | — | $\delta_{22}^I\alpha_{23}$ | $\delta_{23}^I\alpha_{23}$ | $\delta_{24}^I\alpha_{23}$ | $-\Delta_{2p}^I\alpha_{23}$ | $\alpha_{23} \sum_2^I$ |
| III ^{II} | III + α_{13} I + α_{23} II ^I | 0 | 0 | δ_{33}^{II} | δ_{34}^{II} | $-\Delta_{3p}^{II}$ | $\sum_3^{II} = \delta_{33}^{II} + \delta_{34}^{II}$ |
| IV | | δ_{41} | δ_{42} | δ_{43} | δ_{44} | $-\Delta_{4p}$ | $\sum_4 = \delta_{41} + \delta_{42} + \delta_{43} + \delta_{44}$ |
| I α_{14} | $\alpha_{14} = -\frac{\delta_{14}}{\delta_{11}}$ | $\delta_{11}\alpha_{14}$ | $\delta_{12}\alpha_{14}$ | $\delta_{13}\alpha_{14}$ | $\delta_{14}\alpha_{14}$ | $-\Delta_{1p}\alpha_{14}$ | $\alpha_{14} \sum_1$ |
| II ^I α_{24} | $\alpha_{24} = -\frac{\delta_{24}^I}{\delta_{22}^I}$ | — | $\delta_{22}^I\alpha_{24}$ | $\delta_{23}^I\alpha_{24}$ | $\delta_{24}^I\alpha_{24}$ | $-\Delta_{2p}^I\alpha_{24}$ | $\alpha_{24} \sum_2^I$ |
| III ^{II} α_{34} | $\alpha_{34} = -\frac{\delta_{34}^{II}}{\delta_{33}^{II}}$ | — | — | $\delta_{33}^{II}\alpha_{34}$ | $\delta_{34}^{II}\alpha_{34}$ | $-\Delta_{3p}^{II}\alpha_{34}$ | $\alpha_{34} \sum_3^{II}$ |
| IV ^{III} | IV + I α_{14} + II ^I α_{24} + III ^{II} α_{34} | 0 | 0 | 0 | δ_{44}^{III} | $-\Delta_{4p}^{III}$ | $\sum_4^{III} = \delta_{44}^{III}$ |

В этой таблице римскими цифрами обозначены порядковые номера уравнений. Показатели при них устанавливают, что в основном уравнении, имеющем начальный номер, уже произведено исключение одного или нескольких неизвестных. Например обозначение III^{II} показывает, что это третье основное уравнение после исключения из него двух неизвестных (X_1 и X_2).

В первой и второй строках таблицы выписаны коэффициенты первого и второго уравнений (I и II). В третьей строке выписан множитель α_{12} , на который надо умножить коэффициенты первого уравнения (см. третью строку), чтобы, сложив их с коэффициентами II уравнения, получить коэффициенты II^I уравнения (135 и 139), выписанные в четвертой строке.

В пятой строке выписаны коэффициенты III уравнения, которые надо сложить с коэффициентами I уравнения, помноженными на множитель α_{13} , чтобы получить III^I уравнение (140). Последнее в этом преобразовании является промежуточным и в таблицу не выписывается. В седьмой строке выписаны коэффициенты из II^I уравнения, помноженные на α_{23} . Сложив коэффициенты из III уравнений с коэф-

фициентами $I\alpha_{13}$ и $II\alpha_{23}$, получаем коэффициенты в III уравнении (145), выписанные в восьмой строке.

Описанный процесс табличного вычисления продолжается до получения уравнения с одним неизвестным.

2. Порядок нумерации уравнений. Некоторого облегчения в вычислительном процессе по таблице можно достигнуть подбором порядка (нумерации) уравнений.

Из порядка составления таблицы можно видеть, что обращение в нули отдельных множителей α сокращает вычисления новых коэффициентов. Это указывает на целесообразность давать первые номера тем из уравнений, в которых большее количество побочных перемещений равно нулю.

Для пояснения сделаем подбор нумерации для матрицы 8. Подбор сделан в матрице 10,

Первый и второй порядковые номера даны нами уравнениям, составленным для второго и первого неизвестных, так как в эти уравнения входит только по два неизвестных. Следующие порядковые номера даны уравнениям, составленным для третьего, восьмого и пятого неизвестных, содержащих по три неизвестных. Дальше размещены уравнения, составленные для девятого, четвертого, шестого и седьмого неизвестных.

Сделанный подбор уравнений позволил нам сосредоточить большое количество нулевых коэффициентов справа от диагонали в непосредственной близости от нее. При таком расположении нулевых коэффициентов большое количество множителей α обращается в нуль в преобразованиях первых уравнений, что значительно облегчает подсчеты по ходу типовой табл. 37.

3. Проверка. Частичной проверкой правильности вычисления множителей α_{12} , α_{13} , α_{23} и т. д. служит суммирование вертикальных столбцов по разделам под исключаемыми неизвестными; эти суммы должны равняться нулю (136):

$$II + I\alpha_{13} = \delta_{21} + \alpha_{13}\delta_{11} = 0,$$

$$III + I\alpha_{13} + II\alpha_{23} = \delta_{32} + \delta_{13}\alpha_{13} + \delta_{23}\alpha_{23} = 0$$

и т. д.

Более общей проверкой всего вычислительного процесса в каждом разделе является равенство двух сумм коэффициентов. Одна получается от сложения коэффициентов по горизонтали в каждом новом уравнении с исключенными неизвестными. Другая получается от сложения по вертикали в последней графе контрольных сумм коэффициентов.

Например:

$$\sum_3^I = \sum_2 + \alpha_{13} \sum_1,$$

$$\sum_3^{II} = \sum_3 + \alpha_{13} \sum_1 + \alpha_{23} \sum_2$$

и т. д.

Матрица 10

Подбор порядка уравнений при решении их по способу Гаусса (см. матрицу 8)

| № уравнения | | 1 | 3 | 8 | 9 | 4 | 7 |
|-------------------|-----------------------|---|---|---|---|---|---|
| в порядке решения | в порядке составления | | | | | | |
| I | 2 | / | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| II | 1 | | / | 0 | 0 | 0 | 0 |
| III | 3 | | | / | 0 | 0 | 0 |
| IV | 8 | | | | / | 0 | 0 |
| V | 5 | | | | | / | 0 |
| VI | 9 | | | | | | / |
| VII | 4 | | | | | | |
| VIII | 6 | | | | | | |
| IX | 7 | | | | | | |

Если бы эти суммы оказались неравными, тогда как проверка множителей α показала бы их правильность, то ошибку следует искать среди слагаемых под неизвестными в тех столбцах, в которых суммы по вертикали не равны нулю.

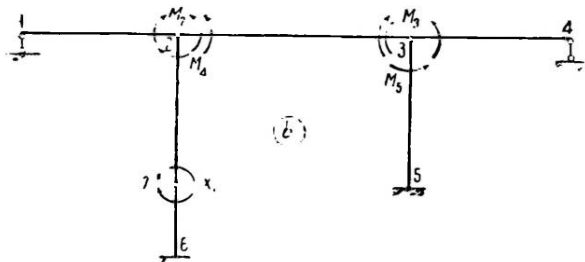
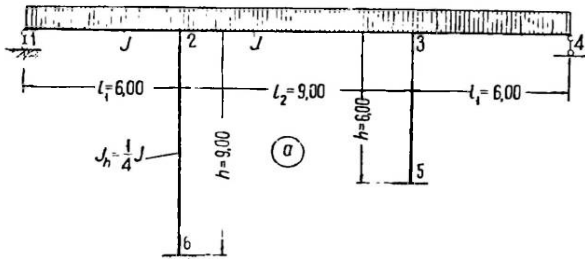
Следует однако иметь в виду, что эти проверки не гарантируют правильности вычисления коэффициентов δ и Δ в исходных канонических уравнениях. Правильность этих коэффициентов должна быть проверена особо (§ 12).

4. Вычисление неизвестных. После того как в таблице вычислены все коэффициенты, проводится определение неизвестных по формулам:

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} + \alpha_{12}X_2 + \alpha_{13}X_3 + \alpha_{14}X_4 + \dots + \alpha_{1n}X_n, \\ X_2 &= -\frac{\Delta_{2p}}{\delta_{22}} + \dots + \alpha_{23}X_3 + \alpha_{24}X_4 + \dots + \alpha_{2n}X_n, \\ X_3 &= -\frac{\Delta_{3p}}{\delta_{33}} + \dots + \alpha_{34}X_4 + \dots + \alpha_{3n}X_n, \\ &\vdots \\ X_n &= -\frac{\Delta_{np}^{-1}}{\delta_{nn}^{-1}}. \end{aligned} \right\} \quad (147)$$

Определение неизвестных делается в порядке обратного хода; сначала вычисляется X_n , затем X_{n-1} , X_{n-2} и т. д. до неизвестного X_1 включительно.

Весь вывод был сделан в предположении определенной нагрузки. Но не трудно видеть, что изменение нагрузки или введение учета влияния температуры Δ_t отзовется только на пересчете величин, входящих в предпоследний вертикальный столбец (табл. 37) известных членов (P). Все коэффициенты δ при неизвестных во всех последовательных системах уравнений останутся без изменения. Для вычисления же новых величин неизвестных соответственно новым нагрузкам и значениям температуры потребуется подставить в выражения (147) новые значения Δ_p и Δ_t , не меняя значений перемещений δ_{11}^I , δ_{22}^I , δ_{33}^I и т. д. и множителей α .



Черт. 225.

Пример 18. Проведем расчет сложной рамы с построением окончательной эпюры моментов в ней. Рама, показанная на черт. 225, пять раз статически неопределима. Из ряда возможных вариантов основных систем выбираем систему с шарнирами в узлах 2 и 3 и шарниром 7 в левой опоре ноги рамы, расположенным на уровне пяты правой ноги.

Выбор такой основной системы (черт. 226, а) оправдывается следующими расчетными преимуществами: включение шарниров в узлах 2 и 3 превращает верхний ригель в три двухопорные простые балки, чем обеспечивается получение простых контуров эпюр от единичных воздействий и нагрузки; введение шарнира 7 на уровне пяты правой ноги приводит к частичной симметрии в эпюрах моментов по длине ног.

Приводим неизвестные путем преобразований в прямо и обратно симметричные.

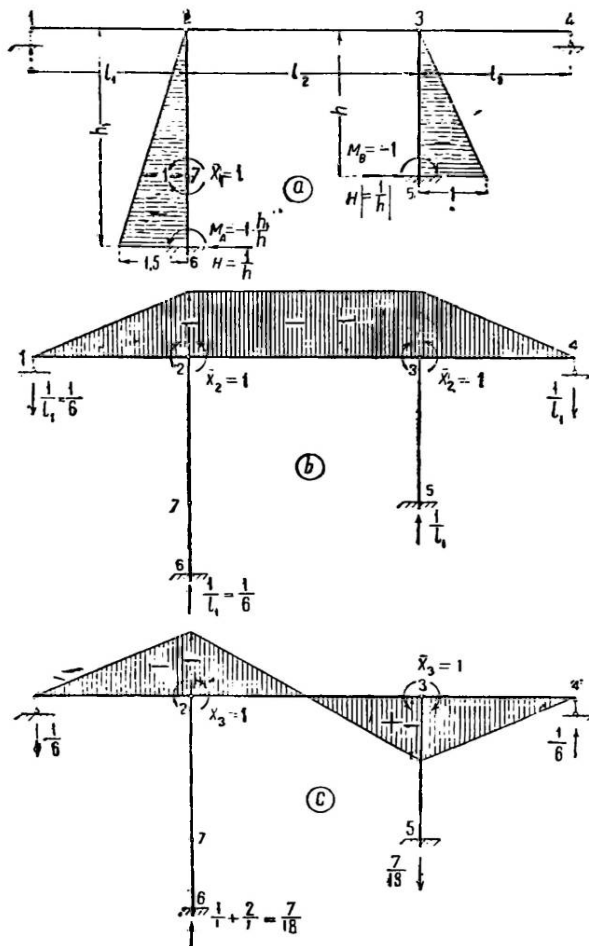
а) Неизвестные моменты M_2 и M_3 приводим к двум прямо и обратно симметричным моментам X_2 и X_3 . Эпюры моментов, вызываемые соответствующими единичными воздействиями, показаны на черт. 226, *b* и *c*.

б) Неизвестные моменты M_4 и M_5 приводим к прямо и обратно симметричным моментам X_4 и X_5 ; эпюры моментов, вызываемые их действием, показаны на черт. 227, *a* и *b*.

При указанном преобразовании обращаются в нуль следующие побочные перемещения и свободные члены:

$$\delta_{12} = \delta_{13} = \delta_{23} = \delta_{25} = 0.$$

$$\Delta_{q1} = \Delta_{q3} = \Delta_{q5} = 0.$$



Черт. 226.

По полученным эпюрам производим вычисление всех перемещений, входящих в выражение коэффициентов при неизвестных, а также вызываемых действием заданной нагрузки. Имеем:

$$E\delta_{11} = \frac{1}{3J} 9 \cdot 4 \cdot 1,5^2 + \frac{1}{3} 6 \cdot 4 \cdot 1^2 \frac{1}{J} = 35 \frac{1}{J};$$

$$F\delta_{14} = \frac{1}{2} 6 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{J} = 4 \frac{1}{J};$$

$$E\delta_{15} = -\frac{1}{2} 6 \cdot 4 \frac{4}{J} \left(\frac{2}{3} 2 + \frac{1}{3} \right) = -20 \frac{1}{J};$$

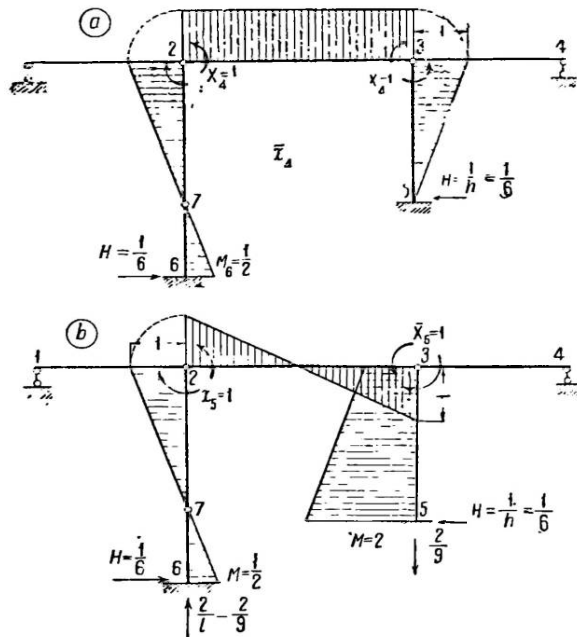
$$E\bar{\delta}_{22} = 2 \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{J} + \frac{9}{J} = 13 \frac{1}{J};$$

$$E\bar{\delta}_{24} = \frac{1}{J} 9 = 9 \frac{1}{J};$$

$$E\bar{\delta}_{33} = 2 \frac{1}{3} \left(6 + \frac{1}{2} 9\right) \frac{1}{J} = 7 \frac{1}{J};$$

$$E\bar{\delta}_{35} = 2 \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{J} = 3 \frac{1}{J};$$

$$E\bar{\delta}_{44} = 9 \frac{1}{J} + 2 \frac{1}{3} 6 \cdot 4 \frac{1}{J} + \frac{1}{3} 3 \cdot 4 \frac{1}{J} \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 26 \frac{1}{J};$$



Черт. 227.

$$E\bar{\delta}_{45} = -\frac{1}{2} 6 \cdot 4 \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{J} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} 3 \cdot 4 \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{J} = -7 \frac{1}{J};$$

$$E\bar{\delta}_{55} = 2 \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} 2 \frac{9}{J} + \frac{1}{2} 6 \cdot 4 \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{J} + \frac{1}{2} 6 \frac{4}{J} \left[2 \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\right)\right] + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} 3 \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{J} = 68 \frac{1}{J};$$

$$E\Delta_{q2} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{q}{8} \left(2 \cdot 6^3 \frac{1}{2} + 9^3\right) \frac{1}{J} = -78,75 \frac{1}{J} q;$$

$$E\Delta_{q4} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{q}{8} 9^3 \frac{1}{J} = -60,75 \frac{1}{J} q.$$

Производим проверку правильности вычисления коэффициентов при неизвестных (см. § 12). Для этого строим эпюру от суммарного действия всех единичных неизвестных, $\bar{X}_1 = \bar{X}_2 = X_1 = \bar{X}_4 = \bar{X}_5 = 1$ (черт. 228) и по ней вычисляем суммарные перемещения $\bar{\delta}_{11}$, $\bar{\delta}_{22}$ и т. д.

$$E\bar{\delta}_{11} = \frac{1}{2} 1,5 \cdot 9 \cdot 4 \frac{1}{J} \left(\frac{1}{3} 2 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} 6 \frac{4}{J} \cdot \frac{2}{3} = 19 \frac{1}{J};$$

$$E\delta_{12} = \frac{1}{2} \cdot 2,6 \frac{1}{J} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot 4,9 \frac{1}{J} = 22 \frac{1}{J};$$

$$E\delta_{13} = \frac{1}{2} \cdot 2,6 \frac{1}{J} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot 4,9 \frac{1}{J} \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3} \right) = 10 \frac{1}{J};$$

$$E\delta_{18} = \frac{1}{2} \cdot 4,9 \frac{1}{J} + \frac{1}{2} \cdot 2,6 \frac{1}{J} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{1}{J} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = 32 \frac{1}{J};$$

$$E\delta_{38} = \frac{1}{2} \cdot 4,9 \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot 2,6 \cdot 4 \frac{1}{J} \left(\frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} \right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \frac{1}{J} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) + \\ + \frac{1}{2} \cdot 2,6 \frac{4}{J} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot 6 \frac{4}{J} \cdot \frac{1}{3} = 44 \frac{1}{J};$$

$$E\Delta_{q8} = -\frac{2}{3} \cdot 6 \frac{36}{8} \cdot \frac{q}{J} - \frac{2}{3} \cdot q \frac{81}{8} \cdot \frac{q}{J} = -139,5 \frac{q}{J}.$$

Полученные суммы в точности соответствуют суммам коэффициентов при неизвестных в каждом уравнении (см. суммы в последней графе табл. 38). Также величина Δ_{q8} равна сумме величин $\Delta_{q2} + \Delta_{q4}$. Полученными результатами установлена правильность вычислений перемещений.

Переходим к составлению вычислительной табл. 38 по образцу табл. 37.

Таблица 38

Решение канонических уравнений примера 18 по способу Гаусса

| № уравнения | Множители α | X_1 | X_2 | X_3 | X_4 | X_5 | P | Σ |
|---|--|-----------------|--------------|--------------|-----------------------------|--------------------------------|-------------------------|--|
| I | | 35 | 0 | 0 | 4 | -20 | 0 | 19 |
| II I α_{12} | $\alpha_{12} = 0$ | 0 0 | 13 0 | 0 0 | 9 0 | 0 0 | -78,75 0 | 22 0 |
| II ^I | II + I α_{12} | 0 | 13 | 0 | 9 | 0 | -78,75 | 22 |
| III I α_{13} ; II ^I α_{21} | $\alpha_{13} = 0$ $\alpha_{21} = 0$ | 0 0 | 0 0 | 7 0 | 0 0 | 3 0 | 0 0 | 10 |
| III ^{II} | III + I α_{13} + II ^I α_{21} | 0 | 0 | 7 | 0 | 3 | 0 | 10 |
| IV I α_{14} ; II ^I α_{24} ; III ^{II} α_{34} | $\alpha_{14} = -0,114$ $\alpha_{24} = -\frac{9}{13}$ $\alpha_{34} = 0$ | 4 -4 — | 9 0 -9 | 0 0 0 | 26 -0,457 -6,2307 | -7 2,2835 0 | -60,75 0 +54,5192 | 32 -2,1725 -15,2307 0 |
| IV ^{III} | IV + I α_{14} + + II ^I α_{21} + III ^{II} α_{34} | 0 | 0 | 0 | 19,312 | -4,7165 | -6,2308 | -14,598 |
| V I α_{15} ; II ^I α_{25} ; III ^{II} α_{35} ; IV ^{III} α_{45} | $\alpha_{15} = \frac{20}{35}$ $\alpha_{25} = 0$ $\alpha_{35} = -\frac{3}{7}$ $\alpha_{45} = \frac{4,7165}{19,312} = 0,2442$ | -20 +20 — | 0 0 — | 3 0 -3 | -7 2,2835 0 4,7165 | 68 -11,4286 0 -1,1510 | 0 0 0 -1,5209 | 44 10,8549 0 -4,2857 -3,5655 |
| V ^{IV} | | 0 | 0 | 0 | 0 | 54,1347 | -1,5209 | 54,1347 |

Величины E и J не внесены в таблицу, так как они входят во все перемещения как общие множители и сокращаются в выражениях для неизвестных. Вычислительный процесс и его проверки проводятся в порядке, описанном при изложении самого способа Гаусса, и при составлении схемы табл. 37.

По полученным в табл. 38 данным вычисляем величины неизвестных в порядке, установленном формулами (147):

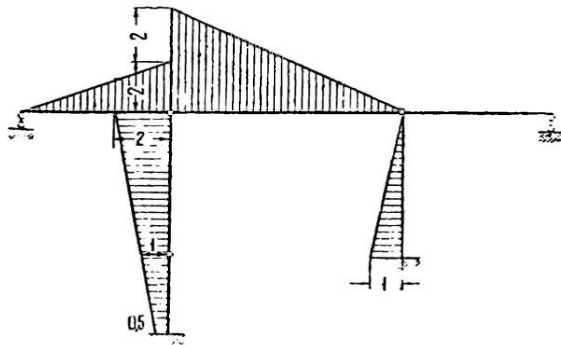
$$X_5 = -\frac{-1,5209}{54,1347} = 0,028 q.$$

$$X_4 = -\frac{-6,2308}{19,312} q + \frac{4,7165}{19,312} 0,028 q = 0,328 q,$$

$$X_3 = 0 - \frac{3}{7} 0,028 q + 0 = -0,012 q.$$

$$X_2 = -\frac{-78,75}{13} q + 0 + \frac{9}{13} 0,328 q + 0 = 5,881 q.$$

$$X_1 = 0 + \frac{20}{35} 0,028 q - \frac{4}{35} 0,328 q + 0 + 0 = -0,0215 q.$$



Черт. 228.

Ординаты расчетной эпюры определяем по формуле:

$$M = M^0 + \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + \bar{M}_3 X_3 + \bar{M}_4 X_4 + \bar{M}_5 X_5.$$

Вычисление ординат ее для узловых точек дано в табл. 39.

Таблица 39

Вычисление конечных моментов в стержнях рамы, показанной на черт. 229

| Обозначение моментов | X_1 - 0,0215 q | X_2 5,881 q | X_3 - 0,012 q | X_4 0,328 q | X_5 0,028 q | Расчетный момент M |
|----------------------|---------------------|------------------|--------------------|------------------|------------------|------------------------|
| M_{21} | - | 1 | 1 | - | - | - 5,819 q |
| M_{21} | - | -1 | -1 | -1 | -1 | - 6,175 q |
| M_{26} | - | - | - | -1 | -1 | - 0,356 q |
| M_{32} | - 1,5 | - | - | + 1/2 | + 1/2 | + 0,211 q |
| M_{32} | - | -1 | -1 | -1 | +1 | - 6,143 q |
| M_{34} | - | -1 | +1 | - | - | - 5,843 q ¹ |
| M_{35} | - | - | - | -1 | +1 | - 0,300 q |
| M_{63} | - 1 | - | - | - | +2 | + 0,078 q |

Контур эпюры, построенной по этим ординатам, показан на черт. 229. Проводим проверку правильности построения эпюры.

¹ На черт. 229 ошибочно показано 4,810 q.

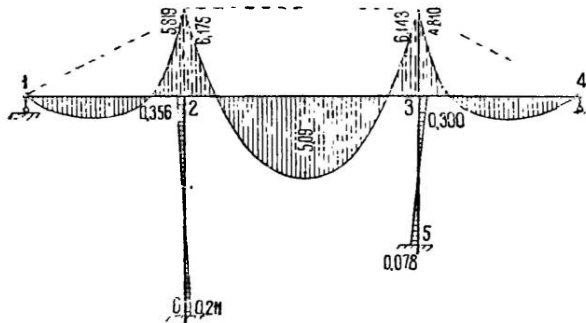
Сумма площадей эпюры моментов по замкнутому контуру $б-2-3-5$ рамы, деленных на жесткость, должна быть равна нулю:

$$\frac{1}{2} (6,175 + 6,143) 9 \frac{q}{J} - \frac{2}{3} 9 \frac{81}{8} q + \frac{1}{2} 9 \cdot 4 \frac{1}{J} (0,356 - 0,211) q + \\ + \frac{1}{2} 6 \cdot 4 \frac{1}{J} (0,300 - 0,078) q = (55,431 - 60,75 + 5,279) \frac{q}{J} = 0,01 \frac{q}{J}.$$

Ошибка $\frac{0,04}{60,75} 100 = 0,06\%$.

Перемещение по направлению неизвестного X_2 должно быть равно нулю:

$$\left[\frac{1}{2} 6 \cdot 5,819 \frac{2}{3} + \frac{1}{2} 9 (6,175 + 6,143) + \frac{1}{2} 6 \cdot 5,843 - \frac{2}{3} 6 \frac{36}{8} \frac{1}{2} 2 - \frac{2}{3} 9 \frac{81}{8} \right] \frac{q}{EJ} = 0,039 \frac{q}{EJ}$$



Черт. 229.

Ошибка в сотых долях процента.

Сумма поперечных сил в сечении, проведенном через ноги:

$$Q = \frac{1}{9} (0,211 + 0,356) q - \frac{1}{6} (0,300 + 0,078) q = 0.$$

§ 52. СТАТИЧЕСКИЙ СМЫСЛ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ СПОСОБОМ ГАУССА

Прием решения канонических уравнений с последовательным исключением неизвестных представляет собой с точки зрения статики расчет рамы, проводимый по основным статически неопределимым системам, в которых степень статической неопределимости повышается по мере исключения неизвестных. Его можно трактовать также как расчет по групповым неизвестным.

Предположим, что для расчета заданной системы с n неизвестными (черт. 230) выбрана основная статически определимая система, вычислены по ней все перемещения δ и Δ и написаны канонические уравнения.

Неизвестное X_1 , подлежащее исключению из остальных уравнений, определяется из первого уравнения выражением:

$$X_1 = - \frac{\Delta_{12}}{\delta_{11}} - \frac{\delta_{12}}{\delta_{11}} X_2 - \frac{\delta_{13}}{\delta_{11}} X_3 - \dots - \frac{\delta_{1n}}{\delta_{11}} X_n,$$

или согласно обозначению (132):

$$X_1 = - \frac{\Delta_{12}}{\delta_{11}} + \alpha_{12} X_2 + \alpha_{13} X_3 + \dots + \alpha_{1n} X_n.$$

Из сопоставления этого выражения с выражением для усилий в статически неопределимых системах по формуле (3) следует, что множители α_{1k} представляют собой реактивные усилия или моменты по направлению неизвестного X_1 , возникающие от единичных воздействий, приложенных в статически определимой системе по направлению одного из неизвестных X_2, X_3, \dots, X_n .

Исключение неизвестного X_1 из системы канонических уравнений означает, что связь, определяемая этим неизвестным, осталась не выделенной, и следовательно основная статически определимая система превратилась в систему однажды статически неопределимую (черт. 231, а). Она находится под действием нагрузки и $(n-1)$ неизвестных: X_2, X_3, \dots, X_n .

Всякая сила или момент X_k , действующий на эту однажды статически неопределимую систему, будет вызывать по направлению неизвестного \bar{X}_1 реакцию $\alpha_{1k}\bar{X}_k$.

Соответственно этому эпюра моментов, вызываемая действием силы $\bar{X}_k = 1$ на однажды статически неопределимую систему, может быть построена из рассмотрения статически определимой системы под действием группы сил $\bar{X}_k = 1$ и $\alpha_{1k}\bar{X}_k = \alpha_{1k}$ (черт. 231, б). Ординаты ее определяются выражениями:

$$\bar{M}_k^I = \bar{M}_k + \alpha_{1k}\bar{M}_1. \quad (148)$$

Такая эпюра является групповой эпюрой (124).

Соответственно этому перемещению δ_{mk}^I в однажды статически неопределимой системе по направлению любого неизвестного напишется как групповое перемещение (125):

$$\delta_{mk}^I = \delta_{mk} + \alpha_{1k}\delta_{m1}$$

По своему выражению оно совпадает с коэффициентами в канонических уравнениях (137) после исключения из них первого неизвестного:

$$\delta_{22}^I = \delta_{22} + \alpha_{12}\delta_{12}, \quad \delta_{23}^I = \delta_{23} + \alpha_{12}\delta_{13};$$

и т. д.

Аналогичным образом напишутся в этой группе уравнений перемещения, вызываемые действием нагрузки.

При действии нагрузки на однажды статически неопределимую систему перемещение, вызываемое ею по направлению неизвестного X_2 , напишется так:

$$\Delta_{2p} - \delta_{21} \frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} = \Delta_{2p} + \alpha_{12}\Delta_{1p} = \Delta_{2p}^I.$$

Для исключения неизвестного X_2 из второй группы канонических уравнений, относящихся к однажды статически неопределимой системе, определяем его величину из первого уравнения этой группы:

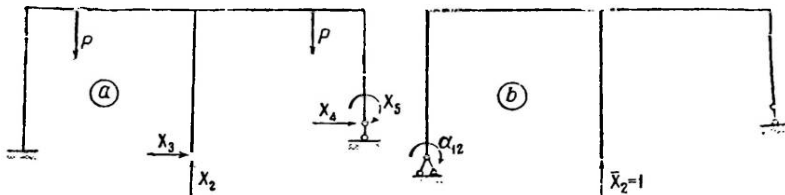
$$X_2 = -\frac{\Delta_{2p}^I}{\delta_{22}^I} - \frac{\delta_{23}^I}{\delta_{22}^I} X_3 - \frac{\delta_{24}^I}{\delta_{22}^I} X_4 - \dots - \frac{\delta_{2n}^I}{\delta_{22}^I} X_n,$$

или

$$X_2 = -\frac{\Delta_{2p}^I}{\delta_{22}^I} + a_{23}X_3 + a_{24}X_4 + \dots + a_{2n}X_n.$$

Здесь множители

$$a_{23} = -\frac{\delta_{23}^I}{\delta_{22}^I}, \quad a_{24} = \frac{\delta_{24}^I}{\delta_{22}^I},$$



Черт. 231.

представляют собой реактивные усилия или моменты по направлению неизвестного X_2 , вызываемые единичными воздействиями, приложенными к однажды статически неопределимой системе по направлению одного из остальных неизвестных.

Исключение неизвестных X_1 и X_2 из системы канонических уравнений означает, что связи, определяемые этими неизвестными, остались не выделенными, и следовательно основная система превратилась в дважды статически неопределимую (черт. 232, а) с приложенными к ней нагрузкой и $(n-2)$ неизвестными: X_3, X_4, \dots, X_n .

Действие на эту систему любой силы или момента X_k вызывает по направлению неизвестного X_2 реакцию a_{2k} и по направлению неизвестного X_1 — реакцию a_{1k} . Соответственно этому эпюра моментов, вызываемая действием $\bar{X}_k = 1$ в дважды статически неопределимой системе, может быть построена из рассмотрения статически определимой системы под действием на нее группы сил:

$$\bar{X}_k = 1, \quad a_{1k}\bar{X}_1 = x_{1k} \quad \text{и} \quad a_{2k}\bar{X}_2 = x_{2k}.$$

Ординаты ее определяются формулой:

$$\bar{M}_k^{\text{II}} = \bar{M}_k + a_{1k}\bar{M}_1 + a_{2k}\bar{M}_2^{\text{I}}. \quad (14^9)$$

Точно так же перемещения в дважды статически неопределимой системе будут определяться, как перемещения в статически определимой системе в условиях загрузки ее группой сил:

$$\delta_{mk}^{\text{II}} = \delta_{mk} + a_{1k}\delta_{m1} + a_{2k}\delta_{m2}^{\text{I}}. \quad (150)$$

В частности

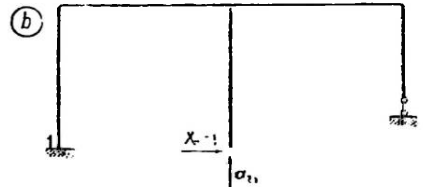
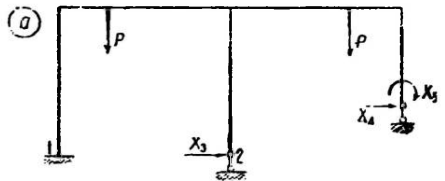
$$\delta_{33}^{\text{II}} = \delta_{33} + a_{13}\delta_{13} + a_{23}\delta_{33}^{\text{I}},$$

$$\delta_{2p}^{\text{II}} = \Delta_{2p} + a_{13}\Delta_{1p} + a_{23}\Delta_{2p}^{\text{I}}.$$

Такое выражение перемещения как группового полностью совпадает с выражением коэффициентов (146) для канонических уравнений с двумя исключенными и неизвестными.

Рассуждения, приведенные для первых двух групп канонических уравнений, могут быть повторены в отношении третьей группы их, при исключении из них неизвестного X_3 . Исключению неизвестного X_3 будет соответствовать обращение основной системы в трижды статически неопределимую, находящуюся под действием $(n-2)$ лишних неизвестных и заданной нагрузки.

Процесс исключения неизвестных может продолжаться до тех пор, пока не будет получено уравнение с одним неизвестным, что будет соответствовать системе $(n-1)$ раз статически неопределимой, находящейся под действием заданной нагрузки и одного лишнего неизвестного.



Черт. 232.

§ 53. ПОСТРОЕНИЕ РАСЧЕТНОЙ ЭПЮРЫ МОМЕНТОВ ПО ГРУППОВЫМ ЕДИНИЧНЫМ ЭПЮРАМ И ГРУППОВЫМ НЕИЗВЕСТНЫМ

Выражения (147), служащие для определения исходных неизвестных в расчетах по способу Гаусса, можно видоизменить, перенеся все слагаемые с неизвестными из правых сторон в левые; последние в новом написании могут быть приняты за новые групповые неизвестные Y_1, Y_2, \dots, Y_n :

$$\left. \begin{aligned} Y_1 &= X_1 - a_{12}X_2 - a_{13}X_3 - \dots - a_{1n}X_n = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}}, \\ Y_2 &= X_2 - a_{22}X_3 - a_{24}X_4 - \dots - a_{2n}X_n = -\frac{\Delta_{2p}}{\delta_{22}}, \\ Y_n &= -\frac{\Delta_{np}^{\text{I}}}{\Delta_{nn}^{\text{I}}}. \end{aligned} \right\} \quad (151)$$

Эти новые неизвестные определяются непосредственно по групповым перемещениям, получаемым при последовательном исключении неизвестных X_1, X_2, \dots, X_n . Все групповые единичные эпюры $\bar{M}_2^{\text{I}}, \bar{M}_3^{\text{I}}, \dots$ и т. д., получаемые при исключении неизвестных, сохраняют свое значение относительно новых групповых неизвестных для вычисления по ним перемещений. Эти единичные эпюры вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} \bar{M}_2^{\text{I}} &= \bar{M}_2 + a_{12}\bar{M}_1, \\ \bar{M}_3^{\text{II}} &= \bar{M}_3 + a_{13}\bar{M}_1 + a_{23}\bar{M}_2 \end{aligned}$$

и вообще

$$\bar{M}_k^{k-1} = \bar{M}_k + \alpha_{1k} \bar{M}_1 + \alpha_{2k} \bar{M}_2 + \dots + \alpha_{(k-1)k} \bar{M}_{(k-1)}^{(k-2)} \quad (152)$$

После того как будут вычислены единичные групповые эпюры и определены групповые неизвестные Y_1, Y_2, \dots, Y_n по формулам (151), можно вычислить ординаты окончательной эпюры моментов по формуле (128):

$$M = M^0 + \bar{M}_1 Y_1 + \bar{M}_2 Y_2 + \bar{M}_3 Y_3 + \dots + \bar{M}_n^{n-1} Y_n$$

По аналогичным формулам могут быть вычислены эпюры N и Q .

Изложенный прием вычислений окончательной эпюры моментов по групповым неизвестным не имеет преимуществ перед вычислением ее по простым неизвестным X_1, X_2, \dots, X_n . Он дан с целью показать возможность использования групповых неизвестных и групповых эпюр для построения линий влияния. Построение последних по групповым неизвестным проще, чем по исходным неизвестным (см. § 55).

§ 54. ОБРАТНЫЙ ХОД ПО ГАУССУ

Каждая заданная рама может подвергаться различного рода загрузениям, из которых проектировщику приходится выбирать наименьгоднейшую комбинацию. Каждое новое загрузение изменяет в системе канонических уравнений только грузовые члены, коэффициенты же при неизвестных остаются неизменными. В связи с этим при решении уравнений способом Гаусса в условиях изменения грузового члена приходится пересчитывать только столбец с грузовыми членами и затем определять неизвестные, пересчитывая их по схеме выражений (147). Самая схема выражений (147) наводит на мысль, что пересчет значений неизвестных может обегиться, если они будут выражены не через нагрузку и неизвестные, а только через нагрузку. Это требование равносильно тому, чтобы неизвестные в канонических уравнениях были выражены в линейной функции от нагрузок.

Пусть например имеется система канонических уравнений:

$$\begin{aligned} X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + \dots + X_n \delta_{1n} &= -\Delta_{1p}, \\ X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + \dots + X_n \delta_{2n} &= -\Delta_{2p}, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ X_1 \delta_{n1} + X_2 \delta_{n2} + \dots + X_n \delta_{nn} &= -\Delta_{np}. \end{aligned}$$

Решив их относительно неизвестных, мы можем выразить последние в виде следующих линейных функций от нагрузки (через свободные грузовые члены):

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= \beta_{11} \Delta_{1p} + \beta_{21} \Delta_{2p} + \dots + \beta_{n1} \Delta_{np}, \\ X_2 &= \beta_{12} \Delta_{1p} + \beta_{22} \Delta_{2p} + \dots + \beta_{n2} \Delta_{np}, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ X_n &= \beta_{1n} \Delta_{1p} + \beta_{2n} \Delta_{2p} + \dots + \beta_{nn} \Delta_{np}. \end{aligned} \right\} \quad (153)$$

Ясно, что если мы будем знать коэффициенты β , то вычисление неизвестных при всякого вида новой нагрузке Δ_p становится простым.

Мы здесь не будем излагать математическое оформление получения коэффициентов β , так как это вопрос алгебраических, несколько сложных преобразований¹. Мы ограничимся здесь приведением выражений, по которым могут быть вычислены значения всех коэффициентов β при любом числе i и неизвестных в рассматриваемой раме.

Мы должны различать два вида коэффициентов: с одинаковыми подстрочными значениями β_{kk} и разными β_{ik} . Величины i и k меньше n .

Коэффициенты вида β_{kk} определяются выражением:

$$\beta_{kk} = \frac{1}{\delta_{kk}^{(k-1)}} + \alpha_{kn} \beta_{kn} + \alpha_{k(n-1)} \beta_{k(n-1)} + \alpha_{k(n-2)} \beta_{k(n-2)} + \dots \quad (154)$$

Здесь $\delta_{kk}^{(k-1)}$ — групповое перемещение, получаемое по таблице Гаусса; α — переходные множители, получаемые по той же таблице Гаусса.

Количество членов суммы ограничивается тем числом множителей α , которые имеют место при данном значке k . Если $k = (n - c)$, то, снижая постепенно второй подстрочный показатель у множителя α :

$$\alpha_{kn}, \alpha_{k(n-1)}, \alpha_{k(n-2)}, \dots, \alpha_{k(n-c)} = \alpha_{kk}.$$

¹ Урбан И. В., Труды МНИТ, вып. 43.

мы приходим к множителю α_{kk} , которого не имеется. Этим членом ограничивается написание указанной суммы (154).

Коэффициенты вида β_{ik} определяются выражением:

$$\beta_{ik} = \alpha_{in}\beta_{kn} + \alpha_{i(n-1)}\beta_{k(n-1)} + \alpha_{i(n-2)}\beta_{k(n-2)} + \dots \quad (155)$$

Оно отличается от выражения (154) отсутствием первого члена суммы. Количество членов суммы ограничивается тем же условием, именно исчерпанием значения множителя α .

В написании обоих выражений знаки приняты положительными. При вычислении значений β знаки при множителях α и величинах δ берутся из основной таблицы Гаусса.

Из рассмотрения выражений (154) и (155) можно видеть, что величины β зависят исключительно от коэффициентов δ при неизвестных в основной системе канонических уравнений и обладают всеми свойствами, присущими последним. В частности они обладают взаимностью:

$$\beta_{ki} = \beta_{ik} \quad (156)$$

что облегчает вычисление этих коэффициентов.

Ниже мы приводим схему последовательного вычисления коэффициентов β для случая четырех неизвестных (табл. 40)¹.

Считаем, что нам известны из прямого хода Гаусса величины:

$$\begin{array}{l|l} \delta_{11} & - \alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{14}, \\ \delta_{22} & - \alpha_{23}, \alpha_{24}, \\ \delta_{33} & - \alpha_{34}, \\ \delta_{44} & - \end{array}$$

Таблица 40

Схема последовательного вычисления коэффициентов β для случая четырех неизвестных

| | Δ_{4p} | Δ_{3p} | Δ_{2p} | Δ_{1p} |
|-------|---|---|--|--|
| X_4 | $\beta_{44} = \frac{1}{\delta_{11}^{III} 44}$ | $\beta_{34} = \alpha_{24}\beta_{44}$ | $\beta_{24} = \alpha_{24}\beta_{44} + \alpha_{23}\beta_{43}$ | $\beta_{14} = \alpha_{14}\beta_{44} + \alpha_{13}\beta_{43} + \alpha_{12}\beta_{42}$ |
| X_3 | $\beta_{33} = \beta_{34}$ | $\beta_{23} = \frac{1}{\delta_{22}^{II}} + \alpha_{34}\beta_{34}$ | $\beta_{13} = \alpha_{14}\beta_{34} + \alpha_{13}\beta_{33} + \alpha_{12}\beta_{32}$ | |
| X_2 | $\beta_{42} = \beta_{24}$ | $\beta_{32} = \beta_{23}$ | $\beta_{22} = \frac{1}{\delta_{22}^I} + \alpha_{24}\beta_{24} + \alpha_{23}\beta_{23}$ | $\beta_{12} = \alpha_{14}\beta_{24} + \alpha_{13}\beta_{23} + \alpha_{12}\beta_{22}$ |
| X_1 | $\beta_{41} = \beta_{14}$ | $\beta_{31} = \beta_{13}$ | $\beta_{21} = \beta_{12}$ | $\beta_{11} = \frac{1}{\delta_{11}} + \alpha_{14}\beta_{14} + \alpha_{13}\beta_{13} + \alpha_{12}\beta_{12}$ |

Процесс вычисления значений β ведется последовательно, начиная с тех, которые имеют старшие подстрочные значки, т. е. с величин:

$$\beta_{nn}, \beta_{(n-1)n}, \beta_{n(n-1)}, \beta_{(n-2)n} \text{ и т. д.}$$

Это необходимо потому, что коэффициенты со старшими значками входят, как известные, в величины с младшими значками.

Для контроля правильности вычисления величин β следует использовать зависимость, по которой сумма произведений одноименных коэффициентов в каждой строке матриц обеих систем уравнений равна единице:

$$\left. \begin{array}{l} \beta_{11}\delta_{11} + \beta_{21}\delta_{12} + \beta_{31}\delta_{13} + \dots + \beta_{n1}\delta_{1n} = 1, \\ \beta_{21}\delta_{12} + \beta_{22}\delta_{22} + \beta_{23}\delta_{23} + \dots + \beta_{2n}\delta_{2n} = 1 \\ \text{и т. д.} \end{array} \right\} \quad (157)$$

¹ Отметим мнемоническое правило написания выражений β_{ik} .

Первым множителем при β вводится множитель α с первым показателем, одинаковым с первым же показателем определяемого коэффициента β_{ik} . В каждом произведении $\alpha_{i(n-2)}\beta_{k(n-2)}$ один из показателей у обеих букв одинаковый, два другие показателя i и k соответствуют показателям при определяемом коэффициенте β_{ik} .

Пример числового вычисления¹. Предположим, что из расчета прямым ходом Гаусса получено:

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= 20\,112; & \alpha_{12} &= -0,5012; & \alpha_{13} &= -0,0109; \\ \delta_{22} &= 276,6; & & & \alpha_{23} &= -0,0783; \\ \delta_{33} &= 23,4; & & & & \end{aligned}$$

Для удобства вычислений увеличиваем величины $\frac{1}{\delta_{kk}}$ в 10 000 раз:

| | Δ_{p3} | Δ_{p2} | Δ_{p1} |
|-------|---|--|--|
| X_3 | $\beta_{33} = \frac{10\,000}{23,4} = 428$ | $\beta_{23} = -0,0783 \cdot 428 = -33,5$ | $\beta_{13} = -0,0109 \cdot 428 + 0,5012 \cdot 33,5 = 12,13$ |
| X_2 | $\beta_{22} = -33,5$ | $\beta_{22} = \frac{10\,000}{217,4} + 0,0783 \cdot 33,5 = 6,285$ | $\beta_{12} = 0,0109 \cdot 33,5 - 0,5012 \times 6,285 = -2,38$ |
| X_1 | $\beta_{31} = 12,13$ | $\beta_{32} = -2,38$ | $\beta_{11} = \frac{10\,000}{20\,112} - 0,0109 \cdot 12,3 + 0,5012 \cdot 2,38 = 1,824$ |

Делаем проверку при известных из расчета $\delta_{11} = 20\,112$; $\delta_{12} = 10\,096$; $\delta_{13} = 220$. $\beta_{11}\delta_{11} + \beta_{21}\delta_{12} + \beta_{31}\delta_{13} = (1,824 \cdot 20\,112 - 2,38 \cdot 10\,096 + 12,13 \cdot 220) \cdot 10^{-4} = 0,9994$.

Величины β не зависят от вида нагруз и. Зная их, можно определить лишние неизвестные по выражениям (153) при любом виде нагрузки.

Если, например, при первом нагружении рамы для которой вычислены коэффициенты β , грузовые члены в канонических уравнениях равны $\Delta_{1p}^I, \Delta_{2p}^I, \Delta_{3p}^I$, а при другом нагружении равны $\Delta_{1p}^{II}, \Delta_{2p}^{II}, \Delta_{3p}^{II}$, то величины неизвестных определяются:

При первом нагружении выражениями:

$$\begin{aligned} 10^4 X_3 &= 428\Delta_{3p}^I - 33,5\Delta_{2p}^I + 12,13\Delta_{1p}^I; \\ 10^4 X_2 &= -33,5\Delta_{3p}^I + 6,285\Delta_{2p}^I - 2,38\Delta_{1p}^I; \\ 10^4 X_1 &= 12,13\Delta_{3p}^I - 2,38\Delta_{2p}^I + 1,824\Delta_{1p}^I \end{aligned}$$

При втором нагружении:

$$\begin{aligned} 10^4 X_3 &= 428\Delta_{3p}^{II} - 33,5\Delta_{2p}^{II} + 12,13\Delta_{1p}^{II}; \\ 10^4 X_2 &= -33,5\Delta_{3p}^{II} + 6,285\Delta_{2p}^{II} - 2,38\Delta_{1p}^{II}; \\ 10^4 X_1 &= 12,13\Delta_{3p}^{II} - 2,38\Delta_{2p}^{II} + 1,824\Delta_{1p}^{II} \end{aligned}$$

§ 55. ЛИНИИ ВЛИЯНИЯ

Построение линий влияния в сложных рамах проводится на основе положений, изложенных в общем отделе § (14).

Для построения линии влияния каждого простого неизвестного X_i надо, как известно, приложить по его направлению единичное воздействие $\bar{X}_i = 1$, которое дает грузовой член в соответствующем каноническом уравнении (δ_{ii}). Из решения системы канонических уравнений определяются все лишние неизвестные при $\bar{X}_i = 1$. Затем определяются ординаты прогиба основной системы под действием $\bar{X}_i = 1$ и соответствующих ему остальных лишних неизвестных. Эти ординаты, измененные в масштабе δ_{ii} , дадут линию влияния неизвестного X_i . Этот процесс должен быть повторен для построения линий влияния всех неизвестных. Ясно, что он связан с большими пересчетами. Вычислительный процесс несколько облегчается использованием матрицы обратного хода по Гауссу (§ 54).

¹ Данные взяты из книги И. В. Урбана, Расчет статически неопределимых систем стр. 255, 1937.

Другой прием построения линий влияния неизвестных состоит в использовании групповых неизвестных вместо простых. Групповые неизвестные, получаемые из прямого хода матрицы, определяются выражениями (151):

$$Y_1 = -\frac{\delta_{p1}}{\delta_{11}}, \quad Y_2 = -\frac{\delta_{p2}^I}{\delta_{22}^I},$$

$$Y_3 = -\frac{\delta_{p3}^{II}}{\delta_{33}^{II}}, \quad Y_n = -\frac{\delta_{pn}^{(n-1)}}{\delta_{nn}^{(n-1)}}. \quad (158)$$

Величины ординат прогибов $\delta_{pk}^{(k-1)}$ и масштабных множителей $\delta_{kk}^{(k-1)}$ определяются по групповым эпюрам $\overline{M}_k^{(k-1)}$ для этих неизвестных. Построение последних проводится в порядке решения прямого хода Гаусса.

Вычисление ординат прогибов $\delta_{pk}^{(k-1)}$ проводится по формулам, данным в § 15, при помощи табл. 2.

После того как тем или иным приемом будут построены линии влияния неизвестных, вычисление ординат линий влияния внутренних усилий моментов проводится в обычном порядке.

Вычислительный процесс показан в нижеприведенном примере.

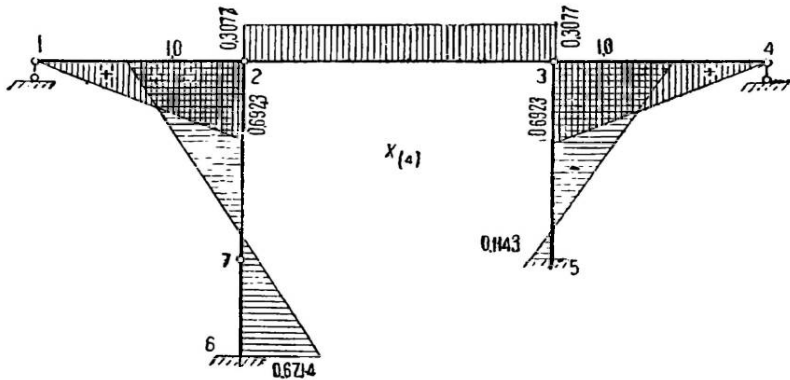
Пример 19. Построение линий влияния в рамном путепроводе, показанном на черт. 225.

1) Выбираем основную систему по схеме, показанной на черт. 225 с пятью неизвестными.

Единичные эпюры для этих неизвестных показаны на черт. 226 и 227.

2) Перемещения δ для коэффициентов при неизвестных вычислены в примере 18 и сохраняют свою силу.

3) Порядок расположения канонических уравнений для расчета по табл. 38 показан в самой таблице.



Черт. 233.

4) В табл. 38 проведено вычисление множителей и всех групповых перемещений.

5) Построение групповых эпюр моментов в проводим в следующем порядке.

Эюра \overline{M}_1 остается без изменения (черт. 226, а).

Эюра \overline{M}_2^I строится по формуле:

$$\overline{M}_2^I = \overline{M}_2 + a_{12}M_1.$$

В рассматриваемом случае $a_{12} = 0$, поэтому эюра \overline{M}_2^I будет такая же, как эюра \overline{M}_2 (черт. 226, б).

Эюра \overline{M}_3^{II} строится по формуле:

$$\overline{M}_3^{II} = \overline{M}_3 + a_{13}\overline{M}_1 + a_{23}\overline{M}_2^I.$$

В рассматриваемом случае $\alpha_{13} = \alpha_{23} = 0$, и эпюра M_3^{II} будет такая же как эпюра \bar{M}_3 (черт. 226, с).

Эпюра \bar{M}_4^{III} строится по формуле.

$$\bar{M}_4^{\text{III}} = \bar{M}_4 + \alpha_{14}\bar{M}_1 + \alpha_{24}\bar{M}_2^{\text{I}} + \alpha_{34}\bar{M}_3^{\text{II}}.$$

В рассматриваемом случае $\alpha_{14} = -\frac{4}{35} = -0,1143$; $\alpha_{24} = -\frac{9}{13} = -0,6923$; $\alpha_{34} = 0$.

Вычисление ординат эпюры моментов \bar{M}_4^{III} в характерных точках приведено в табл. 41.

Таблица 41

Вычисление ординат групповой эпюры моментов M_4^{III}

| Наименование узловых моментов | \bar{M}_4 | $-0,1143$ \bar{M}_1 | $-0,6923$ M_2^{I} | $0 \cdot \bar{M}_3^{\text{II}}$ | $\bar{M}_4^{\text{III}} = \Sigma \bar{M}$ |
|-------------------------------|-------------|--------------------------|-------------------------------|---------------------------------|---|
| $\bar{M}_{21} = \bar{M}_{34}$ | 0 | | 0,6923 · 1 | 0 | 0,6923 |
| $\bar{M}_{23} = \bar{M}_{32}$ | -1 | 0 | 0,6923 · 1 | 0 | -0,3077 |
| $\bar{M}_{27} = \bar{M}_{35}$ | -1 | 0 | 0 | 0 | -1 |
| \bar{M}_{63} | 0 | 0,1143 · 1 | 0 | 0 | 0,1143 |
| \bar{M}_{62} | 0,5 | 0,1143 · 1,5 | 0 | 0 | 0,6714 |

Контур эпюры показан на черт. 233.

Эпюра \bar{M}_5^{IV} определяется формулой:

$$\bar{M}_5^{\text{IV}} = \bar{M}_5 + \alpha_{15}\bar{M}_1 + \alpha_{25}\bar{M}_2^{\text{I}} + \alpha_{35}\bar{M}_3^{\text{II}} + \alpha_{45}\bar{M}_4^{\text{III}}.$$

В рассматриваемом случае:

$$\alpha_{15} = \frac{20}{35} = 0,5714; \quad \alpha_{25} = 0; \quad \alpha_{35} = -\frac{3}{7} = -0,4286; \quad \alpha_{45} = \frac{4,7165}{19,312} = 0,2441.$$

Вычисление ординат эпюры моментов \bar{M}_5^{IV} в характерных точках дано в табл. 42.

Таблица 42

Вычисление ординат групповой эпюры моментов \bar{M}_5^{IV}

| Наименование узловых моментов | M_5 | 0,5714 \bar{M}_1 | $0 \cdot \bar{M}_2^{\text{I}}$ | $-0,4286$ \bar{M}_3^{II} | 0,2441 \bar{M}_4^{III} | $\bar{M}_5^{\text{IV}} = \Sigma \bar{M}$ |
|-------------------------------|-------|-----------------------|--------------------------------|--------------------------------------|------------------------------------|--|
| M_{21} | 0 | 0 | 0 | -1 | 0,6928 | 0,5976 |
| M_{23} | -1 | 0 | 0 | -1 | -0,3077 | 0,6465 |
| M_{25} | -1 | 0 | 0 | 0 | -1 | -1,2441 |
| M_{32} | +1 | 0 | 0 | 1 | -0,3077 | 0,4963 |
| M_{34} | 0 | 0 | 0 | 1 | 0,6928 | -0,2596 |
| M_{35} | +1 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0,7558 |
| M_{38} | +2 | -1 | 0 | 0 | 0,1143 | 1,4565 |
| M_{62} | +0,5 | -1,5 | 0 | 0 | 0,6714 | -0,1933 |

Контур эпюры \bar{M}_5^{IV} показан на черт. 234.

6. Переходим к построению линий влияния неизвестных. Подвижной груз может перемещаться только по ригелю заданной рамы, поэтому построение линий влияния ограничиваем длиной ригеля.

Пользуясь данными эпюр моментов, составляем уравнения прогибов на каждом участке ригеля и проводим вычисление ординат прогибов при помощи табл. 2.

Неизвестное X_1 . Ординаты эпюры моментов (черт. 226, а) по длине ригеля равны нулю, поэтому ординаты линии влияния также равны нулю.

Неизвестное X_4 . Эпюра моментов показана на черт. 226, б. Ординаты линии прогибов определяются:
на длине участка 1—2 уравнением (35):

$$EJy = -1 \frac{1}{6} 6^2 u (1 - u^2) = -6u (1 - u^2);$$

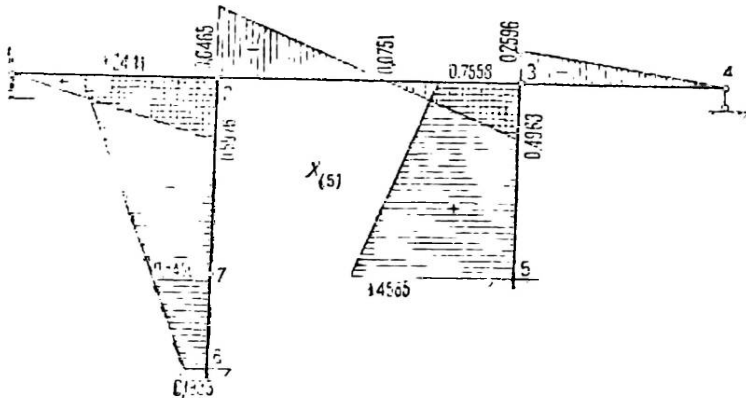
на длине участка 2—3 уравнениями (35) и (36):

$$\begin{aligned} EJy &= -1 \cdot 9^2 \frac{1}{6} u (1 - u^2) - 1 \cdot 9^2 \frac{1}{6} u (1 - u) (2 - u) = \\ &= -13,5 [u (1 - u^2) - u (1 - u) (2 - u)]; \end{aligned}$$

на длине участка 3—4 уравнением (36):

$$EJy = -1 \cdot 6u (1 - u) (2 - u).$$

Вычисление ординат сделано в табл. 43.



Черт. 234.

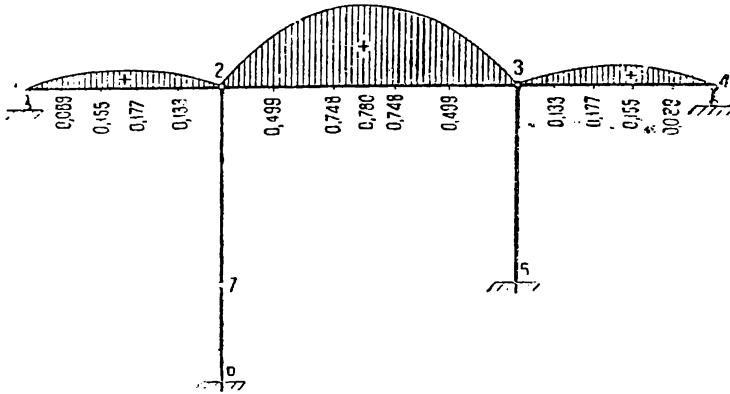
Таблица 43

Ординаты упругих кривых и линии влияния неизвестных

| $u = \frac{x}{l}$ | X_2 | | X_3 | | X_4 | | X_5 | | |
|-------------------|-------------------|------------------------|-------------------|------------------------|-------------------|------------------------|-------------------|------------------------|--------|
| | Ординаты прогибов | Ординаты линии влияния | Ординаты прогибов | Ординаты линии влияния | Ординаты прогибов | Ординаты линии влияния | Ординаты прогибов | Ординаты линии влияния | |
| Стержень 1—2 | 0 | | | | | | | | |
| | 0,20 | -1,152 | 0,089 | -1,152 | +0,165 | 0,798 | -0,041 | 0,639 | -0,013 |
| | 0,40 | -2,016 | 0,155 | -2,016 | +0,288 | 1,396 | -0,072 | 1,205 | -0,022 |
| | 0,60 | -2,304 | 0,177 | -2,304 | +0,327 | 1,596 | -0,083 | 1,377 | -0,025 |
| | 0,80 | -1,728 | 0,133 | -1,728 | +0,247 | 1,1906 | -0,062 | 1,033 | -0,019 |
| 1,00 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| Стержень 2—3 | 0,00 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | 0,20 | -6,480 | 0,499 | -1,296 | +0,185 | -1,993 | +0,103 | -1,259 | +0,023 |
| | 0,40 | -9,720 | 0,748 | -0,513 | +0,073 | -2,990 | +0,155 | -1,156 | +0,021 |
| | 0,50 | -10,125 | 0,780 | 0 | 0 | -3,115 | +0,161 | -0,822 | +0,015 |
| | 0,60 | -9,720 | 0,748 | +0,513 | -0,073 | -2,990 | +0,155 | -0,423 | +0,008 |
| | 0,80 | -6,480 | 0,499 | +1,296 | -0,185 | -1,993 | +0,103 | +0,116 | -0,002 |
| | 1,00 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Стержень 3—4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | 0,20 | -1,728 | 0,133 | +1,728 | -0,247 | +1,196 | -0,062 | -0,449 | +0,08 |
| | 0,40 | -2,304 | 0,177 | +2,304 | -0,327 | +1,596 | -0,088 | -0,598 | +0,011 |
| | 0,60 | -2,016 | 0,155 | +2,016 | -0,288 | +1,396 | -0,072 | -0,523 | +0,010 |
| | 0,80 | -1,152 | 0,089 | +1,152 | -0,165 | +0,798 | -0,041 | -0,299 | +0,06 |
| | 1,00 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Переход от ординат эпюры прогибов к ординатам линии влияния должен быть сделан делением их на масштабный множитель $\delta_{33}^I = 13$ (табл. 38). Величины ординат выписаны в табл. 43.

Контур линии влияния показан на черт. 235.



Черт. 235.

Неизвестное X_3 . Эпюра моментов показана на черт. 226. с. Уравнения, определяющие ординаты линии прогибов, будут:

на длине участка 1—2 уравнение (35):

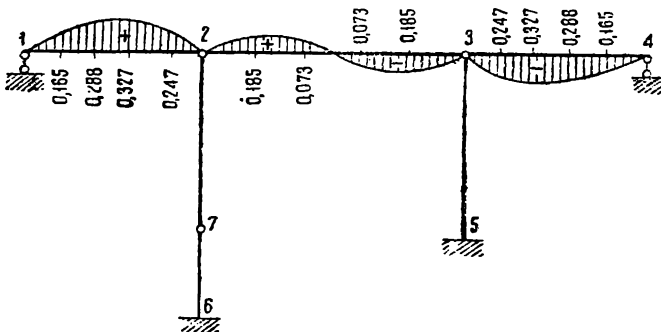
$$EJy = -1 \frac{1}{6} 6^2 u (1 - u^2) = -6u (1 - u);$$

на длине участка 2—3 уравнения (35) и (36):

$$\begin{aligned} EJy &= -1 \frac{1}{6} 9^2 u (1 - u^2) + 1 \cdot 9^2 \frac{1}{6} u (1 - u) (2 - u) = \\ &= -13,5 [u (1 - u^2) - u (1 - u) (2 - u)]; \end{aligned}$$

на длине участка 3—4 уравнение (36):

$$EJy = 1 \frac{1}{6} 6^2 u (1 - u) (2 - u) = 6u (1 - u) (2 - u).$$



Черт. 236.

Вычисление ординат сделано в табл. 43.

Переход от эпюры прогибов и линии влияния должен быть сделан делением ординат эпюры на масштабный множитель $\delta_{33}^{II} = 7$ (табл. 38). Величины ординат линий влияния выписаны в той же таблице. Контур линии влияния показан на черт. 236.

Неизвестное X_{14} . Эпюра моментов показана на черт. 233. Уравнения, определяющие ординаты линии прогибов ригеля, будут:

на длине участка 1—2 уравнение (35):

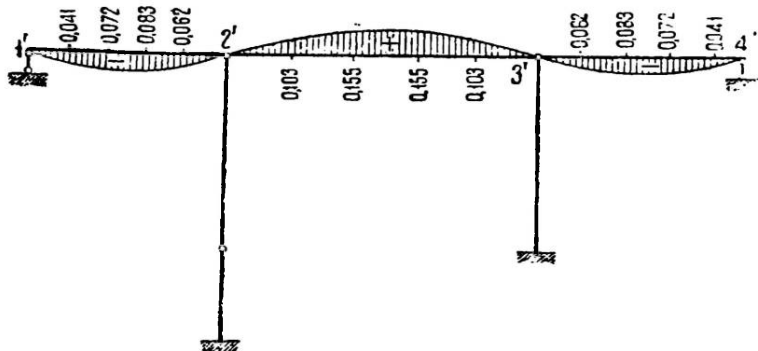
$$EJy = 0,6923 \frac{1}{6} 6^2 u (1 - u^2) = 4,154 \cdot u (1 - u^2);$$

на длине участка 2—3 уравнения (35) и (36):

$$\begin{aligned} EJy &= -0,3077 \cdot 9^2 \frac{1}{6} [u (1 - u^2) + u (1 - u) (2 - u)] = \\ &= -4,153 [u (1 - u^2) + u (1 - u) (2 - u)]; \end{aligned}$$

на длине участка 3—4 уравнение (36):

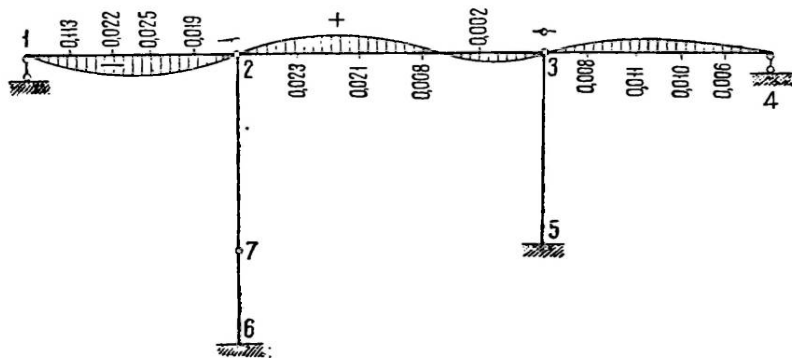
$$EJy = 0,6923 \cdot 6^2 \frac{1}{6} u (1 - u) (2 - u) = 4,154 u (1 - u) (2 - u).$$



Черт. 237.

Вычисление всех ординат сделано в табл. 43.

Переход от эпюры прогибов к линии влияния должен быть сделан путем деления ординаты эпюры прогибов на масштабный множитель $\delta_{44}^{III} = 19,312$ (табл. 38). Величины ординат линии влияния выписаны в той же табл. 43. Контур ее показан на черт. 237.



Черт. 238.

Неизвестное $X_{(6)}$. Эпюра моментов показана на черт. 234. Уравнения, определяющие ординаты эпюры прогибов ригеля, будут:

на длине участка 1—2 уравнение (35):

$$EJy = 0,5976 \frac{1}{6} 6^2 u (1 - u^2) = 3,586u (1 - u^2);$$

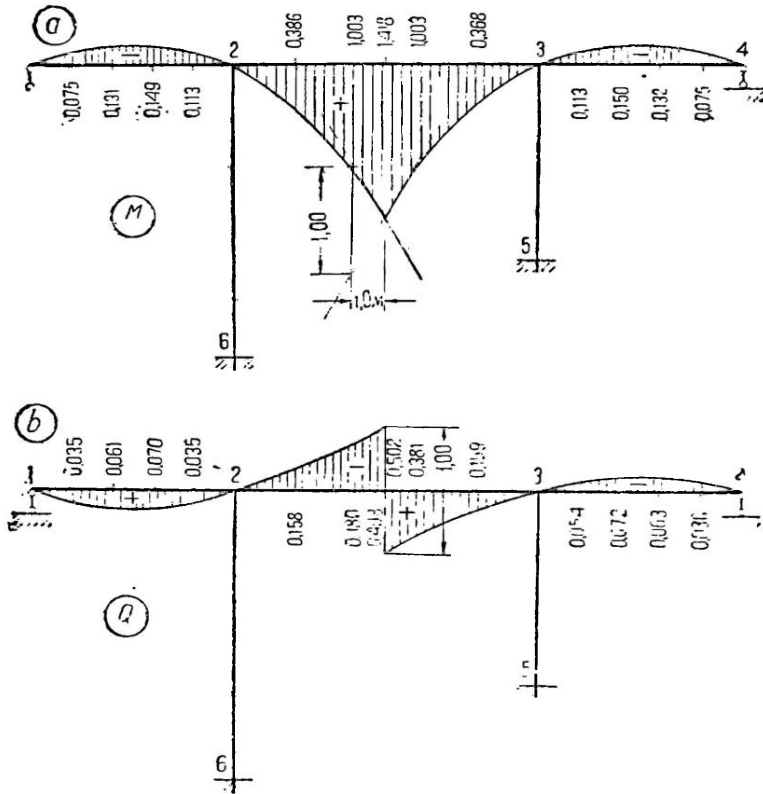
на длине участка 2—3 уравнения (35) и (36):

$$EJu = \frac{1}{6} 9^2 [0,4963u(1-u^2) - 0,6465u(1-u)(2-u)] = 6,534u(1-u^2) - 8,727u(1-u)(2-u);$$

на длине участка 3—4 уравнение (36):

$$EJu = -0,2596 \frac{1}{6} 6^2 u(1-u)(2-u) = -1,558u(1-u)(2-u).$$

Вычисление этих ординат проведено так же, как и в предыдущих случаях, и они выписаны в табл. 43.



Черт. 239.

В той же таблице выписаны ординаты линии влияния, полученные делением ординат эпюры на масштабный множитель $6^4 IV_{65} = 54,135$. Линии влияния показаны на черт. 238.

7) После того как построены линии влияния неизвестных, представляется возможным перейти к построению линий влияния в сечениях рамы. Предположим, что требуется построить линии влияния момента и поперечной силы в сечении по середине среднего пролета. Момент в этом сечении определяется уравнением (39), которое для рассматриваемого случая напишется так:

$$\bar{M} = \bar{M}^0 + \bar{M}_2^I X_2 + \bar{M}_4^{III} X_{(4)} + \bar{M}_{(4)}^{IV} X_{(5)}.$$

По подстановке соответствующих ординат по эпюрам моментов от единичных воздействий получим:

$$\bar{M} = \bar{M}^0 - X_2 - 0,3077 X_{(4)} - 0,0751 X_{(5)}.$$

В этом уравнении M^0 — момент, вызываемый в рассматриваемом сечении основной системы грузом, равным единице, перемещающимся по пролету. Величины неизвестных X_2 , $X_{(4)}$, $X_{(5)}$ определяются соответствующими ординатами линий влияния из табл. 43.

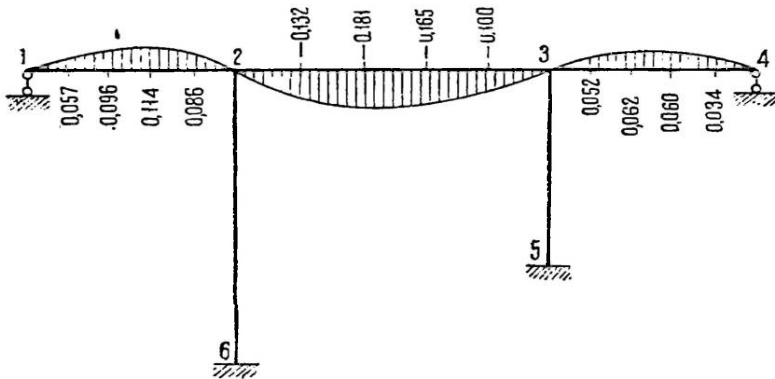
Ординаты линий влияния M и Q в сечении по середине среднего пролета (черт. 239)

| Сече- ние | Линия влияния момента | | | | | Линия влияния поперечной силы | | | | |
|--------------|-----------------------|--------|------------------|------------------|---------|-------------------------------|-------------|-----------------|---------|--------|
| | M^0 | $-X_2$ | $-0,308 X_{(4)}$ | $-0,075 X_{(5)}$ | M | Q^0 | $0,222 X_3$ | $0,127 X_{(5)}$ | Q | |
| Стержень 1—2 | 0 | — | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | 0,20 | — | -0,089 | 0,013 | 0,0010 | -0,075 | — | +0,037 | -0,0017 | +0,035 |
| | 0,40 | — | -0,155 | 0,026 | 0,0017 | -0,132 | — | +0,064 | -0,0028 | +0,061 |
| | 0,60 | — | -0,177 | 0,026 | 0,0020 | -0,150 | — | +0,073 | -0,0032 | +0,070 |
| | 0,80 | — | -0,133 | 0,019 | 0,0014 | -0,113 | — | +0,055 | -0,0024 | +0,053 |
| | 1,00 | — | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Стержень 2—3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | 0,20 | 0,90 | -0,449 | -0,032 | -0,0017 | +0,368 | -0,20 | +0,041 | +0,0029 | -0,158 |
| | 0,40 | 1,80 | -0,748 | -0,048 | -0,0016 | +1,003 | -0,40 | +0,013 | +0,0027 | -0,380 |
| | 0,50 | 2,25 | -0,780 | -0,05 | -0,0011 | +1,418 | -0,50 | 0 | +0,0019 | -0,498 |
| | 0,60 | 1,80 | -0,748 | -0,048 | -0,0006 | +1,003 | +0,40 | -0,013 | +0,0010 | +0,381 |
| | 0,80 | 0,90 | -0,449 | -0,032 | +0,0002 | +0,369 | +0,20 | -0,041 | -0,0008 | +0,159 |
| | 0,90 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | 1,00 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| Стержень 3—4 | 0,11 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | 0,20 | — | -0,133 | +0,019 | -0,0006 | -0,113 | — | -0,055 | +0,0010 | -0,054 |
| | 0,40 | — | -0,177 | +0,026 | -0,0008 | -0,150 | — | -0,073 | +0,0014 | -0,072 |
| | 0,60 | — | -0,155 | +0,022 | -0,0008 | -0,132 | — | -0,064 | +0,0013 | -0,063 |
| | 0,80 | — | -0,089 | +0,013 | -0,0005 | -0,076 | — | -0,037 | +0,0008 | -0,026 |
| | 0,90 | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| | 1,00 | — | — | — | — | — | — | — | — | — |

В табл. 44 проведено вычисление ординат этой линии влияния.
Линии влияния поперечной силы определяются уравнением:

$$\bar{Q} = \bar{Q}^0 + \bar{Q}_3^{\text{II}} X_3 + \bar{Q}_5^{\text{IV}} X_{(5)} = Q^0 + \frac{2}{9} X_3 + \frac{0,6465 + 0,4963}{9} X_{(5)},$$

$$Q = Q^0 + 0,222 X_3 + 0,127 X_{(5)},$$



Черт. 240.

где \bar{Q}^0 — поперечная сила в основной системе от перемещения груза, равного единице.
Ординаты линии влияния, определяемые этим уравнением, выписаны в табл. 44.
Контуры линий влияния M и Q показаны на черт. 239.

Рассмотрим еще случай построения линии влияния момента M_s в сечении $s-s$ левой ноги рамы, расположенной непосредственно в ее верхнем конце под узлом 2 (черт. 225).

Уравнение этой линии влияния:

$$\bar{M}_s = \bar{M}_4^{III} X_{(4)} + \bar{M}_0^{IV} X_{(5)} = -X_{(4)} - 1,214X_{(5)}$$

Таблица 45

Ординаты линии влияния момента M_s

| Стержень | $u \frac{x}{l}$ | $-X_{(4)}$ | $-1,214X_{(5)}$ | M_s |
|----------|-----------------|------------|-----------------|--------|
| 1-2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 0,20 | +0,041 | +0,016 | +0,057 |
| | 0,40 | +0,072 | +0,0271 | +0,096 |
| | 0,60 | +0,083 | +0,031 | +0,014 |
| | 0,80 | +0,062 | +0,024 | +0,086 |
| | 1,00 | 0,00 | 0,00 | 0 |
| 2-3 | 0,00 | 0,0 | 0,00 | 0 |
| | 0,20 | -0,103 | -0,029 | -0,132 |
| | 0,40 | -0,155 | -0,026 | -0,181 |
| | 0,60 | -0,155 | -0,010 | -0,165 |
| | 0,80 | -0,103 | +0,003 | -0,100 |
| | 1,00 | -0,0 | 0,00 | 0,00 |
| 3-4 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 |
| | 0,20 | +0,062 | -0,010 | +0,052 |
| | 0,40 | +0,088 | -0,014 | +0,069 |
| | 0,60 | +0,072 | -0,012 | +0,060 |
| | 0,80 | +0,041 | -0,007 | +0,034 |
| | 1,00 | 0,00 | 0 | 0 |

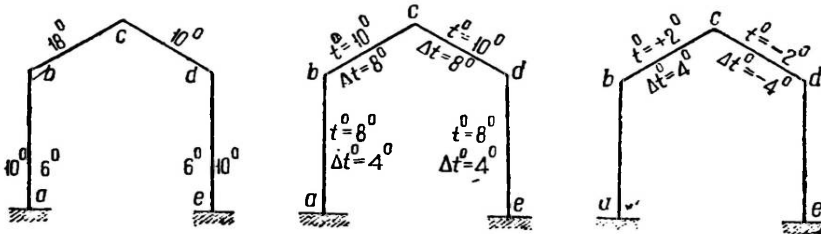
Определяемые этим уравнением ординаты линии влияния вычислены в табл. 45.

Контур линии влияния дан на черт. 240.

§ 56. ВЛИЯНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРНОГО РЕЖИМА

Влияние изменения температурного режима рамы по сравнению с режимом при ее установке учитывается на основе указаний, данных в § 7. Перемещения, вызываемые равномерным и неравномерным нагревом или охлаждением, вносятся в виде известных членов в соответственные канонические уравнения. Из совместного решения последних определяются лишние неизвестные и по ним вычисляются опорные моменты по концам стержней. Процесс расчета дан в нижеприводимом примере.

В расчетах симметричных рам на температурные воздействия с успехом может быть использована разбивка неизвестных на прямо и обратно симметричные. При одностороннем и несимметричном нагреве следует температурный режим разбивать на прямо и обратно симметричный.



Черт. 241.

Пусть например рама, показанная на черт. 241, подверглась несимметричному изменению температурного режима. В левой части bc ригеля средняя температура $t_{\text{лев}}^{\circ} = \frac{1}{2}(18 + 6) = 12^{\circ}$ и разница $\Delta t^{\circ} = (18 - 6) = 12^{\circ}$.

В правой части cd ригеля средняя температура $t_{\text{прав}}^{\circ} = \frac{1}{2}(10 + 6) = 8^{\circ}$ и разница температуры $\Delta t^{\circ} = (10 - 6) = 4^{\circ}$.

Используя условия прямой и обратной симметрии, можно расчет вести в двух предположениях:

симметричного режима обеих частей ригеля:

$$t^{\circ} = +10^{\circ} \quad \Delta t^{\circ} = +8^{\circ},$$

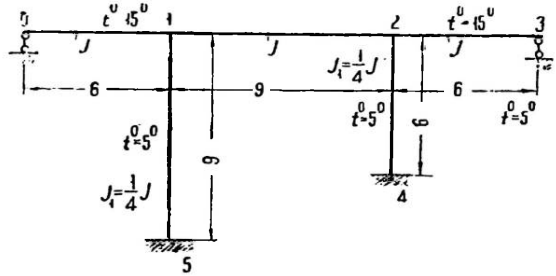
обратно симметричного режима:

$$\begin{array}{ll} \text{слева } t^{\circ} = +2^{\circ} & \text{справа } t^{\circ} = -2^{\circ} \\ \Delta t^{\circ} = +4^{\circ} & \Delta t^{\circ} = -4^{\circ}. \end{array}$$

Такое разложение аналогично разложению нагрузки на прямо и обратно симметричную. В первом случае все обратно симметричные неизвестные будут равны нулю. Во втором случае (обратной симметрии) все прямо симметричные неизвестные будут равны нулю.

Пример 20. Предположим, что требуется произвести расчет рамы, показанной на черт. 242, в условиях температурного режима, показанного на том же чертеже.

Ригель рамы подвергся неравномерному нагреву, в нем имеет место: средняя температура $t^{\circ} = \frac{1}{2}(15 + 5) = 10^{\circ}$ и разность температур крайних волокон: $\Delta t^{\circ} = (15 - 5) = 10^{\circ}$.



Черт. 242.

Стойки рамы подверглись равномерному нагреву $t^{\circ} = 5^{\circ}$.

Вычисление температурных членов в канонических уравнениях мы можем сделать при помощи единичных эпюр моментов, показанных на черт. 246 и 247. Параллельно мы учтем продольные силы, возникающие в члствах рамы под действием опорных реакций, показанных на чертежах тех же эпюр моментов. Вычисление делаем по формулам (12) и (13) в порядке составления канонических уравнений:

$$X_1 \delta_{11} + X_4 \delta_{14} + X_5 \delta_{15} + \alpha \cdot 10^{\circ} \frac{1}{6} \cdot 9 = 0,$$

$$X_2 \delta_{22} + X_4 \delta_{24} + \frac{\alpha}{c} \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6 + 9 \right) 10^{\circ} - \alpha \cdot 5^{\circ} \frac{1}{6} (9 + 6) = 0,$$

$$X_3 \delta_{33} + X_5 \delta_{35} - \alpha \cdot 5^{\circ} (9 - 6) \frac{7}{18} = 0,$$

$$X_1 \delta_{41} + X_2 \delta_{42} + X_4 \delta_{44} + X_5 \delta_{45} + \frac{\alpha}{c} 10^{\circ} \cdot 9 - \alpha \cdot 10^{\circ} \frac{1}{6} \cdot 9 = 0,$$

$$X_1 \delta_{51} + X_3 \delta_{53} + X_4 \delta_{54} + X_5 \delta_{55} - \alpha \cdot 5^{\circ} \frac{2}{9} (9 - 6) - \alpha \cdot 10^{\circ} \frac{9}{6} = 0.$$

В этих уравнениях c представляет высоту поперечного сечения ригеля.

Так как коэффициенты при неизвестных остались те же, что и в примере 18, то составим табл. 46 Га, сса только для пересчета свободных температурных членов, пользуясь в ней данными из табл. 38.

Вычисляем неизвестные по данным табл. 46, приняв $c = 1$.

$$X_5 = - \frac{-3,383 - 9,22}{54,135} EJ\alpha = 0,233\alpha EJ,$$

$$X_4 = \left[- \frac{-13,862 - 8,06}{19,312} + 0,244 \cdot 0,233 \right] EJ\alpha = 1,191 EJ\alpha,$$

$$X_3 = \left[- \frac{-5,83}{7} - \frac{3}{7} \cdot 0,233 \cdot 0 \right] EJ\alpha = 0,731 EJ\alpha,$$

$$X_2 = \left[- \frac{150 - 12,5}{13} + 0 - \frac{9}{13} \cdot 1,191 \right] EJ\alpha = -11,401 EJ\alpha,$$

$$X_1 = \left[- \frac{15}{35} + \frac{20}{35} \cdot 0,233 - \frac{4}{35} \cdot 1,191 + 0 + 0 \right] EJ\alpha = -0,429 EJ\alpha.$$

Подстановкой полученных значений неизвестных в некоторые уравнения из числа канонических убеждаемся в правильности решения.

Таблица 46

Вычисление температурных членов при решении канонических уравнений примера 20 способом Гаусса

| № уравнения | Данные из табл. 38 | | Δ_{if} | |
|---|--|---------------|---|---|
| | α | δ_{kk} | неравномерный нагрев | равномерный нагрев |
| I | | 35 | | $+15\alpha$ |
| II I α_{12} | $\alpha_{12} = 0$ | | $150 \frac{\alpha}{c}$ 0 | $-12,5\alpha$ 0 |
| II ^I | | 13 | $150 \frac{\alpha}{c}$ | $-12,5\alpha$ |
| III I α_{13} II ^I α_{23} | $\alpha_{13} = 0$ $\alpha_{23} = 0$ | | | $-5,83\alpha$ |
| III ^{II} | | 7 | | $-5,83\alpha$ |
| IV I α_{14} II ^I α_{24} III ^{II} α_{34} | $\alpha_{14} = -\frac{4}{35}$ $\alpha_{24} = -\frac{9}{13}$ $\alpha_{34} = 0$ | | $90 \frac{\alpha}{c}$ $-103,862 \frac{\alpha}{c}$ 0 | -15α $+ 8,654\alpha$ 0 |
| IV ^{III} | | 19,312 | $-13,862 \frac{\alpha}{c}$ | $-8,06\alpha$ |
| V I α_{15} II ^I α_{25} III ^{II} α_{35} IV ^{III} α_{45} | $\alpha_{15} = \frac{20}{35}$ $\alpha_{25} = 0$ $\alpha_{35} = -\frac{3}{7}$ $\alpha_{45} = 0,2442$ | | | $-18,33\alpha$ $+ 8,571\alpha$ 0 $+ 2,514\alpha$ |
| V ^{IV} | | 54,135 | $-3,383 \frac{\alpha}{c}$ | $-9,22\alpha$ |

Таблица 47

Вычисление конечных моментов в стержнях рамы (черт. 242), вызванных изменением температурного режима

| Наименование узловых моментов | X_1 -0,429 | X_2 -11,401 | X_3 +0,731 | X_4 +1,191 | X_5 +0,233 | Полный момент M |
|-------------------------------|-----------------|------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| M_{10} | | -1 | -1 | | | 10,670 |
| M_{12} | | -1 | -1 | -1 | -1 | 9,243 |
| M_{16} | -1,5 | | | -1 | -1 | -1,424 |
| M_{61} | | -1 | +1 | 0,5 | 0,5 | +1,355 |
| M_{21} | | -1 | +1 | -1 | +1 | 11,174 |
| M_{23} | | -1 | +1 | | | 12,132 |
| M_{24} | -1 | | | -1 | +1 | -0,958 |
| M_{42} | | | | | +2 | +0,895 |

По значениям неизвестных вычисляем опорные моменты по концам стержней рамы. Вычисление дано в табл. 47.

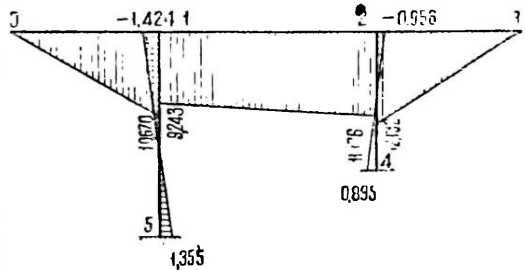
Величины неизвестных в табл. 47 показаны без учета жесткости стержней рамы и коэффициента линейного расширения α , поэтому все цифровые величины должны быть умножены на величину EJa .

На черт. 243 показан контур этой эпюры.

Правильность вычислений устанавливаем проверкой по сумме поперечных сил в сквозном сечении, проводимом через стойки рамы:

$$Q = -\frac{1,355 + 1,424}{9} + \frac{0,958 + 0,895}{6} \approx 0.$$

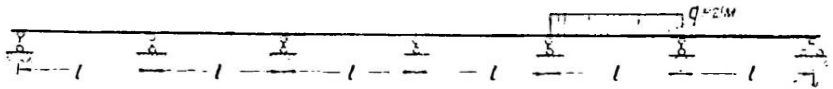
Характерным для эпюры моментов, вызываемых изменением температурного режима, является то, что она строится сложением эпюр моментов от лишних неизвестных.



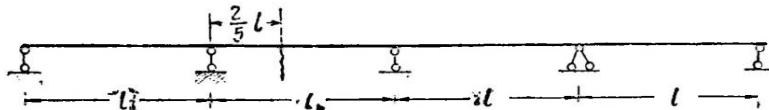
Черт. 243.

Задачи и упражнения

53. Написать систему канонических уравнений для неразрезной шестипролетной балки (черт. 244) с одинаковыми пролетами и постоянным моментом инерции; составить для нее расчетную таблицу Гаусса и определить по ней опорные моменты.



Черт. 244.



Черт. 245.

Указание. Упражнение имеет целью показать особенности решения трехчленных канонических уравнений способом Гаусса (матрица 11), к каковым относятся уравнения, имеющие место в решении этих уравнений способом Гаусса.

54. По данным задачи 53 вычислить опорные моменты в неразрезной балке в условиях неравномерного нагрева ее сверху на 20° и снизу на 10° .

55. Построить линию влияния момента в сечении второго пролета неразрезной балки, показанной на черт. 245. Момент инерции балки одинаковый во всех пролетах.

Указание. Упражнение имеет своей целью получить ответы на следующие вопросы:

1) Какая основная система будет выбрана и ее обоснование?

2) Какой процесс должен быть выполнен для получения уравнений линий влияния неизвестных? Процесс должен быть охарактеризованписанием исходных уравнений, выпиской выражений и величин, необходимых для решения уравнений по Гауссу.

3) По каким уравнениям должны вычисляться ординаты линии влияния в каждом пролете?

Матрица 11

коэффициентов при неизвестных в канонических уравнениях для неразрезных балок

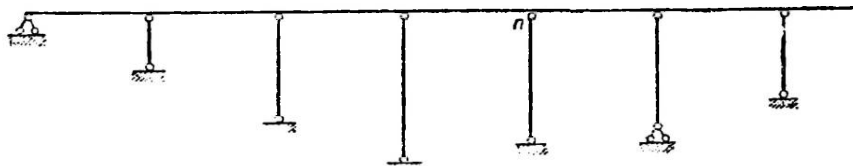
| № | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | — | n |
|---|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|-------------------|---------------|
| 1 | δ_{11} | δ_{12} | — | — | — | — | — | — |
| 2 | δ_{21} | δ_{22} | δ_{23} | — | — | — | — | — |
| 3 | — | δ_{32} | δ_{33} | δ_{34} | — | — | — | — |
| 4 | — | — | δ_{43} | δ_{44} | δ_{45} | — | — | — |
| 5 | — | — | — | δ_{54} | δ_{55} | δ_{56} | — | — |
| — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| n | — | — | — | — | — | — | $\delta_{n(n-1)}$ | δ_{nn} |

4) Как должен быть определен масштаб линии влияния и выписано его выражение в развернутом виде?

5) Построение линии влияния может быть заменено показанием контура ее по с.образению (§ 17).

§ 57. УПРУГО ОСЕДАЮЩИЕ ОПОРЫ

Продольная деформация стоек одноярусных рам сопровождается вертикальным смещением верхних узлов. В отдельных случаях например при стойках, сильно различающихся по высоте (черт. 246), эти смещения узлов могут вызывать значительный перекося отдельных стержней ригеля и значительное перераспреде-

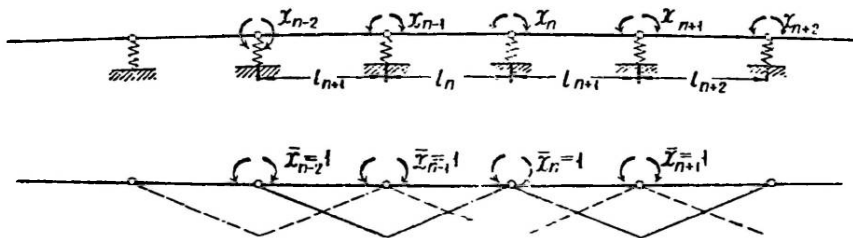


Черт. 246.

ление напряжений в последнем. Учет влияния таких смещений может быть сделан в общем порядке расчета рамных систем, для чего нужно в выражениях перемещений δ и Δ учитывать не только моменты, но и продольные силы.

Мы поставим себе задачей вывести типовое уравнение, включающее в себя учет линейных смещений ригеля, опирающегося на опоры, шарнирные по концам. Раму такого вида можно рассматривать как неразрезную балку, лежащую на оседающих опорах (понтонные мосты и т. п.).

Для получения основной системы вводим во все спорные сечения балки шарниры (черт. 247) и накладываем к ним опорные моменты X , которые принимаем за неизвестные. Направление этих моментов принимаем положительное.



Черт. 247.

В такой основной системе влияние каждого неизвестного распространяется только на два смежных пролета, и канонические уравнения, учитывающие только нагрузку, приводятся к виду трехчленных уравнений:

$$X_{(n-1)n} \delta_{(n-1)n} + X_n \delta_{nn} + X_{(n+1)n} \delta_{(n+1)n} = -\Delta_{jn}$$

которые известны под названием уравнений трех моментов.

Подставив значения перемещений δ , определяемые по эпюрам моментов от единичных воздействий (черт. 247, б), получим:

$$\frac{1}{\delta E} \left[X_{n-1} \frac{l_n}{J_n} + 2X_n \left(\frac{l_n}{J_n} + \frac{l_{n+1}}{J_{n+1}} \right) + X_{n+1} \frac{l_{n+1}}{J_{n+1}} \right] + \frac{B\phi_n}{EJ_n l_n} + \frac{A\phi_{(n+1)}}{EJ_{n+1} l_{n+1}} = 0. \quad (159)$$

Здесь $A\phi_{(n+1)}$ и $B\phi_n$ — фиктивные поперечные силы слева и справа от шарнира n , вычисляемые по фиктивной нагрузке, равной эпюре моментов от заданной нагрузки (черт. 248); J — моменты инерции, изменяющиеся по пролетам.

Наличие смещений в опорных точках заставляет дополнить это уравнение членом Δ_{nw} , представляющим взаимный поворот сечений в опорном шарнире n , вызываемый этими смещениями (§ 7). В рассматриваемом случае Δ_{nw} определяется работой момента $\bar{X}_n = 1$ на углах поворотов осей балок (черт. 249), вызываемых смещениями опор:

$$\Delta_{nw} = \bar{X}_n (-\operatorname{tg} \psi_n + \operatorname{tg} \psi_{n+1}),$$

$$\Delta_{nw} = \left[-\frac{\Delta_n - \Delta_{n-1}}{l_n} + \frac{\Delta_{n+1} - \Delta_n}{l_{n+1}} \right] = \frac{\Delta_{n-1}}{l_n} - \Delta_n \left(\frac{1}{l_n} + \frac{1}{l_{n+1}} \right) + \frac{\Delta_{n+1}}{l_{n+1}}. \quad (160)$$

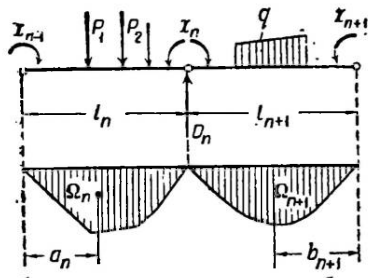
В этой формуле символом

$$\Delta_n = k_n D_n \quad (161)$$

обозначена осадка опоры n под давлением реакции D_n балки; k_n — числовой коэффициент просадки.

Реакция D_n представляет собой сумму реакций отдельных балок, опирающихся на эту опору, и определяется выражением (черт. 248):

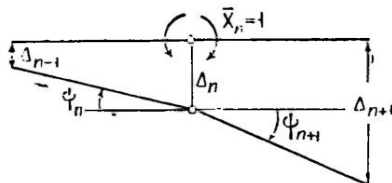
$$D_n = R_n^0 + \frac{X_{n-1}}{l_n} - \frac{X_n}{l_n} - \frac{X_n}{l_{n+1}} + \frac{X_{n+1}}{l_{n+1}}. \quad (162)$$



Черт. 248.

Здесь R_n^0 — сумма опорных реакций от заданной нагрузки на пролетах l_n и l_{n+1} .

Аналогичные выражения могут быть написаны для опорных давлений D_{n-1} ,



Черт. 249.

D_{n+1} и через них могут быть определены величины просадок Δ_{n-1} , Δ_n и Δ_{n+1} . Выписываем выражения последних и подставляем их в формулу (160):

$$\begin{aligned} \Delta_{nw} = & \frac{k_{n-1}}{l_n} \left(R_{n-1}^0 + \frac{X_{n-2}}{l_{n-1}} - \frac{X_{n-1}}{l_{n-1}} - \frac{X_{n-1}}{l_n} + \frac{X_n}{l_n} \right) - \\ & - k_n \left(\frac{1}{l_n} + \frac{1}{l_{n+1}} \right) \left(R_n^0 + \frac{X_{n-1}}{l_n} - \frac{X_n}{l_n} - \frac{X_n}{l_{n+1}} + \frac{X_{n+1}}{l_{n+1}} \right) + \\ & + \frac{k_{n+1}}{l_{n+1}} \left(R_{n+1}^0 + \frac{X_n}{l_{n+1}} - \frac{X_{n+1}}{l_{n+1}} - \frac{X_{n+1}}{l_{n+2}} + \frac{X_{n+2}}{l_{n+2}} \right). \end{aligned} \quad (163)$$

Обозначим для удобства последующих написаний:

$$\frac{k_{n-1}}{l_n} = \alpha_{n-1}; \quad \frac{k_n}{l_n} = \alpha_n; \quad \frac{k_n}{l_{n+1}} = \alpha_n'; \quad \frac{k_{n+1}}{l_{n+1}} = \alpha_{n+1}$$

и перепишем выражение (163), сгруппировав в нем члены, относящиеся к каждому неизвестному:

$$\begin{aligned} \Delta_{nw} = & [R_{n-1}^0 \alpha_{n-1} - R_n^0 (\alpha_n + \alpha_n') + R_{n+1}^0 \alpha_{n+1}] + X_{n-2} \frac{\alpha_{n-1}}{l_{n-1}} - \\ & - X_{n-1} \left(\frac{\alpha_{n-1}}{l_{n-1}} + \frac{\alpha_{n-1}}{l_n} + \frac{\alpha_n}{l_n} + \frac{\alpha_n'}{l_{n+1}} \right) + \\ & + X_n \left(\frac{\alpha_{n-1}}{l_n} + \frac{\alpha_n}{l_n} + \frac{\alpha_n'}{l_n} + \frac{\alpha_n}{l_{n+1}} + \frac{\alpha_n'}{l_{n+1}} + \frac{\alpha_{n+1}}{l_{n+1}} \right) - \\ & - X_{n+1} \left(\frac{\alpha_n}{l_n} + \frac{\alpha_n'}{l_{n+1}} + \frac{\alpha_{n+1}}{l_{n+1}} + \frac{\alpha_{n+1}}{l_{n+2}} \right) + X_{n+2} \frac{\alpha_{n+1}}{l_{n+2}}. \end{aligned} \quad (164)$$

Полученное выражение для Δ_{no} должно быть внесено в правую сторону уравнения (159).

Обозначим:

$$6E\alpha_{n-1} = \beta_{n-1}; \quad 6E\alpha_n = \beta_n; \quad 6E\alpha'_n = \beta'_n; \quad 6E\alpha_{n+1} = \beta_{n+1}$$

и перенесем известные члены в правую сторону уравнения (159), а неизвестные — в левую сторону его, тогда получим:

$$\begin{aligned} & -X_{n-2} \frac{\beta_{n-1}}{l_{n-1}} + X_{n-1} \left[\frac{l_n}{J_n} + \beta_{n-1} \left(\frac{1}{l_{n-1}} + \frac{1}{l_n} \right) + \beta_n \frac{1}{l_n} + \beta'_n \frac{1}{l_{n+1}} \right] + \\ & + X_n \left\{ 2 \left(\frac{l_n}{J_n} + \frac{l_{n+1}}{J_{n+1}} \right) - \left[\frac{\beta_{n-1}}{l_n} + \beta_n \left(\frac{1}{l_n} + \frac{1}{l_{n+1}} \right) + \beta'_n \left(\frac{1}{l_n} + \frac{1}{l_{n+1}} \right) + \frac{\beta_{n+1}}{l_{n+1}} \right] \right\} + \\ & + X_{n+1} \left[\frac{l_{n+1}}{J_{n+1}} + \beta_n \frac{1}{l_n} + \beta'_n \frac{1}{l_{n+1}} + \beta_{n+1} \left(\frac{1}{l_{n+1}} + \frac{1}{l_{n+2}} \right) \right] - X_{n+2} \frac{\beta_{n+1}}{l_{n+2}} = \\ & = -6A\varphi^{(n+1)} \frac{1}{J_{n+1}l_{n+1}} - 6B\varphi^n \frac{1}{J_n l_n} + \\ & + [R^0_{n-1} \beta_{n-1} - R_n^0 (\beta_n + \beta'_n) + R^0_{n+1} \beta_{n+1}]. \end{aligned} \quad (165)$$

Мы получили уравнение, известное под названием уравнения пяти моментов. Это уравнение является одним из числа канонических уравнений, которые могут быть написаны для каждого двух пролетов; число этих уравнений равно числу промежуточных опор, чем обеспечивается определение всех неизвестных. Решение их рекомендуется проводить способом Гаусса.

Если все пролеты балки или ригеля рамы равны между собой, то

$$\alpha_n = \alpha'_n, \quad \beta_n = \beta'_n,$$

и уравнение (165) упрощается:

$$\begin{aligned} & -X_{n-2} \beta_{n-1} + X_{n-1} \left[\frac{l_n^2}{J_n} + 2(\beta_{n-1} + \beta_n) \right] + \\ & + X_n \left[2l_n^2 \left(\frac{1}{J_n} + \frac{1}{J_{n+1}} \right) - (\beta_{n-1} + 4\beta_n + \beta_{n+1}) \right] + \\ & + X_{n+1} \left[\frac{l_{n+1}^2}{J_{n+1}} + 2(\beta_n + \beta_{n+1}) \right] - X_{n+2} \beta_{n+1} = \\ & = -6 \left(A\varphi^n \frac{1}{J_n} + B\varphi^n \frac{1}{J_n} \right) + [R^0_{n-1} \beta_{n-1} - 2R_n^0 \beta_n + R^0_{n+1} \beta_{n+1}] l. \end{aligned} \quad (166)$$

Величины β , входящие в уравнение (166), равны:

$$\beta_n = 6E\alpha_n = 6E \frac{k_n}{l}.$$

Здесь k_n — коэффициент, определяющий величину просадки, опоры балки или ригеля под давлением D_n .

Если опорой является упругий стержень длиной h (черт. 246), то величина k_n определяется величиной упругой деформации стержня под действием силы $\bar{D}_n = 1$:

$$k_n = \frac{h_n}{EF_n}, \quad \beta = \frac{6h_n}{F_n l}.$$

Если осадка опор вызвана такой причиной, как осадка понтона в наплавном мосту, то величина k_n представляет собой осадку $\bar{\Delta}$ опоры под действием давления $D = 1$ и

$$\beta = \frac{6E}{l} \bar{\Delta}.$$

В последнем случае для всех опор $k_{n-1} = k_n = k_{n+1} = \bar{\Delta}$, благодаря чему упрощается вид уравнений (166).

§ 58. УЧЕТ ВЛИЯНИЯ ПЕРЕМЕННОСТИ СЕЧЕНИЙ

Во всем предыдущем изложении сечение стержней рамы принималось постоянным, что не всегда имеет место в проектируемых конструкциях. Влияние переменности сечения приходится учитывать при вычислении коэффициентов при неизвестных и известных членах в канонических уравнениях. Если сечение стержня меняется скачками на отдельных его участках, как это имеет место например в металлических конструкциях, то такую переменность учитывают суммой интегралов, из которых каждый распространяется на участок с постоянным сечением.

Сложнее обстоит дело в конструкциях, в которых сечения стержней меняются непрерывно, как это имеет место например в железобетонных балках, в которых у опор делается постепенное увеличение высоты сечений в виде прямолинейных или криволинейных вутов (черт. 250).

Вычисление интегралов вида:

$$\int_s M_k M_m \frac{ds}{J_x} \quad (167)$$

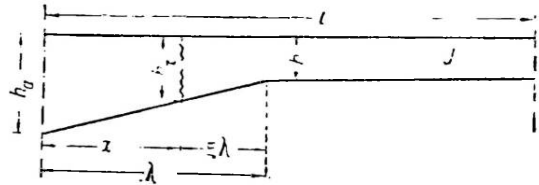
с непрерывно меняющимся моментом инерции возможно только в тех случаях, когда установлена закономерность нарастания момента инерции.

При прямолинейном нарастании сечения стержня (черт. 250) высота h_x в любом сечении вута определяется зависимость:

$$h_x = h(1 + c\xi).$$

$\xi\lambda$ — расстояние сечения от конца вута со стороны меньшей высоты его; c — характеристика изменения контура вута, определяемая из условия, что, при $\xi = 1$, $h_x = h_a$:

$$h_a = h(1 + c), \text{ откуда } c = \frac{h_a}{h} - 1.$$



Черт. 250.

Соответственно момент инерции в любом сечении определяется величиной:

$$J_x = J(1 + c\xi)^3,$$

где J — момент инерции в сечении высотой h .

Подставив это выражение момента инерции в интегралы вида (167) и введя в них обозначения:

$$(1 + c\xi) = z, \quad d\xi = \frac{1}{c} dz, \quad ds = dz,$$

получим:

$$\int_s M_k M_m \frac{ds}{J_x} = \frac{1}{J} \int_0^1 M_k M_m \frac{dz}{(1 + c\xi)^3} = \frac{1}{Jc} \int_1^{1+c} M_k M_m \frac{dz}{z^3}. \quad (168)$$

В таком виде эти интегралы решены и составлены таблицы, облегчающие их вычисление. Таблицы составлены также для случая нарастания сечения по параболической кривой¹.

Через интегралы вида (168) легко проводится вычисление интегралов:

$$\Delta_{kp} = \int_s M_p \bar{M}_k \frac{ds}{J},$$

учитывающих действие сплошной равномерно распределенной нагрузки, которая сама выражается в функции x .

Сложнее обстоит дело с учетом действия сосредоточенной нагрузки. Аналитический учет последней осложняется тем, что выражение момента M_p от нагрузки различно на каждом участке между грузами. При наличии нескольких сосредоточенных грузов целесообразно проводить вычисление величин перемещений Δ_p по упругим грузам, пользуясь для этого приведенными эпюрами моментов.

Кроме описанного приема аналитического учета закономерно изменяющегося момента инерции можно рекомендовать приближенный способ учета переменности момента инерции. Разбивают длину вута на несколько частей длиной Δs и принимают момент инер-

¹ „Справочник инженера-проектировщика“, Госстройиздат, т. II, стр. 356—364, 1934; Strassner, Neuere Methoden für die Statik der Rahmentragwerke, т. I, 1925.

ции постоянным на длине каждого участка. Это позволяет заменить интегрирование суммированием, распространяемым на все указанные участки.

Существуют также справочники, дающие поправочные коэффициенты в зависимости от длины вута и разности высот по его концам.

§ 59. ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ В РАМАХ

Определение лишних неизвестных в статически неопределимых рамах связано с необходимостью знать моменты инерции сечений стержней, образующих раму. Это осуществляется путем предварительного определения их по тем или иным соображениям, обоснованным опытом проектировков.

Вопрос упрощается, если предположить, что поперечное сечение в проектируемой системе постоянно, и если при расчете систем со сплошным сечением пренебречь влиянием продольных сил на деформацию. В этом случае во все члены уравнений деформаций будет входить общим множителем постоянный момент инерции, что поведет к сокращению его. При этом условия величины неизвестных определяются точно без знания размеров сечений в элементах.

Допущение в предварительном расчете постоянства сечения может быть сделано при расчете металлических балок, при расчетах железобетонных балок с невысокими вутами и т. д. Но такое допущение не может быть сделано в системах, образованных из элементов, работающих не в одинаковых условиях. Например, в рамных системах не следует принимать одинаковыми сечения ригелей и колонн. В последнем случае делают предварительное определение сечений, прибегая для этого к тем или иным допущениям.

При расчете рамных систем на действие вертикальной нагрузки делают предварительное определение размеров ригелей, рассматривая их как неразрезные балки или как балки с заделанными концами, смотря по жесткости соединения их с колоннами и по жесткости самих колонн.

Таблица 48

Сопоставление расчетных моментов в ригелях рамной системы

| № сечений по черт. 251 | Наименование сечения | Этаж | Моменты в тм, вычисленные | | |
|------------------------|--|------|---------------------------|-----------------------|-------------------------------------|
| | | | как для неразрезных балок | как для элемента рамы | как для балки с заделанными концами |
| 1 | Левое опорное сечение в крайних пролетах | III | -12,300 | - 8,586 | — |
| 2 | | II | -12,300 | -17,963 | — |
| 3 | | I | -12,300 | -23,477 | — |
| 4 | Сечение с наибольшим моментом в срединной части крайнего пролета | III | -36,900 | -31,191 | — |
| 5 | | II | -36,900 | -25,062 | — |
| 6 | | I | -36,900 | -21,321 | — |
| 7 | Правое опорное сечение в крайнем левом пролете | III | -44,860 | -41,922 | -48,690 |
| 8 | | II | 44,860 | -39,437 | -48,690 |
| 9 | | I | -44,860 | -37,325 | -48,690 |
| 10 | Левое опорное сечение в крайнем пролете | III | -44,860 | -41,887 | -32,460 |
| 11 | | II | 44,860 | 37,627 | -32,460 |
| 12 | | I | -44,860 | -35,298 | -32,460 |
| 13 | Сечение с наибольшим моментом в средней части | III | -25,792 | 19,856 | -16,230 |
| 14 | | II | -25,792 | -18,994 | -16,230 |
| 15 | | I | -25,792 | -17,837 | -16,230 |
| 16 | Правое опорное сечение в среднем пролете | III | -36,400 | -39,604 | -32,460 |
| 17 | | II | -36,400 | -36,738 | -32,460 |
| 18 | | I | -36,400 | -34,922 | -32,460 |

В табл. 48 дано¹ сопоставление величин расчетных моментов в ригелях рамной системы (черт. 251), рассчитанных: как элементы рамы, как неразрезные балки и как балки, заделанные концами.

По данным этой таблицы можно видеть, что расчетные моменты в ригелях верхнего этажа ближе подходят к расчетным моментам неразрезных балок; в нижних же этажах, где размеры колонн и жесткость их больше, расчетные моменты в ригелях ближе подходят к расчетным моментам балок, заделанных концами.

При предварительном определении сечений колонн, работающих на передачу вертикальной нагрузки, исходят из учета только продольной силы, определяемой как опорное давление неразрезной балки, соответственно снижая допускаемое напряжение в запас на восприятие напряжения от изгиба. Так например, для колонн верхнего этажа принимают напряжение в 50—55% от допускаемого; для нижнего этажа, где вследствие большей жесткости соединений на колонны передается меньший момент, принимают исходное напряжение в 55—65% допускаемого.

В однопролетных рамных системах (черт. 252), сильно работающих на восприятие горизонтального давления ветра, предварительное определение размеров делается, исходя из расчета или упрощенной статически неопределимой системы или даже статически определимой системы.

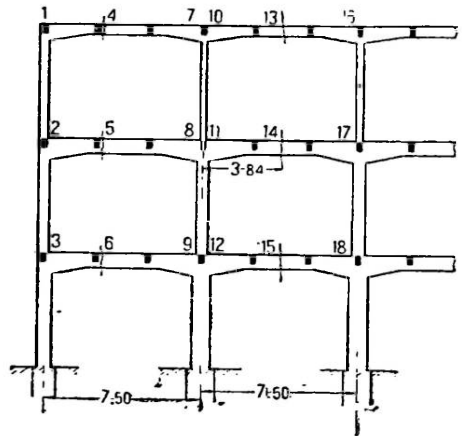
Например принимают, что каждый этаж представляет собой простую раму (черт. 252, б) с приложенными к ней по оси ригеля горизонтальными силами, и определяют размеры такой рамы по готовым формулам, имеющимся в справочниках.

В такой упрощенной системе принимают также горизонтальное давление распределенным поровну между ногами и приложенным на высоте одной трети от пят (черт. 252, с), рассматривая эту точку как шарнир.

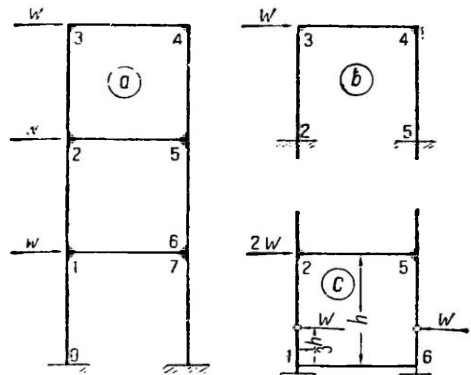
Существует конечно ряд других приемов предварительного определения размеров в рамных системах, часто вырабатываемых практикой самих проектирующих организаций.

При расчетах систем с различными размерами поперечных сечений в элементах целесообразно при первоначальном расчете вводить соотношение их между собой, приняв за измеритель средний момент инерции J_c или среднюю площадь F_c . Тогда влияние размеров в сечениях остальных элементов будет характеризоваться отношениями:

$$\frac{J_c}{J_1}, \frac{J_c}{J_2}, \quad \frac{F_c}{F_1}, \frac{F_c}{F_2}.$$



Черт. 251.



Черт. 252.

¹ Löser, Berechnung von Stockwerkrahmen für senkrechte Lasten, „Bauingenieur“, 1935.

Введение таких соотношений позволяет пользоваться подобием между рассматриваемой системой и существующими, сходными с ней по основным размерам; кроме того введение этих соотношений значительно облегчается процесс расчета и пересчета.

Опыт расчетов показывает, что использование всех указанных упрощений дает вполне удовлетворительные результаты для первого определения величин лишних неизвестных и определения по ним размеров поперечных сечений, после чего должен быть сделан новый расчет всей системы по полученным значениям неизвестных с учетом переменности сечений, различия моментов инерции и пр. Обычно этого второго пересчета бывает достаточно для окончательного определения лишних неизвестных и определения по ним окончательных поперечных сечений элементов системы.

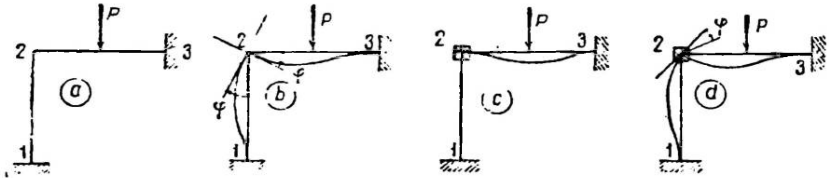
МЕТОД ДЕФОРМАЦИЙ

§ 60. СУЩНОСТЬ МЕТОДА И ОСНОВНЫЕ ДОПУЩЕНИЯ

При расчетах некоторых статически неопределимых систем бывает выгодно иногда принять за неизвестные не усилия, как это делается в расчетах по методу сил, а линейные перемещения и углы поворотов узлов системы.

Такой прием расчета носит название метода деформаций. Проследим сущность этого метода на простом примере расчета рамы, показанной на черт. 253,а.

Если к этой раме будет приложена какая-либо нагрузка (черт. 253,б), то узел 2 ее повернется на некоторый угол φ таким образом, что угол между касательными, проведенными из узла 2 к осям изогнутых стержней 2—1 и 2—3, сохранит свою первоначальную величину, т. е. останется прямым (черт. 253,б). Это следует из основного предположения о жесткости узлового соединения.



Черт. 253.

Что касается линейных смещений узла 2, то они будут весьма незначительны по сравнению с общей деформацией рамы, так как они могут происходить в данном случае только за счет изменения длины стержней под влиянием нормальных сил, развивающихся в стержнях 1—2 и 2—3, а также за счет разностей между длинами изогнутых осей и их проекцией на первоначальное направление стержней. Эти изменения невелики, поэтому можно считать, что узел 2 не получает линейных смещений.

Если бы мы предположили, что узел 2 закреплен так же как узлы 1 и 3, то вместо рамы мы получили бы две балки (черт. 253,с), заделанные концами. При этом допущении ось балки 2—3 искривилась бы под действием нагрузки и по концам ее возникли бы опорные моменты M_{23} и M_{32} , величину которых легко определить, так как расчет балок с заделанными концами нам хорошо известен. Что же касается стержня 1—2, то при полном закреплении узла 2, он не будет воспринимать моментов от нагрузки, находящейся на ригеле, и ось его останется прямой.

Закрепив узел 2, т. е. увеличив в нем число связей, мы изменили вид деформации заданной рамы (ср. черт. 253,б и 253,с). Чтобы восстановить истинную картину этой деформации в условиях закрепления узла 2, нам надо повернуть его заделку на угол φ . Величина этого угла нам неизвестна, но мы можем определить ее из следующих соображений.

Поворот конца балки, заделанной обоими концами (черт. 253, *d*), на угол φ создает в ее сечениях изгибающие моменты, эпюра которых очерчивается прямой с наибольшими ординатами по концам балки¹:

$$M_{\text{ин}} = \frac{4EJ}{l} \varphi; \quad M_{\text{ис}} = \frac{2EJ}{l} \varphi.$$

То же будет иметь место при повороте заделки узла 2 на φ_2 ; этот поворот создает на концах стержней 1—2 и 2—3 опорные моменты, сумма которых равна:

$$M_{2\varphi} = \left(\frac{4EJ_{12}}{l_{12}} + \frac{4EJ_{23}}{l_{23}} \right) \varphi_2.$$

После поворота узла 2 на угол φ_2 рама, находящаяся под действием нагрузки и угла поворота φ_2 , будет работать так же, как заданная. Все ее части будут находиться в равновесии, в том числе и узел 2, в котором слагаются моменты от нагрузки M_{2p} и от поворота $M_{2\varphi}$. По условию равновесия сумма этих моментов должна равняться нулю:

$$M_{2p} + M_{2\varphi} = 0$$

или

$$\left(\frac{4EJ_{12}}{l_{12}} + \frac{4EJ_{23}}{l_{23}} \right) \varphi_2 = -M_{2p}.$$

Неизвестным в этом уравнении остается угол φ_2 , который может быть определен из него. Зная угол φ_2 , можно вычислить моменты во всех узлах и построить окончательную эпюру моментов.

Сопоставляя приведенное решение с процессом расчета рам по методу сил, мы можем установить следующую последовательность.

1) Мы выбрали основную систему в виде отдельных балок, заделанных концами.

2) Приняли за неизвестное деформацию, в данном случае угол φ_2 поворота узла 2.

3) Пользуясь известными нам данными, написали выражения реактивных моментов, возникающих по концам стержней, сходящихся в узле 2, при повороте последнего на угол φ_2 . Сумму этих моментов, т. е. момент

$$M_{2\varphi} = \left(\frac{4EJ_{12}}{l_{12}} + \frac{4EJ_{23}}{l_{23}} \right) \varphi_2,$$

можно получить умножением числовой величины угла φ на момент:

$$\bar{M}_{2\varphi} = \frac{4EJ}{l_{12}} + \frac{4EJ_{23}}{l_{23}},$$

представляющий собой „единичный“ реактивный момент от поворота узла 2 на угол $\varphi_2 = 1$.

4) Имея выражение момента $\bar{M}_{2\varphi}$ и момента M_{2p} от нагрузки, мы составили уравнение равновесия узла 2:

$$\bar{M}_{2\varphi} \varphi_2 + M_{2p} = 0,$$

из которого определили величину неизвестного угла:

$$\varphi_2 = -\frac{M_{2p}}{\bar{M}_{2\varphi}}.$$

5) Зная угол φ_2 и нагрузку, легко построить окончательную эпюру моментов в раме.

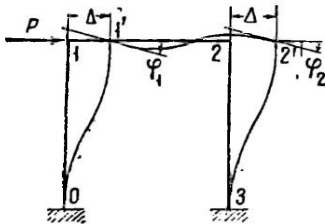
Из сказанного видно, что процессы расчета статически неопределимых систем по методу сил и методу деформаций имеют много общего с точки зрения составления расчетных уравнений.

¹ См. дальше, § 62, п. 3.

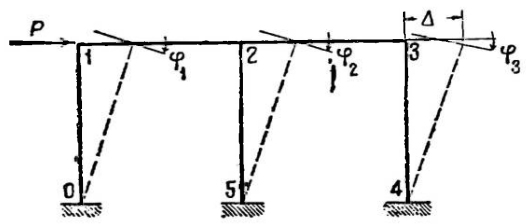
а) В методе сил за неизвестные принимаются силы и моменты, расчетные уравнения составляются по условию равенства нулю суммы деформаций.

б) В методе деформаций за неизвестные принимаются деформации (углы поворота и линейные смещения), расчетные уравнения составляются по условию равенства нулю суммы моментов или усилий.

Рама, показанная на черт. 253, трижды статически неопределима; для расчета ее по методу сил потребовалось бы определить три неизвестных из трех уравнений, тогда как при расчете по ее методу деформаций требуется определить только одно неизвестное. Такой благоприятный результат в расчете получился благодаря тому, что единственный могущий поворачиваться узел 2 рамы закреплен против линейных смещений. Простая рама, показанная на черт. 254, также трижды статически неопределимая, получит деформацию под действием силы P , сопровождающуюся поворотом двух узлов 1 и 2 на углы φ_1 и φ_2 и горизонтальным смещением тех же узлов на величину Δ . Для определения этих



Черт. 254.



Черт. 255.

неизвестных деформаций потребуется решение трех уравнений, т. е. столько же, сколько и при расчете по методу сил. Но если рама будет иметь два пролета, то под действием той же силы P (черт. 255) она получит деформацию, в которой будут неизвестны углы поворота трех узлов и одно линейное смещение, общее для всех трех узлов. Для расчета такой рамы по методу деформаций потребуется решить четыре уравнения, тогда как она шесть раз статически неопределима.

Отсюда мы должны сделать вывод, что метод деформаций делает возможным производить расчет некоторых рам с введением меньшего числа неизвестных, чем при расчете их по методу сил.

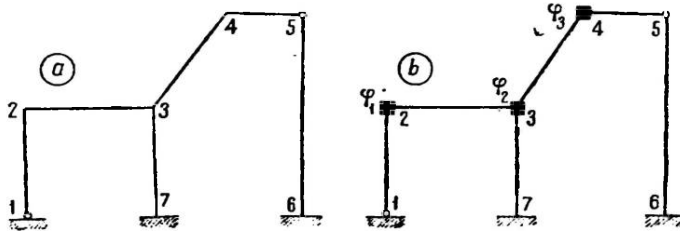
Деформация в рамах зависит от моментов, продольных и поперечных сил, но влияние последних на величину деформаций мало по сравнению с влиянием моментов, поэтому в обычных расчетах рам по методу деформаций пренебрегают учетом влияния продольных и поперечных сил на величины деформаций.

§ 61. ОСНОВНАЯ СИСТЕМА И УСТАНОВЛЕНИЕ ЧИСЛА НЕИЗВЕСТНЫХ

В расчетах по методу деформаций узлы заданной рамы закрепляются против возможных поворотов и линейных смещений, т. е. в раму вводятся новые связи, приводящие ее стержни к виду балок, заделанных концами. Таким образом за основную систему принимается схема заданной рамы с расчленением ее путем введения дополнительных связей на балки или заделанные обоими концами, или заделанные одним концом и свободно опертые на другом. Последний вид балок используется в тех случаях, когда в заданной раме имеются шарнирно опертые стержни; например в раме, показанной на черт. 256, стержни 1—2, 4—5 и 5—6.

За неизвестные в расчете рам по методу деформаций принимаются перемещения, которые имели бы место в узлах рамы под действием заданной нагрузки, если бы не были введены дополнительные связи, а именно: 1) углы поворотов всех жестких (не шарнирных) узлов и 2) линейные смещения узлов.

Число поворотов, которые надо принять за неизвестные при расчете рамы по методу деформаций, легко устанавливается по схеме рамы. Например в рамной системе, показанной на черт. 256, имеется три жестких узла 2, 3, 4, кото-

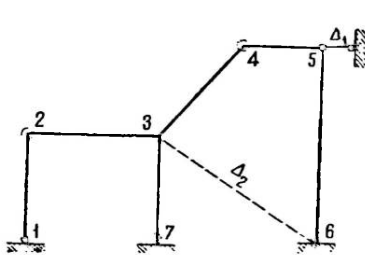


Черт. 256.

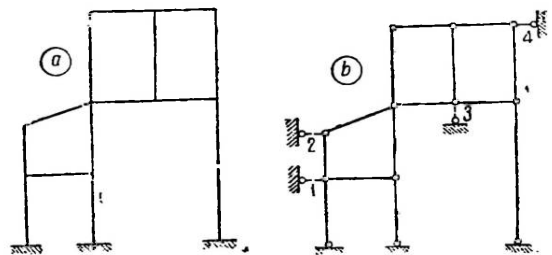
рые могут иметь повороты на некоторые неизвестные углы φ_2 , φ_3 и φ_4 . Принимая для расчета эти узлы закрепленными, мы разобьем раму на балки 2—3, 3—4, 3—7 с заделанными концами и балки 2—1, 6—5 и 4—5 с одним заделанным и другим свободным концами.

Что касается числа линейных смещений, которые должны быть приняты за неизвестные при расчете рамы, то оно проще всего определяется следующим приемом.

Вводятся шарниры во все промежуточные и опорные узлы рамы, где шарниров нет, и таким образом создается шарнирная цепь, которая сама по себе изменяема (черт. 257). Затем определяют, сколько надо добавить в эту цепь



Черт. 257.



Черт. 258.

связей, чтобы она стала неизменяемой. Этим числом недостающих связей устанавливается число неизвестных линейных смещений, которое имеет рассматриваемая рама. Неизменяемость цепи проверяется приемами, которыми пользуются при проверке образования ферм.

Это может быть сделано аналитически по формуле:

$$x = 2m - k, \quad (169)$$

где x — число недостающих стержней; m — число шарниров в цепи, не считая опорных; k — число стержней в раме.

Например в раме, показанной на черт. 256, недостает двух связей:

$$x = 2 \cdot 4 - 6 = 2.$$

Число недостающих связей легко устанавливается также путем изучения геометрии шарнирной схемы, так как известно, что для неизменяемости схемы

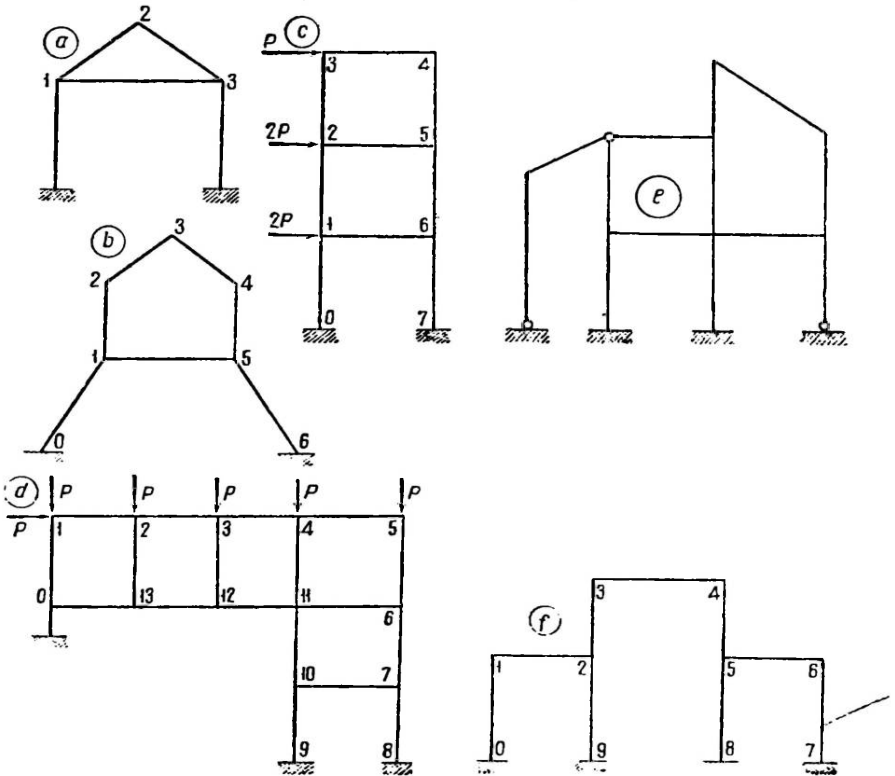
требуется, чтобы каждый шарнир был присоединен двумя стержнями к неизменяемой части.

Например неизменяемость шарнирной цепи, показанной на черт. 257, обеспечивается постановкой двух дополнительных стержней Δ_1 и Δ_2 ; постановкой их образуется неизменяемое закрепление шарниров 3 и 5 к земле, а затем — шарниров 2 и 4. Связи, требующиеся для закрепления против смещений, должны размещаться так, чтобы воображаемая шарнирная система была неизменяема. Например в системе, показанной на черт. 258, *a*, требуются 4 связи ($2 \cdot 9 - 14$). Расположение их, обеспечивающее неизменяемость системы, показано на черт. 258, *b*.

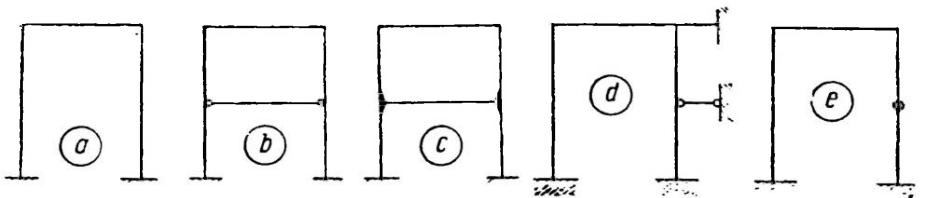
Задачи и упражнения

56. Установить число неизвестных связей угловых и линейных, которые надо ввести в схемы, показанные на черт. 259, для расчета их методом деформаций.

Показать, как должны быть расположены связи, не допускающие линейных смещений.



Черт. 259.



Черт. 260.

Параллельно сопоставить получаемое число неизвестных при расчете по методу деформаций с числом неизвестных при расчете по методу сил.

57. На черт. 260 показана рама, схема которой изменяется путем внесения в нее новых связей (черт. 260, *b, c, d*). Показать число дополнительных связей, которые должны вводиться в каждую из указанных схем при расчете их по методу деформаций.

§ 62. СОСТАВЛЕНИЕ КАНОНИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1. **Условные обозначения.** Для определения неизвестных, вводимых в расчет рам методом деформаций, составляются уравнения.

Условимся обозначать:

1) Деформации (углы поворотов и их линейные смещения), принимаемые за неизвестные, через буквы Z с порядковыми номерами:

$$Z_1, Z_2, \dots, Z_n.$$

2) Реактивные моменты и силы, возникающие по концам стержней в дополнительных связях под действием поворота или линейного смещения узлов на величину $\bar{Z}_m = 1$, через буквы r_{km} с двумя значками; первый из них определяет собой место реактивного момента или реактивной силы, а второй — место деформации, которая вызывает эту реакцию.

При таких обозначениях реактивные моменты или силы, возникающие в дополнительной связи у узла k под действием деформации Z_m , принятой за неизвестное, напишутся так:

$$r_{km} Z_m.$$

3) Реактивные моменты или силы, возникающие в дополнительных связях у узла k под действием нагрузки, через букву R_{kp} с двумя значками; первый из них обозначает место рассматриваемой реакции (момента, силы), второй — вид внешнего воздействия: нагрузку p , температуру t° и т. п.

2. **Составление канонических уравнений по условиям равновесия.** Основная система, получаемая из заданной путем введения дополнительных связей, рассматривается под одновременным действием внешних нагрузок, углов поворотов и линейных смещений подвижных узлов. При этих условиях основная система, очевидно, работает как заданная, находящаяся в равновесии без дополнительных связей, поэтому реактивные моменты и силы во всех дополнительных связях, введенных в основную систему, должны быть равны нулю.

На основании этого можно для каждого промежуточного нес шарнирного угла рамы составить уравнение вида:

$$Z_1 r_{k1} + Z_2 r_{k2} + \dots + Z_n r_{kn} + R_{kp} = 0.$$

Оно показывает, что сумма моментов по направлению дополнительной связи у узла k , равна нулю.

Аналогичным образом можно написать, что сумма сил по направлению дополнительной линейной связи m равна нулю:

$$Z_1 r_{m1} + Z_2 r_{m2} + \dots + Z_n r_{mn} + R_{mp} = 0.$$

Таких уравнений канонического вида можно составить столько, сколько будет введено в систему дополнительных связей, препятствующих повороту или линейному смещению узлов. Все они составят систему канонических уравнений упругого равновесия:

$$\left. \begin{aligned} Z_1 r_{11} + Z_2 r_{12} + Z_3 r_{13} + \dots + Z_n r_{1n} + R_{1p} + R_{1t} &= 0, \\ Z_1 r_{21} + Z_2 r_{22} + Z_3 r_{23} + \dots + Z_n r_{2n} + R_{2p} + R_{2t} &= 0, \\ \dots & \dots \\ Z_1 r_{n1} + Z_2 r_{n2} + Z_3 r_{n3} + \dots + Z_n r_{nn} + R_{np} + R_{nt} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (170)$$

3. **Коэффициенты при неизвестных.** Коэффициенты при неизвестных, входящие в уравнения (170), представляют собой реактивные моменты или силы, возникающие под действием на статически неопределимую балку перемещения,

равного единице ($\bar{Z} = 1$). Величины их могут быть определены из рассмотрения возможной работы балок под действием изучаемого перемещения.

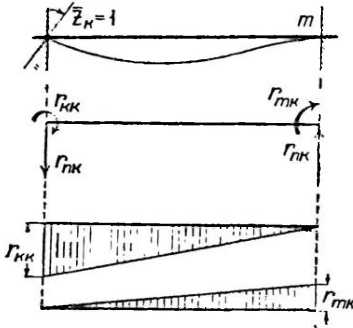
Предположим, что требуется определить величины реактивных конечных моментов, возникающих при повороте одного из концов балки, заделанной обоими концами (черт. 261) на угол $\bar{Z}_k = 1$. Под действием этого поворота на концах балки возникнут реактивные моменты r_{kk} , r_{mk} .

В балках, свободно лежащих на опорах, момент M_a , приложенный к концу А балки, вызывает углы поворота:

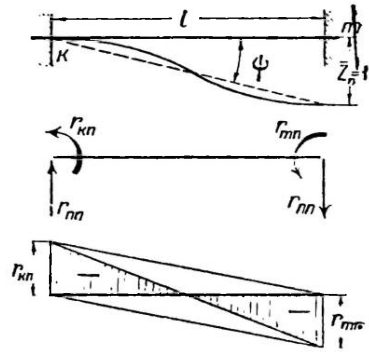
$$\varphi_a = \frac{M_a l}{3EJ}; \quad \varphi_b = -\frac{M_a l}{6EJ}. \quad (171)$$

Зная это, можно составить два уравнения по заданному условию поворота одного конца балки на угол $\bar{Z}_k = 1$:

$$\begin{aligned} \bar{Z}_k = 1 &= \frac{1}{3} r_{kk} \frac{l}{EJ} - \frac{1}{6} r_{mk} \frac{l}{EJ}, \\ Z_m = 0 &= \frac{1}{3} r_{km} \frac{l}{EJ} - \frac{1}{6} r_{kk} \frac{l}{EJ}. \end{aligned} \quad (172)$$



Черт. 261.



Черт. 262.

Из совместного решения этих уравнений получаем:

$$r_{kk} = \frac{4EJ}{l} \kappa z c m; \quad r_{mk} = \frac{2EJ}{l} \kappa z c m. \quad (173)$$

Реактивные силы по концам балок должны уравновешивать эти моменты; из этого условия определяется их величина:

$$r_{nk} = \frac{1}{l} (r_{kk} + r_{mk}) = \frac{6EJ}{l^2} \kappa z. \quad (174)$$

Если конец стержня m шарнирный, то $r_{mk} = 0$, и из первого уравнения (172) получаем:

$$r_{kk} = \frac{3EJ}{l} \kappa z c m. \quad (173')$$

Соответственно

$$r_{nk} = -\frac{3EJ}{l^2} \kappa z. \quad (174')$$

Аналогичным путем можно определить реактивные конечные моменты и силы, возникающие, когда один конец стержня, заделанного по концам, получает линейное смещение $\bar{Z}_n = 1$ см, перпендикулярное к оси стержня (черт. 262). В этом случае угол ψ поворота оси стержня на обоих концах одинаков:

$$\psi = \frac{\bar{Z}_n}{l} = \frac{1}{l}, \quad (175)$$

и реактивные моменты r_{kn} и r_{mn} равны по величине, поэтому выражение возможной работы напишется так:

$$1 \cdot \frac{1}{l} = \frac{1}{2} r_{kn} l \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3} \right) \frac{1}{EJ}$$

Отсюда

$$r_{kn} = \frac{6EJ}{l^2} \text{ кгсм.} \quad (176)$$

Реактивные силы должны уравновешивать эти моменты:

$$r_{nn} = \frac{12EJ}{l^3} \text{ кг.} \quad (177)$$

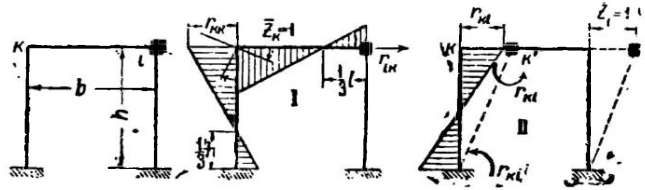
В случае, когда на конце m стержня имеется шарнир $r_{mn} = 0$, тогда

$$r_{kn} = \frac{3EJ}{l^2} \text{ кгсм} \quad (176')$$

и

$$r_{nn} = \frac{3EJ}{l^3} \text{ кг.} \quad (177')$$

В табл. 49 даны реактивные моменты и силы, возникающие в дополнительных связях от единичных поворотов и смещений узлов.



Черт. 263.

В целях упрощения написания удобно ввести обозначение величины погонной жесткости через букву i :

$$i = \frac{EJ}{l} \quad (178)$$

Это обозначение принято в последующем изложении.

Коэффициенты r в канонических уравнениях (174)—(177) обладают свойством взаимности аналогично коэффициентам при неизвестных в уравнениях по методу сил:

$$r_{kn} = r_{nk} \quad (179)$$

Эта зависимость доказывается при помощи теоремы о взаимности работ.

Предположим, что мы имеем раму (черт. 263), обладающую двумя условиями подвижности: поворотом одного узла k и смещением узлов k и i . Введем две связи, лишаящие раму указанных подвижностей, и рассмотрим ее в двух состояниях.

В первом состоянии под действием угла поворота $\bar{Z}_k = 1$, вызывающего реактивный момент r_{kk} по направлению первой связи и реактивную силу r_{ik} по направлению второй связи при $Z_i = 0$.

Во втором состоянии под действием смещения $\bar{Z}_i = 1$, вызывающего реактивную силу r_{ii} по направлению второй связи и момент r_{ki} по направлению первой связи при $Z_k = 0$.

Имеем:

в первом состоянии: $\bar{Z}_k = 1; Z_i = 0; r_{kk}; r_{ik};$
 во втором состоянии: $r_{ki}; r_{ii}; Z_k = 0; \bar{Z}_i = 1.$

По условию взаимности работ получаем:

$$r_{ki} \bar{Z}_k = r_{ik} \bar{Z}_i \quad \text{или} \quad r_{ki} = r_{ik}.$$

4. Грузовые члены в канонических уравнениях. Грузовые члены R_{kp} в канонических уравнениях представляют собой опорные моменты или опорные реакции в статически неопределимых балках, находящихся под действием нагрузки. В табл. 49 приведены формулы, определяющие величины этих моментов и усилий для случаев нагрузок, встречающихся наиболее часто в расчетах.

Предположим, что требуется подсчитать в уравнении, составленном для поворота узла k , опорные моменты R_{kp} от нагрузки, показанной на черт. 264, а. По данным табл. 49 имеем:

$$R_{kp} = P_1 r \frac{1}{l} \cdot \frac{3}{4} l (2l - 3 \frac{3}{4} l) - P \frac{1}{l^2} \cdot \frac{1}{3} l \frac{4}{9} l^2 - P \frac{1}{l^2} \frac{2}{3} l \frac{1}{9} l^2 =$$

$$= -\frac{3}{16} P_1 r - \frac{2}{9} PL$$

Предположим, что требуется определить реактивную силу R_{np} по направлению введенной связи n от действия нагрузки, показанной на черт. 264, б.

Нагрузка, передающаяся на верхний ярус, полностью входит в реакцию по направлению связи n ; нагрузка, действующая на нижний ярус, должна рассматриваться как действующая на балку с двумя закрепленными концами.

Таким образом реактивная сила

$$R_{np} = - (Wl + \frac{1}{2} Wl).$$

Знак минус введен потому, что реакция направлена против хода часовой стрелки (см. ниже п. 6 — Правила знаков).

Изложенный прием вычисления грузовых членов в канонических уравнениях является наиболее простым. В случае же надобности величины опорных моментов и реакции от любой нагрузки могут быть определены по теореме о взаимности работ.

Рассмотрим статически определимую балку в двух состояниях:

В первом состоянии под действием (черт. 265, I):

опорных моментов R_{kp} и нагрузки P при углах поворота $\Delta_k = 0$ и $\Delta_m = 0$

Во втором состоянии под действием (черт. 265, II):

угла поворота $Z_k = 1$ и реактивные моменты r_{mk} и r_{mk}

На основании этих данных составляем уравнение возможной работы:

$$R_{kp} Z_k + \sum P \delta_{pk} = 0,$$

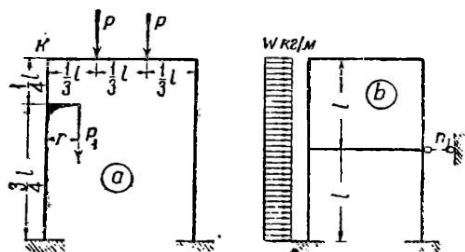
откуда

$$R_{kp} = - \sum P \delta_{pk} \quad (180)$$

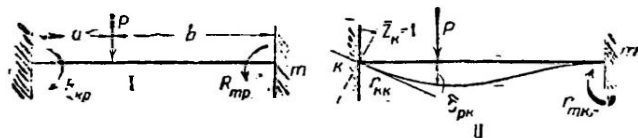
В этой формуле δ_{pk} есть перемещение по направлению силы P , вызываемое действием поворота $Z_k = 1$; оно определяется по формуле Мора:

$$R_{kp} = - \sum P \int_s \frac{\bar{M}_p \bar{M}_k}{EI} ds. \quad (180)$$

При вычислении интеграла, входящего в эту формулу, следует помнить, что момент \bar{M}_p от нагрузки относится к балке свободно опертой, момент



Черт. 264.



Черт. 265.

же \bar{M}_k от поворота сечения относится к той же балке с опорными моментами r_{ki} и r_{mk} .

Например величина опорного момента R_{kp} в балке, заделанной двумя концами и находящейся под действием сосредоточенной силы, определяется следующим выражением, получаемым из сопоставления эпюр \bar{M}_p и \bar{M}_k (черт. 266):

$$R_{kp} = -\frac{1}{EJ} \left[\frac{1}{2} Pal \frac{2EJ}{l} - \frac{1}{2} Pa^2 \left(\frac{4EJ}{l} - \frac{6EJ}{l} \frac{a}{3l} \right) \right].$$

Отсюда

$$R_{kp} = -\frac{Pab^2}{l^2}.$$

Аналогичным путем может быть определена реактивная сила R_{mp} по направлению линейного смещения узла m на величину $\bar{Z}_m = 1$. На основании теоремы о взаимности работ получим:

$$R_{mp} \bar{Z}_m = -\sum P \delta_{pm},$$

отсюда

$$R_{mp} = -\sum P \delta_{pm} \quad (181)$$

или

$$R_{mp} = -\sum P \int_s \frac{\bar{M}_p \bar{M}_m}{EJ} ds.$$

5. Взаимность величин r_{km} и δ_{mk} . Если принять в формулах (180) и (181) силу $P = 1$ и обозначить реактивный момент через r_{kp} и реактивную силу через r_{mp} , то получим:

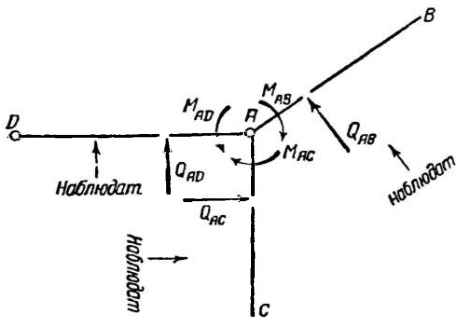
$$r_{kp} = -\delta_{pk} \quad \text{и} \quad r_{mp} = -\delta_{pm}. \quad (182)$$

Вообще если вместо силы $P = 1$ поставить силу $\bar{X}_m = 1$, то:

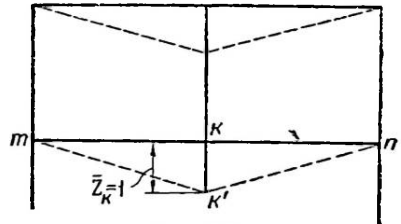
$$r_{mk} = -\delta_{km} \quad \text{и} \quad r_{mn} = -\delta_{nm}. \quad (183)$$

Полученная зависимость между реактивным моментом или силами и перемещениями аналогична условиям взаимности перемещений и взаимности реактивных моментов и сил (179).

Она устанавливает, что реакция r , вызываемая действием силы $\bar{P} = 1$ по направлению перемещения $\bar{Z} = 1$, численно равна перемещению δ по направлению силы $\bar{P} = 1$, вызываемому действием перемещения $\bar{Z} = 1$, но противоположна по знаку.



Черт. 267.





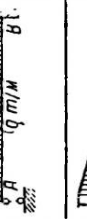


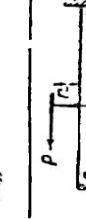


Черт. 268.

6. Правило знаков. Знаки моментов и реакций, показанные в табл. 49, отличаются от знаков, которые приписываются тем же величинам по правилам, принятым в расчетах по методу сил. Это обозначение введено в соответствии

Реактивные моменты и силы в дополнительных связях от единичных поворотов и смещений узлов и от нагрузок

| № п/п | Схема балки | Реактивный момент | | Реактивная сила | |
|-------|-------------|--------------------------------------|------------------------------------|--------------------------------------|--------------------------------------|
| | | M_{ab} | M_{ba} | A | B |
| 1 | | $\frac{2EJ}{l} = 2i$ | $\frac{4EJ}{l} = 4i$ | $-\frac{6EJ}{l^2} = -6\frac{i}{l}$ | $-\frac{6EJ}{l^2} = -6\frac{i}{l}$ |
| 2 | | $-\frac{6EJ}{l^2} = -6\frac{i}{l}$ | $-\frac{6EJ}{l^2} = -6\frac{i}{l}$ | $\frac{12EJ}{l^3} = 12\frac{i}{l^2}$ | $\frac{12EJ}{l^3} = 12\frac{i}{l^2}$ |
| 3 | | $-\frac{Px(l-x)^2}{l^2}$ | $+\frac{Px^2(l-x)}{l^2}$ | $\frac{P(l-x)^2(l+2x)}{l^3}$ | $-\frac{Px^2(3l-2x)}{l^3}$ |
| 4 | | $-\frac{l^2}{12}$ | $+\frac{l^2}{12}$ | $+\frac{l}{12}$ | $-\frac{ql}{2}$ |
| 5 | | $-\frac{l^2}{20}$ | $+\frac{l^2}{30}$ | $+\frac{7}{20}pl$ | $-\frac{3}{20}pl$ |
| 6 | | $\frac{Pb(2l-3b)}{l^2}$ | $\frac{Pa(2l-3a)}{l^2}$ | $-\frac{Pr}{l^2}$ | $-\frac{6ba}{l^2}$ |
| 7 | | $-\frac{qa^2}{12l^3}(6l^2-8la+3a^2)$ | $\frac{qa^3}{12l^3}(4l-3a)$ | $\frac{qa}{2l^2}(3l^2-3al+a^2)$ | $\frac{qa}{2l^2}(3al-a^2-l^2)$ |

| | | | | |
|----|---|-------------------------------------|---------------------------------------|--------------------------------------|
| 8 |  | $\frac{3EJ}{l} = 3H$ | $-\frac{3EJ}{l^2} = -3 \frac{l}{l}$ | $-\frac{3EJ}{l^2} = -3 \frac{l}{l}$ |
| 9 |  | $-\frac{3EJ}{l^2} = -3 \frac{l}{l}$ | $+\frac{3EJ}{l^2} = 3 \frac{l}{l^2}$ | $+\frac{3EJ}{l^2} = 3 \frac{l}{l^2}$ |
| 10 |  | $P \frac{x(l^2 - x^2)}{2l^3}$ | $P \frac{(l-x)^2(2l+x)}{2l^3}$ | $-P \frac{x(3l^2 - x^2)}{2l^3}$ |
| 11 |  | $\frac{ql^2}{8}$ | $\frac{3}{8} ql$ | $-\frac{5}{8} ql$ |
| 12 |  | $+\frac{7}{120} pl^2$ | $+\frac{11}{40} pl$ | $-\frac{9}{40} pl$ |
| 13 |  | $+\frac{1}{18} pl^2$ | $+\frac{1}{10} pl$ | $-\frac{4}{10} pl$ |
| 14 |  | $-\frac{3a^2 - l^2}{2l^2} P$ | $+Pr \frac{3(l^2 - a^2)}{2l}$ | $+Pr \frac{3(l^2 - a^2)}{2l^3}$ |
| 15 |  | $\frac{qa^2(2l^2 - a^2)}{8l^3}$ | $\frac{qa}{8l^3} (8l^2 - 6ala + a^2)$ | $\frac{qa^2}{8l^3} (6l^2 - a^2)$ |

с удобством определения их по виду поворота стержней, сходящихся в каждом узле.

1) Момент считается положительным, если он вращает отрезанный конец стержня (черт. 267) вокруг шарнирного узла по ходу часовой стрелки.

2) Поперечная сила считается положительной, если она поворачивает стержень по ходу часовой стрелки (черт. 267). Реактивная сила, действующая по направлению смещения, перпендикулярного к оси стержня, равна по величине и обратна по знаку поперечной силе в сечении стержня, отсеченного возле узла.

Согласно этому конечным моментам и реакциям стержней, сходящимся в узле A (черт. 267), должны быть приспаны следующие знаки:

$$\begin{array}{lll} \text{стержень } AB; & \text{момент } + M_{ab} & \text{реакция } - Q_{ab}; \\ AC; & + M_{ac} & - Q_{ac}; \\ AD; & - M_{ad} & + Q_{ad}. \end{array}$$

3) Направление перемещения считается положительным, если при этом перемещении ось стержня получает поворот по ходу часовой стрелки.

Например перемещение узла k (черт. 268) в положение k' будет положительным относительно узла m и отрицательным относительно узла n .

7. Составление канонических уравнений по теореме о взаимности работ. Канонические уравнения для определения неизвестных деформаций могут быть составлены также на основе теоремы о взаимности работ, для чего основная система рассматривается в двух состояниях.

В первом состоянии, общем для всех уравнений, система рассматривается под действием нагрузки P и вводимых в нее неизвестных перемещений Z_1, Z_2, \dots, Z_n . По условию равновесия сумма моментов вокруг любого вырезанного узла равна нулю и сумма усилий по направлению смещения также равна нулю.

Во втором воображаемом состоянии основная система рассматривается под действием перемещений $\bar{Z}_k = 1$, вызывающих реактивные моменты или силы r_{mk} в узлах системы.

На основе сказанного имеем следующую схему двух состояний:

1) Действительное состояние

$$Z_1, Z_2, \dots, Z_n, \quad P \cdot \sum M_k = 0.$$

2) Воображаемое состояние

$$r_{1k}, r_{2k}, \dots, r_{nk}, \quad \delta_{vk} \bar{Z}_k = 1.$$

По условию взаимности работ получаем:

$$Z_1 r_{1k} + Z_2 r_{2k} + \dots + Z_n r_{nk} - \sum P \delta_{pk} = 0.$$

Повторяя рассуждения, мы можем написать систему канонических уравнений:

$$\left. \begin{array}{l} Z_1 r_{11} + Z_2 r_{21} + Z_3 r_{31} + \dots + Z_n r_{n1} - \sum P \delta_{p1} = 0, \\ Z_1 r_{12} + Z_2 r_{22} + Z_3 r_{32} + \dots + Z_n r_{n2} - \sum P \delta_{p2} = 0, \\ \vdots \\ Z_1 r_{1n} + Z_2 r_{2n} + Z_3 r_{3n} + \dots + Z_n r_{nn} - \sum P \delta_{pn} = 0. \end{array} \right\} \quad (184)$$

Из сопоставления этих уравнений с уравнениями (170) видно, что в них коэффициенты при неизвестных различаются только расположением значков, но по условию взаимности (179)

$$r_{km} = r_{mk}.$$

Также грузовые члены в этих уравнениях различны только по написанию, величны же их одинаковы, что следует из равенств, установленных формулами (180) и (181). Таким образом разницы между уравнениями, составленными по обоим принципам, нет.

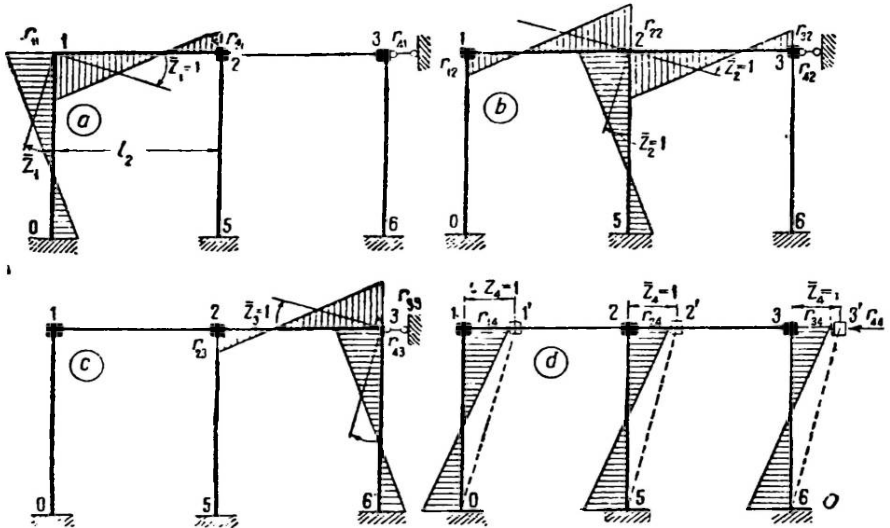
Пример 21. В целях усвоения всего изложенного выше разберем процесс составления канонических уравнений на конкретном случае рамы, показанной на черт. 269.

Эта рама имеет три узла 1, 2, 3, в которых может происходить поворот и горизонтальное смещение под действием нагрузки. Горизонтальные смещения всех узлов равны между собой. Следовательно для расчета рамы необходимо определить: три угловых поворота Z_1, Z_2, Z_3 и линейное смещение Z_4 . Вводим в раму дополнительные связи и рассматриваем узлы закрепленными против поворота и против горизонтального смещения. С введением таких связей каждый стержень рамы будет представлять собой балку, заделанную двумя концами.

Для определения коэффициентов r даем узлам последовательно единичные повороты $\bar{Z}_1 = 1, \bar{Z}_2 = 1$ и $\bar{Z}_3 = 1$, что при принятых добавочных закреплениях вызывает в раме эпюры моментов, показанные на черт. 270, а, б и с. Кроме того вводим горизонтальное смещение $\bar{Z}_4 = 1$, что сопровождается деформацией рамы, показанной на черт. 270, д.

Пользуясь данными табл. 49, получим следующие выражения для коэффициентов r . r_{11} — моменты по концам двух стержней, сходящихся в узле 1, где приложен угол поворота $\bar{Z}_1 = 1$:

$$r_{11} = 4E \frac{J_1}{h_1} + 4E \frac{J_2}{l_2} = 4(i_1 + i_2);$$



Черт. 270.

r_{12} — момент на конце 1 стержня 1—2, вызываемый поворотом узла 2 на угол $\bar{Z}_2 = 1$:

$$r_{12} = 2E \frac{J_2}{l_2} = 2i_2;$$

r_{13} — момент на конце 1 стержня 1—2, вызываемый поворотом узла 3 на угол $\bar{Z}_3 = 1$:

$$r_{13} = 0;$$

r_{14} — момент узла 1 стойки 0—1, вызываемый смещением $Z_4 = 1$:

$$r_{14} = -6E \frac{J_1}{h^3} = -6 \frac{i_1}{h}.$$

Аналогично будем иметь:

$$r_{22} = 4E \left(\frac{J_2}{l_2} + \frac{J_3}{l_3} + \frac{J_5}{h} \right) = 4(i_2 + i_3 + i_5),$$

$$r_{23} = r_{32} = 2E \frac{J_3}{l_3} = 2i_3,$$

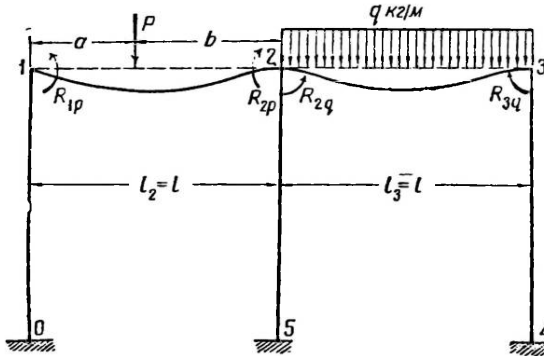
$$r_{24} = r_{42} = -6E \frac{J_5}{h^3} = -6 \frac{i_5}{h},$$

$$r_{33} = 4E \left(\frac{J_3}{l_3} + \frac{J_4}{h} \right) = 4(i_3 + i_4),$$

$$r_{34} = r_{43} = -6E \frac{J_4}{h^3} = -6 \frac{i_4}{h}.$$

Реактивная сила по направлению связи 4, вызываемая поворотом узла 1 на угол $Z_1 = 1$, равна $r_{41} = r_{14}$; также определяются величины $r_{42} = r_{24}$ и $r_{43} = r_{34}$. Реактивная сила r_{44} равна сумме реактивных сил, возникающих по концам стоек рамы под действием смещения $Z_4 = 1$:

$$r_{44} = +12E \left[\frac{J_1}{h^3} + \frac{J_5}{h^3} + \frac{J_4}{h^3} \right] = +12 \frac{1}{h^2} (i_1 + i_5 + i_4).$$



Черт. 271.

Аналогично в узле 3:

$$R_{3q} = \frac{ql^2}{12}.$$

По направлению горизонтального смещения Z_4 вертикальная нагрузка не вызывает реактивного усилия, а потому

$$R_{4p} = 0.$$

На основании полученных данных канонические уравнения напишутся так:

$$4(i_1 + i_2) Z_1 + 2i_2 Z_2 - 6 \frac{1}{h} i_1 Z_4 - P \frac{ab^2}{l^2} = 0,$$

$$2i_2 Z_1 + 4(i_2 + i_3 + i_5) Z_2 + 2i_3 Z_3 - 6 \frac{1}{h} i_5 Z_4 + P \frac{a^2 b}{l^2} - \frac{ql_3^2}{12} = 0,$$

$$2i_3 Z_3 + 4(i_3 + i_4) Z_3 - 6 \frac{1}{h} i_4 Z_4 + \frac{ql_3^3}{12} = 0,$$

$$-6 \frac{i_1}{h} Z_1 - 6 \frac{i_5}{h} Z_2 - 6 \frac{i_4}{h} Z_3 + \frac{12}{h^3} (i_1 + i_5 + i_4) Z_4 = 0.$$

Подставив в эти уравнения заданные величины жесткостей и нагрузки можно совместно решить их и определить неизвестные.

8. Некоторые обобщения. Сделанное в настоящем параграфе изложение приемов составления канонических уравнений и вычислений коэффициентов при неизвестных показало единство в основах расчетов по методу сил и методу деформаций и единство свойств коэффициентов при неизвестных. Отсюда естественным является ожидать, что и остальные свойства, установленные в расчетах по методу сил, должны распространяться на расчеты по методу деформаций.

1) Возможность обращения в нуль побочных коэффициентов при неизвестных; это должно иметь место, когда эпюры моментов, вызываемых деформациями, не перекрывают друг друга.

2) Возможность применения для решения уравнений сокращенного способа Гаусса, что следует из условия взаимности коэффициентов при неизвестных.

3) Возможность использования симметрии для расчленения канонических уравнений на две группы прямо и обратно симметричных неизвестных.

4) Возможность контроля вычисления коэффициентов по суммарной эпюре моментов \overline{M}_s , получаемой путем сложения всех единичных эпюр (§ 12). Это справедливо как для коэффициентов при неизвестных, так и для известных грузовых членов.

Например согласно формуле (180):

$$R_{1p} + R_{2p} + R_{3p} + \dots + R_{np} = -\sum \int M_p (\overline{M}_1 + \overline{M}_2 + \dots + \overline{M}_n) \frac{dx}{EJ} = -\sum \int M_p \overline{M}_s \frac{dx}{EJ}. \quad (185)$$

Однако такие проверки не имеют существенного значения в расчетах по методу деформаций, так как само вычисление коэффициентов и известных членов очень просто благодаря простоте их выражений.

Отметим наконец, что простота, с которой вычисляются коэффициенты в системах с прямыми стержнями, обеспечила методу деформаций широкое применение в расчетах рам с прямыми стержнями. В последующем изложении мы будем рассматривать рамы только этого вида.

§ 63. РАСКРЫТАЯ ФОРМА КАНОНИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Закрепление рам в узлах против поворота и смещения их, вводимое в расчетах по методу деформаций, создает обращение в нуль многих из побочных ($r_{\gamma m}$) коэффициентов при неизвестных и однотипность в написании остальных коэффициентов.

Если рассмотреть схему деформаций, получающихся в раме под влиянием поворота (черт. 272, *a*) или смещения (черт. 272, *b*) одного из ее узлов, то можно видеть, что при повороте узла *k* деформации распространяются только на стержни, сходящиеся в узле *k*, а при линейном смещении того же узла они распространяются только на стержни, примыкающие к линии смещения. Этим объясняется обращение в нуль многих побочных коэффициентов.

В связи с этим возможно составление типового уравнения для равновесия моментов в узлах и для равновесия сил при линейных смещениях. Рассмотрим составление этого уравнения для случая рам с параллельными вертикальными стойками¹.

1. Уравнение равновесия моментов при повороте узлов. Рассмотрим составление уравнения равновесия моментов в каком-либо узле *k* рамы (черт. 272, *a*), в котором сходятся стержни типа *ki*, заделанные обоими концами, и типа *km*, заделанные одним концом и имеющие шарниры на другом конце.

Поворот узла *k* на угол $\overline{Z}_k = 1$ (черт. 272, *c*) создает реактивные моменты r_{kk} на концах стержней, примыкающих к нему; поэтому коэффициент r_{kk} будет иметь следующее выражение [см. формулы (173) и (173')]:

$$r_{kk} = \sum 4i_{ki} + \sum 3i_{km}.$$

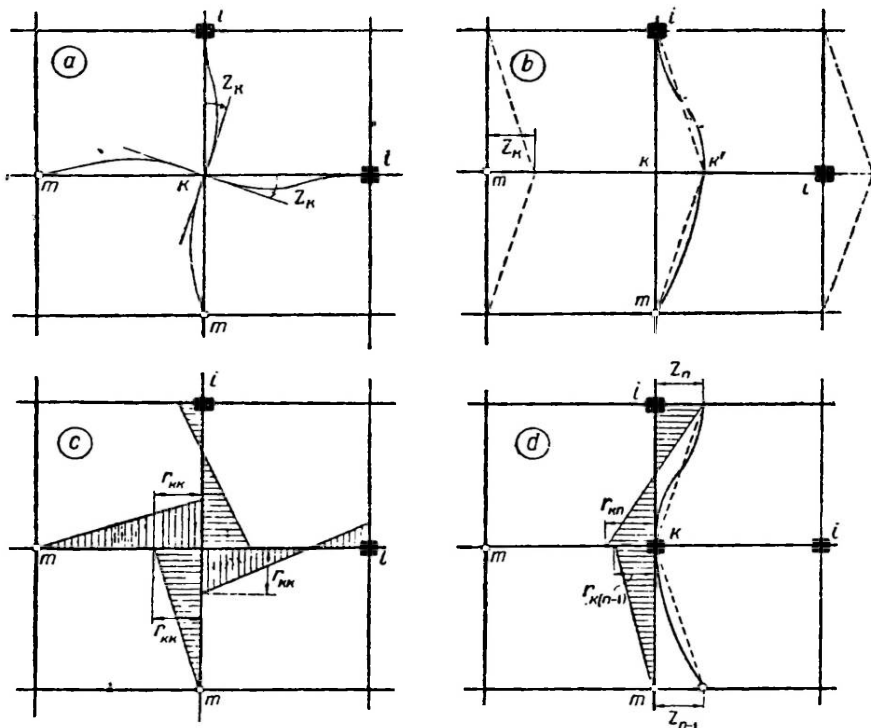
¹ Случай линейных смещений концов стержней, непараллельных между собой и наклонных к направлению смещения, рассмотрен особо в § 67.

Поворот узлов типа i вызовет на концах стержней ki у узла k моменты по формуле (173):

$$r_{ki} = \sum 2i_{ki}.$$

Поворот шарнирных узлов m не создает момента в узле k : $r_{km} = 0$.

Линейное смещение узла i на величину $\bar{Z}_n = 1$ и то же узла m на величину $\bar{Z}_{n-1} = 1$ (черт. 272, d) вызовут по концам стержней моменты, величины которых определяются значениями:



Черт. 272.

От смещения жестких узлов i (табл. 49, схема 2) $r_{ki} = -6 \frac{i_{ki}}{l_{ki}}$.

От смещения шарнирных узлов m (табл. 49, схема 9) $r_{k(n-1)} = -3 \frac{i_{km}}{l_{km}}$.

На основании сказанного уравнение равновесия моментов у узла k напишется так:

$$Z_k \left(4 \sum i_{ki} + 3 \sum i_{km} \right) + 2 \sum Z_{i_{ki}} - 6 \sum Z_n \frac{i_{ki}}{l_{ki}} - 3 \sum Z_{n-1} \frac{i_{km}}{l_{km}} + \sum M_{kip} + \sum M_{kmp} = 0. \quad (186)$$

В этом уравнении мы грузовой член R_{kp} представили в виде суммы моментов:

$$R_{kp} = \sum M_{kip} + \sum M_{kmp}, \quad (187)$$

охватывающей собой все моменты у узла k , создаваемые нагрузкой, расположенной на стержнях типа ki и km , сходящихся у узла k .

Если в узле k сходятся только стержни, закрепленные обоими концами, т. е. типа ki , то уравнение (186) упрощается:

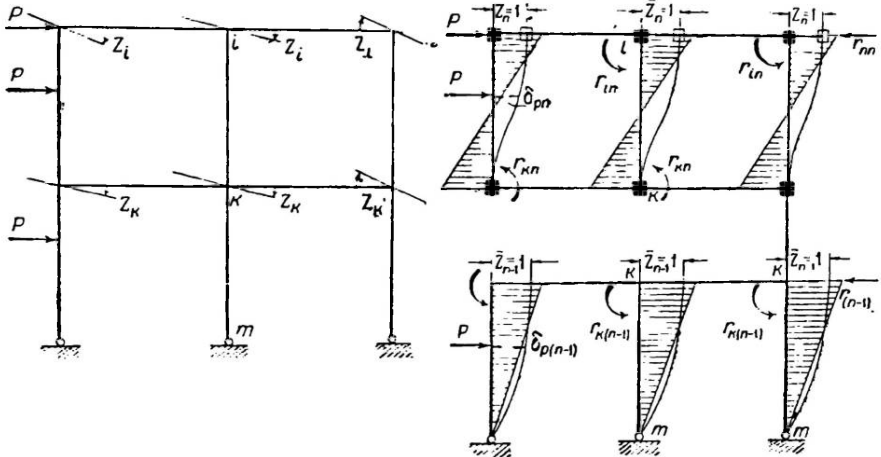
$$4Z_k \sum i_{ki} + 2 \sum Z_i i_{ki} - 6 \sum Z_n \frac{i_{ki}}{l_{ki}} + \sum M_{ksp} = 0.$$

При отсутствии смещения из него выпадает третья сумма, и оно принимает вид:

$$4Z_k \sum i_{ki} + 2 \sum Z_i i_{ki} + \sum M_{ksp} = 0. \quad (188)$$

Уравнения (186) и (188) носят название раскрытых или развернутых уравнений равновесия моментов в узлах.

2. Уравнение равновесия сил при линейном смещении узлов. В рамах, получающих линейное смещение узлов под действием нагрузок, приходится вводить дополнительные связи Z_n, Z_{n-1} и т. д. по направлению смещений и составлять дополнительные уравнения, определяющие равновесие системы по их направлениям,



Черт. 273.

а именно равенство нулю суммы реактивных сил, или, что то же, равенство нулю суммы поперечных сил в сквозном сечении рамы у узлов.

Если стойки, концы которых подвергаются смещениям, закреплены обоими концами, то реактивные силы по концам стержней определяются величинами:

а) от смещения узлов (табл. 49, схема 2) $r_{nn} = 12 \frac{i_{ki}}{l_{ki}^3}$;

б) от поворота узлов (табл. 49, схема 1): $r_{nk} = -6 \frac{i_{ki}}{l_{ki}}$.

Если стойки, концы которых подвергаются смещению, заделаны одним концом и шарнирно оперты на другом (черт. 273), то реактивные силы будут равны:

а) от смещения узла (табл. 49, схема 9): $r_{nn} = 3 \frac{i_{km}}{l_{km}^3}$

б) от поворота узла (табл. 49, схема 8): $r_{nk} = -3 \frac{i_{km}}{l_{km}}$.

Знаки показаны в предположении, что силе, вращающей стержень по ходу часовой стрелки, соответствует знак плюс. Уравнение равновесия сил по направлению смещения во втором ярусе напишется так:

$$-6 \sum Z_k \frac{i_{ki}}{l_{ki}} - 6 \sum Z_i \frac{i_{ki}}{l_{ki}} + 12 \sum Z_n \frac{i_{ki}}{l_{ki}^3} - \sum P \delta_{pn} = 0$$

или

$$6 \sum \frac{i_{ki}}{l_{ki}} \left(2 \frac{1}{l_{ki}} Z_n - Z_k - Z_i \right) - \sum P \delta_{pn} = 0. \quad (189)$$

В этом выражении Z_k и Z_i —углы поворота узлов k и i ; $\sum P\delta_{pm}$ —сумма реакций от нагрузки в дополнительной связи, введенной в систему по направлению смещения (181).

Если смещение Z_{n-1} относится к первому ярусу той же системы, в составе которого находятся стойки, заделанные обоими концами (типа ki) и свободно опертые на одном конце (типа im), то уравнение равновесия сил напишется так:

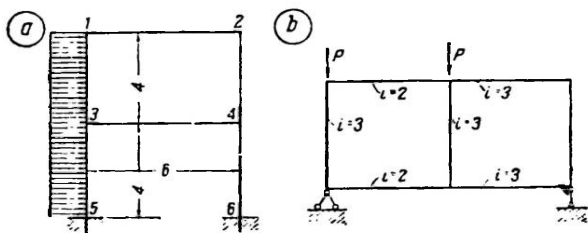
$$6 \sum \frac{i_{ki}}{i_{kt}} \left(2 \frac{1}{i_k} Z_{n-1} - Z_k \right) + 3 \sum \frac{i_{km}}{i_{km}} \left(\frac{1}{i_{km}} Z_{n-1} - Z_k \right) + \sum P\delta_p(n-1) = 0. \quad (190)$$

В это выражение не введен угол поворота в заделке опорных концов, как не имеющий места в них.

Уравнения (189) и (190) носят название раскрытых или развернутых уравнений усилий при линейных смещениях.

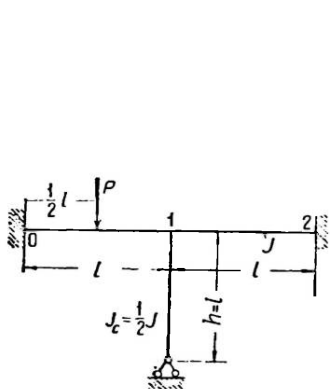
Задачи и упражнения

58. Составить в развернутом виде канонические уравнения для расчета рам, показанных на черт. 274. Свободные члены уравнений должны быть вычислены.¹

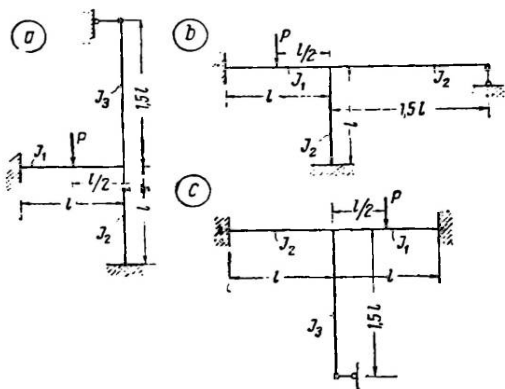


Черт. 274.

59. Определить неизвестные и построить эпюру моментов в раме, показанной на черт. 275. Рама стальная. Погонные жесткости ригеля $i_p = 2i_c$, стойки $i_c = 1$.



Черт. 275.



Черт. 276.

Моменты по концам стержней определяются суммой:

$$M_{10} = 4iZ_1 + M_{1p}$$

$$M_{21} = 2iZ_1 \text{ и т. д.}$$

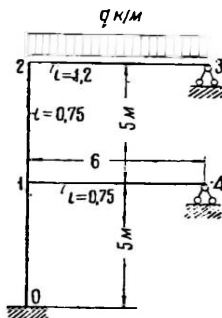
60. Показать, что эпюры моментов в одноименных стержнях рам, показанных на черт. 276, одинаковы.

¹ На черт. 274, b номера нижних узлов 1, 3, 5, верхних узлов—2, 4, 6.

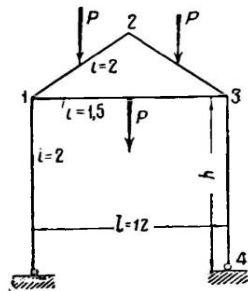
61. Построить эпюры моментов в раме, показанной на черт. 277. Погонные жесткости показаны на чертеже.

62. Определить неизвестные в раме, показанной на черт. 278. Погонные жесткости показаны на чертеже.

Указание. При решении надо обратить внимание на условия симметрии. При симметричном нагружении поворот узла, лежащего на оси симметрии, равен нулю, и нет смещения в горизонтальном направлении.



Черт. 277.



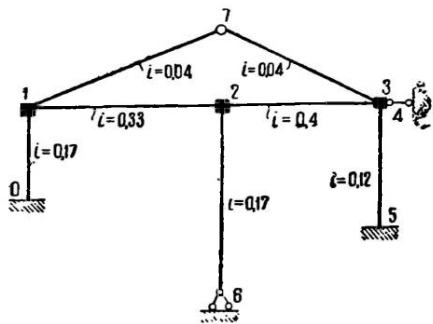
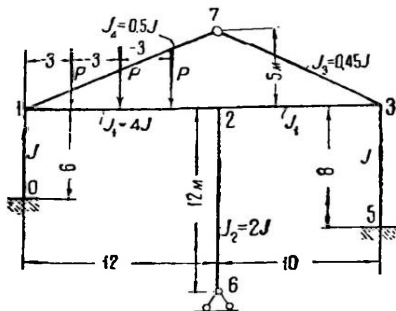
Черт. 278.

§ 64. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ СОКРАЩЕННЫМ СПОСОБОМ ГАУССА

Взаимность побочных коэффициентов ($r_{km} = r_{mk}$) при неизвестных в канонических уравнениях (171) позволяет применить для определения неизвестных сокращенный способ Гаусса, изложенный в § 51. Не повторяя здесь его сущности, даем процесс выполнения в нижеприводимом примере.

Пример 22. Определение неизвестных в раме, показанной на черт. 279.

Для расчета этой рамы методом деформаций в нее надо ввести четыре дополнительные связи: три связи Z_1, Z_2, Z_3 для закрепления против поворота узлов 1, 2, 3 и одну связь Z_4 — против линейного смещения.



Черт. 279.

Вычисляем величины коэффициентов при неизвестных, пользуясь формулами табл. 49:

$$r_{11} = 4(0,17 + 0,33) + 3 \cdot 0,04 = 2,12;$$

$$r_{12} = 2 \cdot 0,33 = 0,66;$$

$$r_{14} = -6 \frac{0,17}{6} = -0,17;$$

$$r_{22} = 4(0,33 + 0,4) + 3 \cdot 0,17 = 3,43;$$

$$r_{23} = 2 \cdot 0,4 = 0,8;$$

$$r_{24} = -3 \frac{0,17}{12} = -0,0425;$$

$$r_{33} = 4(0,4 + 0,12) + 3 \cdot 0,04 = 2,22;$$

$$r_{34} = -6 \frac{0,12}{8} = -0,09;$$

$$r_{44} = 12 \left[\frac{0,17}{6^2} + \frac{0,12}{8^2} + 3 \frac{0,17}{12^2} \right] = 0,0827.$$

Грузовые члены в тех же уравнениях определяются величинами:

$$R_{1p} = -\frac{P}{l^2} \left(\frac{1}{4} l \frac{9}{16} l^2 + \frac{1}{8} l^3 + \frac{3}{4} l \frac{1}{16} l^2 \right) \equiv 0,3125Pl = -3,75P.$$

$$R_{2p} = +3,75P.$$

Канонические уравнения:

$$\begin{aligned} 2,12Z_1 + 0,66Z_2 - 0,17Z_4 - 3,75P &= 0, \\ 0,66Z_1 + 3,43Z_2 + 0,8Z_3 - 0,0425Z_4 + 3,75P &= 0, \\ + 0,8Z_2 + 2,22Z_3 - 0,09Z_4 &= 0, \\ - 0,17Z_1 - 0,0425Z_2 - 0,09Z_3 + 0,08Z_4 &= 0. \end{aligned}$$

Составляем табл. 50 Гаусса по образцу табл. 37:

Таблица 50

Решение канонических уравнений по способу Гаусса

| № уравнений | Множители | Z_1 | Z_2 | Z_3 | Z_4 | P | Σ |
|--|---|-----------------------|-------------------------------|------------------------|---------------------------------|--------------------------------|--|
| I II I $\times\alpha_{12}$ | $\alpha_{12} = -0,3113$ | 2,12 0,66 -0,66 | 0,66 3,43 -0,2055 | 0 0,8 0 | -0,17 -0,0425 +0,0529 | -3,75 P +3,75 P 1,1675 P | -1,14 8,5975 0,3549 |
| III | | 0 | 3,2245 | 0,8 | 0,0104 | 4,9175 P | 8,9529 |
| III I $\times\alpha_{13}$ II $\times\alpha_{23}$ | $\alpha_{13} = 0$ $\alpha_{23} = -0,2481$ | 0 — | 0,8 0,8 | +2,2 0 -0,1985 | -0,09 0 -0,00258 | 0 0 -1,2200 P | 2,93 0 -2,22106 |
| III ^{II} | | | 0 | 2,02152 | -0,09258 | -1,2200 P | 0,6888 |
| IV I $\times\alpha_{14}$ II $\times\alpha_{24}$ III ^{II} $\times\alpha_{34}$ | $\alpha_{14} = 0,0802$ $\alpha_{24} = -0,0032$ $\alpha_{34} = 0,045797$ | -0,17 0,1696 0 | -0,0425 +0,0529 -0,0109 | -0,09 0 +0,09258 | +0,0827 -0,01363 -0,00004 | 0 -0,3067 P -0,0159 P | -0,2193 -0,0978 -0,0294 +0,0325 |
| IV ^{III} | | | | 0 | 0,0648 | -0,3785 P | -0,3140 |

По данным таблицы определяем неизвестные:

$$Z_4 = + \frac{0,3785}{0,0648} = 5,841 P,$$

$$Z_3 = \left[- \frac{-1,22}{2,02152} + 5,841 \cdot 0,0458 \right] P = +0,871 P,$$

$$Z_2 = \left[- \frac{4,9175}{3,2245} - 0,871 \cdot 0,248 - 5,841 \cdot 0,0032 \right] P = -1,760 P,$$

$$Z_1 = \left[- \frac{3,75}{2,12} + 1,760 \cdot 0,3113 + 5,841 \cdot 0,0802 \right] P = 2,784 P.$$

В целях проверки вычислений подставляем значения неизвестных в канонические уравнения, эта подстановка должна подтвердить равенство нулю левых частей уравнений.

Четвертое уравнение дает:

$$(-0,17 \cdot 2,784 - 0,0425 \cdot 1,76 - 0,09 \cdot 0,871 + 0,0827 \cdot 5,841) P = -0,5517 + 0,5578 = 0,0061 P;$$

расхождение около 10/10, что допустимо.

Третье уравнение дает:

$$(-0,8 \cdot 1,760 + 2,2 \cdot 0,871 - 0,09 \cdot 5,841) P = -1,933 + 1,935 \approx 0.$$

§ 65. ОКОНЧАТЕЛЬНЫЕ РАСЧЕТНЫЕ ЭПЮРЫ

После того как определены деформации, принятые за неизвестные, можно перейти к определению моментов по концам стержней и построению по ним эпюр моментов. Вычисление концевых моментов проводится раздельно для каждого стержня.

В стержнях, закрепленных обоими концами, вычисление делается по формуле (черт. 280):

$$M_{ki} = (4Z_k + 2Z_i) i_{ki} - 6 \frac{i_{ki}}{l_{ki}} Z_n - M_{kp},$$

или

$$M_{ki} = 2i_{ki} \left(2Z_k + Z_i - 3 \frac{1}{l_{ki}} Z_n \right) - M_{kp}. \quad (191)$$

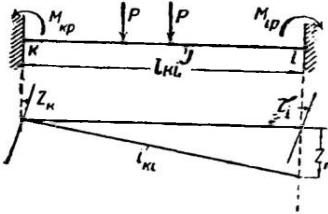
В ней учтена возможность поворота обоих концов Z_k и Z_i и относительного смещения Z_n . Величиной M_{kp} определяется опорный момент от нагрузки. Действующий против хода часовой стрелки.

Момент на правом конце:

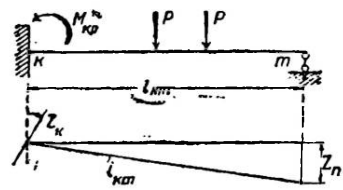
$$M_{ik} = 2i_{ki} \left(Z_k + 2Z_i - 3 \frac{1}{l_{ki}} Z_n \right) + M_{ip}. \quad (192)$$

В стержнях, закрепленных одним концом и свободных на другом (черт. 281):

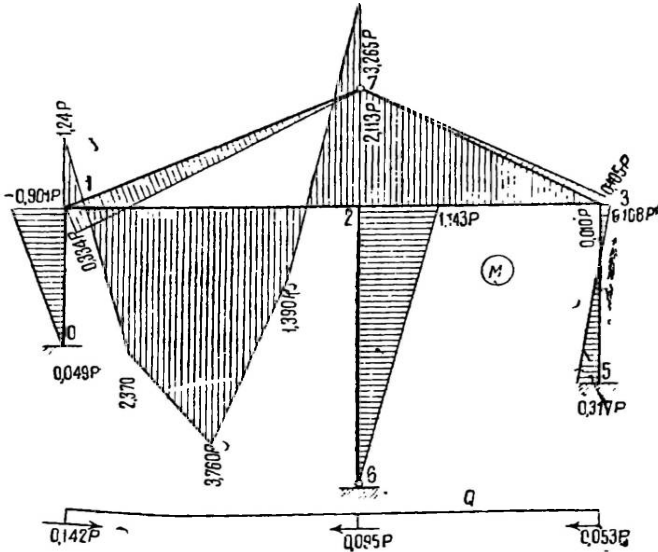
$$M_{km} = 3i_{km} \left(Z_k - \frac{1}{l_{km}} Z_n \right) - M_{kp}. \quad (193)$$



Черт. 280.



Черт. 281.



Черт. 282.

Проведем процесс вычисления по этим формулам на частном случае рамы (черт. 279), разобранный в примере 22.

Момент у опорного узла 0 рамы:

$$M_{01} = 2 \cdot 0,17 \left(2,784 - 3 \frac{1}{6} 5,841 \right) P = -0,049 P.$$

Моменты у узла 1 рамы:

$$M_{10} = 2 \cdot 0,17 \left(2 \cdot 2,784 - 3 \frac{1}{6} 5,841 \right) P = +0,901 P,$$

$$M_{19} = 2 \cdot 0,33 \left(2 \cdot 2,784 - 1,760 \right) P - 3,75 P = -1,24 P,$$

$$M_{17} = 3 \cdot 0,04 \cdot 2,784 P = 0,334 P.$$

Моменты у узла 2 рамы:

$$M_{21} = 2 \cdot 0,33 (-2 \cdot 1,760 + 2,784) P + 3,75 P = 3,265 P,$$

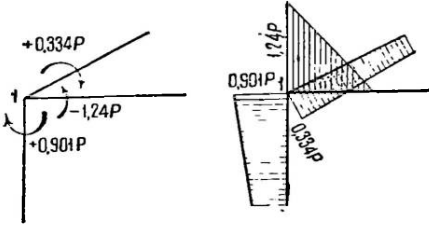
$$M_{23} = 2 \cdot 0,4 (-2 \cdot 1,760 + 0,871) P = -2,113 P,$$

$$M_{26} = 3 \cdot 0,17 \left(-1,760 - \frac{1}{12} 5,841 \right) P = -1,143 P.$$

Моменты у узла 3 рамы:

$$M_{32} = -0,010 P; \quad M_{37} = +0,105 P; \quad M_{35} = -0,108 P.$$

По этим данным строится эпюра моментов по контуру рамы (черт. 282). Ординаты откладываются со стороны растягиваемого волокна, определяемого по направлению момента, т. е. по его знаку.



Черт. 283.

На черт. 283 показан узел 1 рамы с моментами, направленными согласно их знакам, полученным по расчету; в соответствии с этими направлениями на том же чертеже показано начало построения эпюр с ординатами, отложенными со стороны растянутых волокон стержней.

Правильность вычисления и построения эпюры моментов контролируется теми же приемами, как и в расчетах методом сил.

В частности, проверка правильности эпюры моментов, показанной на черт. 282, дает следующие результаты:

- а) по условию равновесия моментов в узлах
- узел 1 $+1,24 P - 0,901 P - 0,334 P = 0,015 P,$
 2 $(-3,265 + 2,11 + 1,143) P = -0,009 P,$
 3 $(0,105 - 0,108 - 0,01) P = -0,013 P;$

б) сумма поперечных сил в сечениях стоек:

$$\sum Q = \left[\frac{0,049 - 0,901}{6} + \frac{1,143}{12} + \frac{0,108 + 0,317}{8} \right] = 0,006 P.$$

После того как определены концевые моменты по концам стержней, представляется возможным провести построение эпюры поперечных сил, используя для этого известное выражение для брусьев, заделанных обоими концами:

$$Q_a = Q^0 - \frac{M_b + M_a}{l}.$$

В нем направление обоих моментов принято положительным, т. е. по часовой стрелке; Q^0 — поперечная сила в сечении балки, свободно опертой на обоих концах.

Продольные силы в стержнях рамы определяются из рассмотрения равновесия вырезаемых узлов рамы под действием сил Q, N и опорных реакций от заданной нагрузки.

§ 66. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СИММЕТРИИ

Симметрия в системе позволяет вносить упрощения в расчеты по методу деформации, аналогичные упрощениям в расчетах по методу сил. Без доказательства можно установить следующие положения.

Симметричная нагрузка вызывает в симметричных системах симметричные деформации (черт. 284 и 285):

1) Углы поворотов узлов, расположенных симметрично, равны по величине, но обратны по направлению (черт. 284):

$$Z'_1 = -Z'_4; \quad Z'_2 = -Z'_3.$$

2) Поворот сечений и узлов, расположенных по оси симметрии, равен нулю $Z_5 = 0$ (черт. 285).

3) Отсутствуют линейные смещения узлов, перпендикулярные к оси симметрии.

Обратно симметричная нагрузка вызывает в симметричных системах обратно симметричную деформацию.

1) Углы поворотов в симметрично расположенных узлах равны по величине и имеют одинаковое направление (черт. 284):

$$Z_1'' = Z_4''; \quad Z_2'' = Z_3''.$$

2) Все стойки получают наклон в одну сторону.

Отсюда следует, что разложение нагрузки на прямо и обратно симметричную приводит к составлению двух групп канонических уравнений с прямо и обратно симметричными неизвестными.

Отметим, что наличие в симметричных рамах узлов и стоек, расположенных по оси симметрии (черт. 285), приводит к нарушению взаимности коэффициентов в уравнениях, составляемых для обратно симметричной деформации. В рамах с параллельными стойками взаимность коэффициентов восстанавливается путем введения в уравнения половинного значения коэффициентов (r) при неизвестных, расположенных по оси симметрии. Деформация как бы разбивается на две равные части.

Для пояснения рассмотрим составление уравнений в раме, показанной на черт. 285 и находящейся под действием обратно симметричного нагружения. Относительные погонные жесткости и размеры показаны на чертеже. Расчет требует определения четырех неизвестных: трех углов поворота Z_1, Z_2, Z_3 и смещения Z_4 , но так как по условию обратной симметрии $Z_1 = Z_3$, то можно ограничиться составлением трех уравнений: двух для моментов у узлов 1 и 2 и одного для усилия в связи 4:

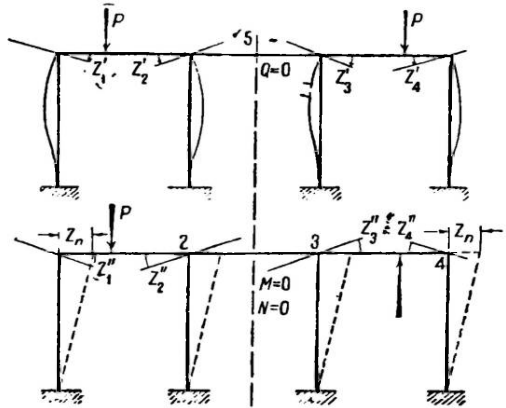
$$\begin{aligned} 4(4+3)Z_1 + 2 \cdot 4 \cdot Z_2 - 6 \frac{3}{h} Z_4 - R_{1p} &= 0, \\ 2 \cdot 4(Z_1 + Z_3) + 4(4+4+2)Z_2 - 6 \frac{2}{h} Z_4 + 2R_{2p} &= 0, \\ -6 \frac{3}{h}(Z_1 + Z_3) - 6 \frac{2}{h} Z_2 + 12 \frac{1}{h^2}(3+2+3)Z_4 &= 0. \end{aligned}$$

Взаимность коэффициентов в этих уравнениях явно нарушена. Но если учесть что $Z_1 = Z_3$, и разделить второе и третье на два, то взаимность восстановится

$$\begin{aligned} 28Z_1 + 8Z_2 - 18 \frac{1}{h} Z_4 - R_{1p} &= 0, \\ 8Z_1 + 20Z_2 - 6 \frac{1}{h} Z_4 + R_{2p} &= 0, \\ -18 \frac{1}{h} Z_1 - 6 \frac{1}{h} Z_2 + 48 \frac{1}{h^2} Z_4 &= 0. \end{aligned}$$

Такое расчленение на две части деформаций, расположенных на оси симметрии, не всегда возможно в рамах с непараллельными стойками.

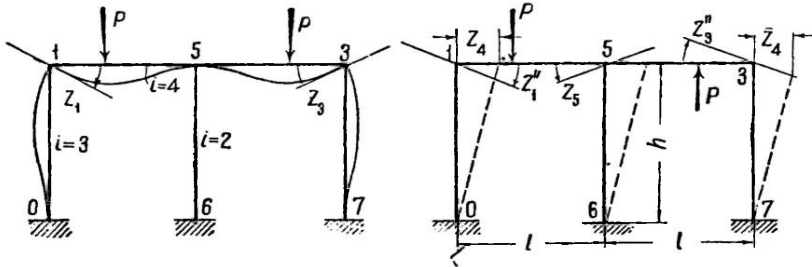
Окончательные значения неизвестных определяются сложением значений, полученных из расчета по обоим видам нагружения.



Черт. 284.

Процесс расчета на прямо и обратно симметричную нагрузку дан в примере 23.

Разложение нагрузки на прямо и обратно симметричную может быть заменено разложением неизвестных на парные прямо и обратно симметричные аналогично тому, как это делалось в расчетах методом сил (§ 47). Такое разложение целесообразно применять в расчетах рам, не имеющих линейных смещений; оно приводит к распаденению канонических уравнений на две группы с прямо и обратно симметричными неизвестными.

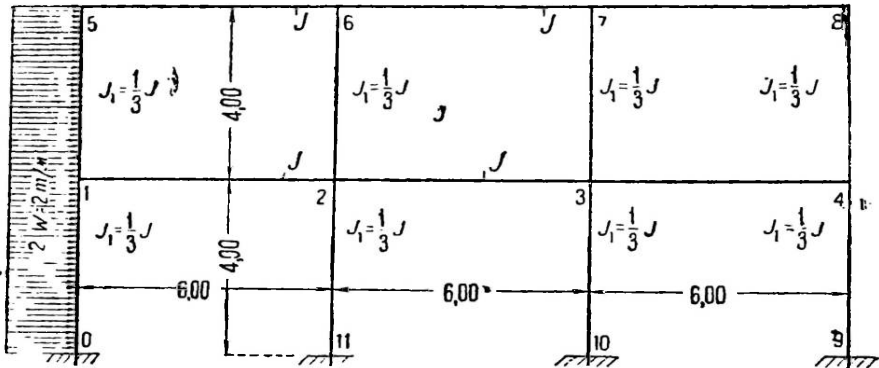


Черт. 285.

Пример 23. Рассмотрим расчет симметричной двухъярусной рамы, показанной на черт. 286.

Для расчета этой системы методом деформаций без расчленения нагрузки на прямо и обратно симметричную (черт. 287) потребуется составить 10 уравнений. Для упрощения работы целесообразно разделить нагрузку на прямо и обратно симметричную.

Симметричная нагрузка. При симметричной нагрузке (черт. 288) горизонтальные смещения $Z_9 = Z_{10} = 0$ и углы поворотов $Z_1' = -Z_4'$, $Z_5' = -Z_8'$ и т. д.



Черт. 286.

Следовательно при нагрузке этого вида потребуется составить четыре уравнения для определения угловых деформаций Z_1' , Z_5' , Z_2' и Z_6' .

По заданию (черт. 286) погонная жесткость:
для всех стоек

$$i_n = \frac{1}{3} \frac{EJ}{4} = \frac{1}{12} EJ,$$

для всех ригелей

$$i_v = \frac{EJ}{6} = \frac{1}{6} EJ.$$

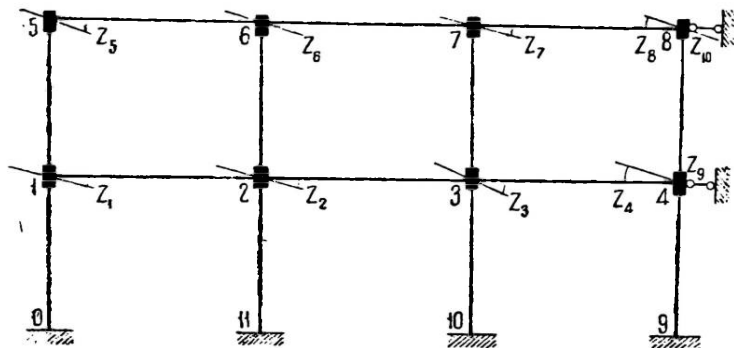
Составляем канонические уравнения [формулы (186) и (189)]:

$$4EJ \left(2 \frac{1}{12} + \frac{1}{6} \right) Z_1' + 2EJ \frac{1}{6} Z_2' + 2EJ \frac{1}{12} Z_5' = W \frac{4^2}{12} - W \frac{4^2}{12}.$$

$$2EJ \frac{1}{6} Z_1' + 4EJ \left(2 \frac{1}{6} + 2 \frac{1}{12} \right) Z_2' + 2EJ \frac{1}{12} Z_6' + 2EJ \frac{1}{6} Z_3' = 0,$$

$$2EJ \frac{1}{12} Z_1' + 4EJ \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{6} \right) Z_5' + 2EJ \frac{1}{6} Z_6' = -W \frac{4^2}{12},$$

$$2EJ \frac{1}{12} Z_2' + 2EJ \frac{1}{6} Z_5' + 4EJ \left(2 \frac{1}{6} + \frac{1}{12} \right) Z_6' + 2EJ \frac{1}{6} Z_7' = 0.$$



Черт. 287.

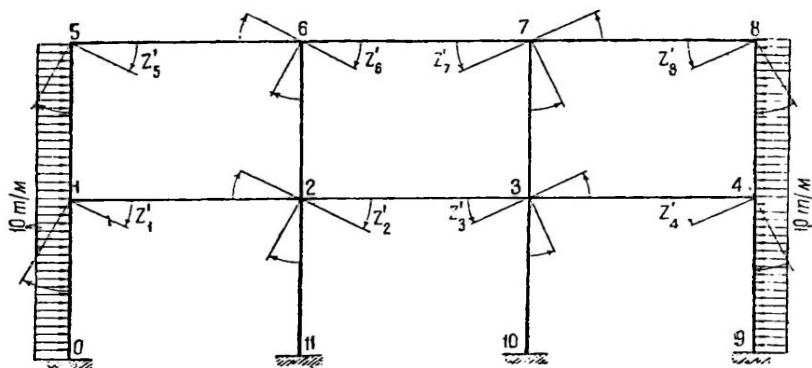
Учтя указанные выше равенства угловых деформаций и сделав приведение подобных членов, получим:

$$4Z_1' + Z_2' + \frac{1}{2} Z_6' = 0,$$

$$Z_1' + 5Z_2' + \frac{1}{2} Z_6' = 0,$$

$$\frac{1}{2} Z_1' + 3Z_5' + Z_6' = -\frac{4W'}{EJ}$$

$$\frac{1}{2} Z_2' + Z_6' + 4Z_6' = 0.$$



Черт. 288.

Решая эти уравнения путем исключения неизвестных, получим:

$$Z_2' = -0,08 \frac{W'}{EJ}; \quad Z_6' = 0,384 \frac{W'}{EJ};$$

$$Z_5' = -1,496 \frac{W'}{EJ}; \quad Z_1 = 0,207 \frac{W'}{EJ}.$$

Обратно симметричная нагрузка. При обратно симметричной нагрузке (черт. 289) имеют место горизонтальные смещения Z_9 и Z_{10} , и углы поворота в симметричных узлах равны по величине и знаку $Z_2'' = Z_3''$, $Z_6'' = Z_7''$ и т. д.

Составляем расчетные уравнения равновесия моментов в узлах:

$$4EJ \left(\frac{2}{12} + \frac{1}{6} \right) Z_1'' + 2EJ \frac{1}{6} Z_2'' + 2EJ \frac{1}{12} Z_5'' - 6EJ \frac{1}{12 \cdot 4} (Z_9 + Z_{10}) = 0,$$

$$2EJ \frac{1}{6} Z_1'' + 4EJ \left(\frac{2}{6} + \frac{2}{12} \right) Z_2'' + 2EJ \frac{1}{6} Z_3'' + 2EJ \frac{1}{12} Z_6'' - 6EJ \frac{1}{12 \cdot 4} (Z_9 + Z_{10}) = 0,$$

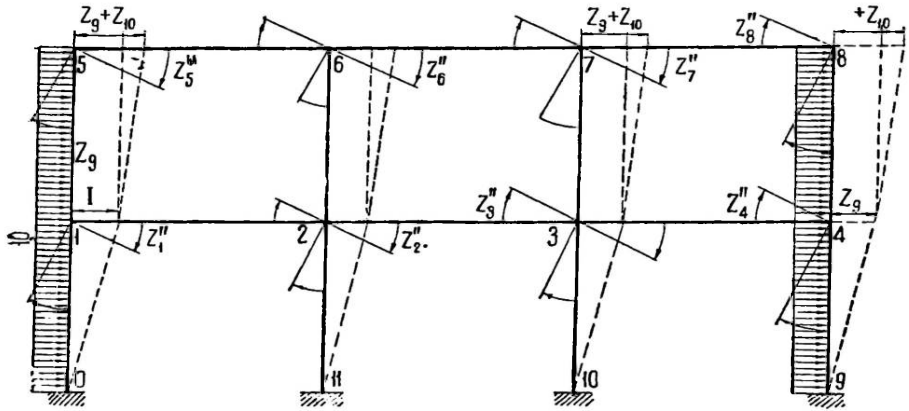
$$2EJ \frac{1}{12} Z_1'' + 4EJ \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{6} \right) Z_5'' + 2EJ \frac{1}{6} Z_6'' - 6EJ \frac{1}{12 \cdot 4} Z_{10} = -W \frac{4^2}{12},$$

$$2EJ \frac{1}{12} Z_2'' + 2EJ \frac{1}{6} Z_5'' + 4EJ \left(\frac{2}{6} + \frac{1}{12} \right) Z_6'' + 2EJ \frac{1}{6} Z_7'' - 6EJ \frac{1}{12 \cdot 4} Z_{10} = 0.$$

Кроме этих уравнений должны быть составлены еще два уравнения равновесия сил при линейных смещениях; они могут быть написаны для одной половины рамы:

$$EJ \frac{1}{12 \cdot 4} \left(2 \frac{2}{4} Z_{10} - Z_1'' - Z_5'' - Z_3'' - Z_6'' \right) - \frac{1}{6} W \frac{h}{2} = 0,$$

$$EJ \frac{1}{12 \cdot 4} \left(2 \frac{2}{4} Z_9 - Z_1'' - Z_3'' \right) - \frac{1}{6} (Wh + W \frac{h}{2}) = 0.$$



Черт. 289.

Составленные шесть уравнений представляют собой систему канонических уравнений с шестью неизвестными.

Решение проводим по схеме Гаусса. В приводимой ниже табл. 51 выписаны переходные коэффициенты α и конечные результаты по каждому уравнению.

По данным этой таблицы вычисляем неизвестные:

$$Z_1'' = \frac{185,787}{25,6222} = 7,25 \frac{W}{EJ},$$

$$Z_2'' = \left(\frac{192,5569}{49,5046} - 0,0158 \cdot 7,25 \right) \frac{W}{EJ} = 3,558 \frac{W}{EJ}$$

$$Z_5'' = \left[\frac{10,6667}{20,4445} + 0,1521 \cdot 3,558 - 0,0652 \cdot 7,25 \right] \frac{W}{EJ} = 0,590 \frac{W}{EJ},$$

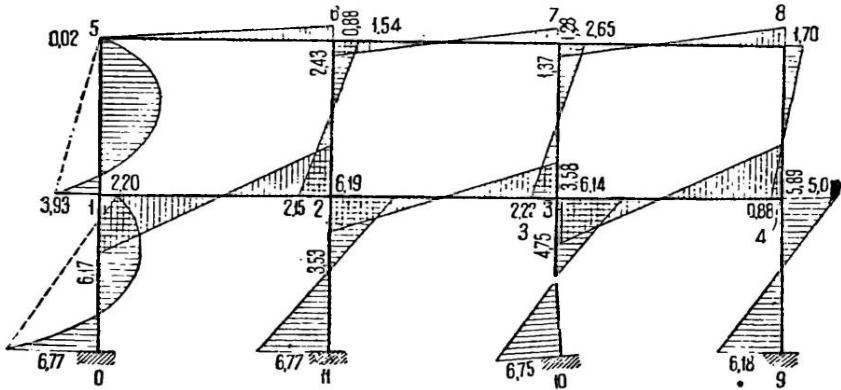
$$Z_6'' = \left[\frac{48}{45} - 0,111 \cdot 0,590 - 0,0222 \cdot 3,558 - 0,066 \cdot 7,25 \right] \frac{W}{EJ} = 1,40 \frac{W}{EJ},$$

$$Z_9 = \left[\frac{48}{3} + 1 \cdot 1,40 + 1 \cdot 0,590 + 1 \cdot 3,558 - 1 \cdot 7,25 \right] \frac{W}{EJ} = 28,8 \frac{W}{EJ},$$

$$Z_{10} = \left[\frac{144}{3} + 1 \cdot 3,558 + 1 \cdot 7,25 \right] \frac{W}{EJ} = 58,8 \frac{W}{EJ}.$$

Решение канонических уравнений примера 23 по способу Гаусса

| № неиз- вест- ных X | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | ΣW |
|---------------------------|----------|-------|-------------------|------------------------------|-------------------------|-------------------------|------------|
| № урав- нений | Z_{10} | Z_9 | Z_6'' | Z_5'' | Z_2'' | Z_1'' | |
| I | 3 | 0 | 0 | 0 | -3 | -3 | 144 |
| α_{1k} II | - | 0 | 0 | 0 | $\alpha_{26} = 1$ | $\alpha_{26} = 1$ | |
| | 0 | 3 | -3 | -3 | -3 | -3 | |
| II ^I | - | 3 | -3 | -3 | -3 | -3 | 48 |
| α_{2k} III | - | - | $\alpha_{23} = 1$ | $\alpha_{24} = 1$ | $\alpha_{25} = 1$ | $\alpha_{26} = 1$ | 0 |
| | - | -3 | 48 | 8 | 4 | 0 | |
| III ^{II} | - | - | 45 | 5 | 1 | -3 | +48 |
| α_{3k} IV | - | - | - | $\alpha_{34} = -\frac{1}{y}$ | $\alpha_{35} = -0,0222$ | $\alpha_{36} = 0,0666$ | |
| | -3 | 0 | 8 | 24 | | 4 | -32 |
| IV ^{III} | - | - | - | 20,4445 | -3,1111 | +1,3333 | 10,6667 |
| α_{4k} V | - | - | - | 0 | $\alpha_{46} = 0,1521$ | $\alpha_{45} = -0,0652$ | 0 |
| | -3 | -3 | 4 | | 56 | 8 | |
| V ^{IV} | - | - | - | - | 49,5046 | 2,2694 | 192,557 |
| α_{5k} VI | - | - | - | - | - | $\alpha_{56} = -0,0458$ | 0 |
| | -3 | -3 | 0 | 4 | 8 | 32 | |
| VI | - | - | - | - | - | 25,6222 | 185,787 |



Черт. 290.

Окончательные значения неизвестных узлов поворотов получим сложив их величины, определенные при действии прямо и обратно симметричной нагрузки:

$$Z_1 = (0,21 + 7,25) \frac{W}{EJ} = 7,46 \frac{W}{EJ}; \quad Z_4 = (-0,21 + 7,25) \frac{W}{EJ} = 7,04 \frac{W}{EJ};$$

$$Z_2 = (-0,08 + 3,56) \frac{W}{EJ} = 3,48 \frac{W}{EJ}; \quad Z_3 = (+0,08 + 3,56) \frac{W}{EJ} = 3,64 \frac{W}{EJ};$$

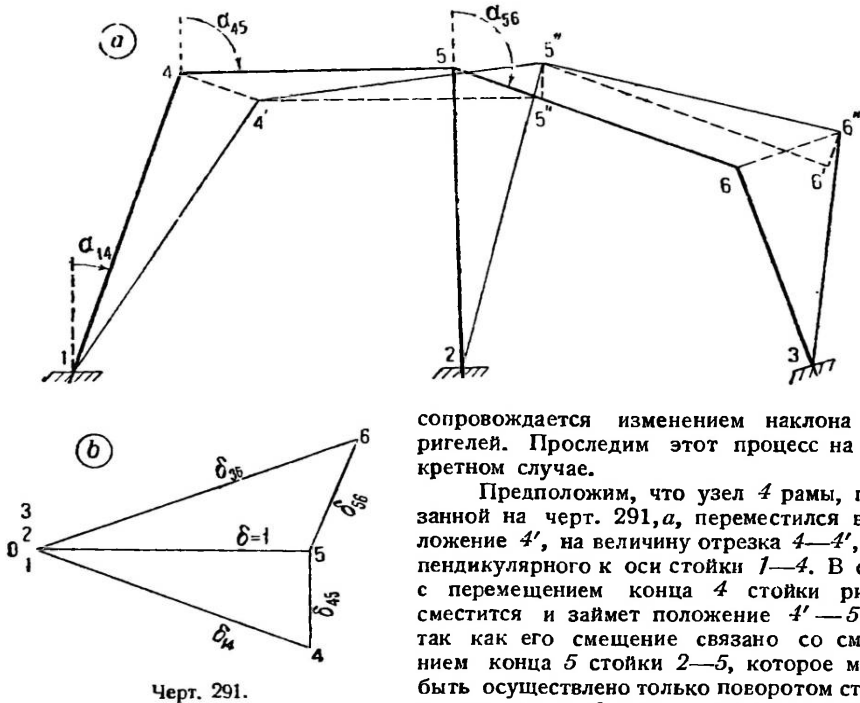
$$Z_6 = (-1,496 + 0,59) \frac{W}{EJ} = -0,90 \frac{W}{EJ}; \quad Z_8 = (1,496 + 0,59) \frac{W}{EJ} = 2,08 \frac{W}{EJ};$$

$$Z_6 = (0,384 + 1,40) \frac{W}{EJ} = 1,78 \frac{W}{EJ}; \quad Z_7 = (-0,384 + 1,40) \frac{W}{EJ} = 1,02 \frac{W}{EJ}.$$

На черт. 290 построена эпюра моментов, вычисленная по этим значениям неизвестных.

§ 67. ОСОБЕННОСТИ В СОСТАВЛЕНИИ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ РАСЧЕТА РАМ С НЕПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ СТОЙКАМИ

1. Зависимость между линейными смещениями. Все предыдущие выводы делались для рам с параллельными стойками; в таких рамах линейные смещения узлов стоек одинаковы, и изменение наклона осей стоек не вызывает перекоса оси ригеля. Иначе обстоит дело в рамах с непараллельными стойками (черт. 291, *a*); в них изменение наклона осей стоек, вызываемое смещением основной системы,



сопровождается изменением наклона осей ригелей. Проследим этот процесс на конкретном случае.

Предположим, что узел *4* рамы, показанной на черт. 291, *a*, переместился в положение *4'*, на величину отрезка *4—4'*, перпендикулярного к оси стойки *1—4*. В связи с перемещением конца *4* стойки ригель сместится и займет положение *4'—5'*, но так как его смещение связано со смещением конца *5* стойки *2—5*, которое может быть осуществлено только поворотом стойки вокруг точки *2*, то ригель должен будет

повернуться еще вокруг точки *4'*, описав дугу *5'—5''* до пересечения с дугой *5—5''*, образуемой поворотом оси стойки. Аналогичным путем может быть получено новое положение точки *6''*. Из приведенного построения видно, что смещения δ концов всех стержней различны, но все они связаны между собой схемой рамы и могут быть определены графически или аналитически из рассмотрения шарнирной схемы рамы как механизма.

Графическое определение смещений целесообразно проводить построением диаграммы перемещений.

От произвольно взятой точки *O* (черт. 291, *b*) в произвольном масштабе откладывается отрезок $\delta = 1$, представляющий собой горизонтальную проекцию смещения одного из узлов рамы, например узла *4*. Пересечением прямой *1—4*, проводимой перпендикулярно к оси стойки *1—4*, и прямой *5—4*, проводимой перпендикулярно к оси ригеля, определяется отрезок δ_{14} , представляющий собой перемещение конца *4* стойки от поворота ее вокруг нижнего конца *1*, вызываемого смещением $\delta = 1$. Отрезком δ_{45} определяется вертикальное смещение конца *4* ригеля.

То же смещение $\delta = 1$ вызовет смещение конца *5* стойки *2—5* на величину $\delta_{25} = 1$. Прямая *5—5''* нормальна к оси стойки, поэтому конец *5* ригеля *4—5* остается на первоначальном уровне.

Положение узла *6* на диаграмме определится проведением прямой *3—6*,

перпендикулярной к оси стойки 3—6, и прямой 5—6, перпендикулярной к оси ригеля 5—6.

Отношениями $\frac{\delta}{l} = \psi$, где l — длина стержня, определяются углы ψ поворота осей стержней, вызываемые перемещениями концов и измеряемые относительно первоначального положения оси.

Перемещениям δ приписываются знаки в соответствии с направлением поворота оси стержня: по ходу часовой стрелки (+) и против ее хода (—). Например в построенной диаграмме перемещение δ_{14} положительно, перемещение δ_{46} отрицательно.

Величины перемещений δ определяются или измерением по диаграмме или вычислением по углам, образуемым сторонами диаграммы. Эти углы всегда известны из схемы рамы, так как стороны диаграммы перпендикулярны к осям стержней рамы.

Сравнительно просто проводится вычисление перемещений δ в рамах с наклонными стойками и горизонтальными ригелями. Например, если принять что узел 1 рамы, показанной на черт. 292, сместился по горизонтали на величину $\delta_1 = 1$, то смещение конца 1 стойки 0—1 определится величиной:

$$\delta_{01} = \frac{\delta_1}{\cos \alpha_{01}};$$

смещение конца 1 ригеля 1—4 определится величиной:

$$\delta_{14} = -\delta_1 \operatorname{tg} \alpha_{01}$$

и т. д.

Если принять, что узел 2 во втором ярусе сместился на величину $\delta_2 = 1$, отложенную на диаграмме по направлению 0—4—3, то

а) смещение конца 2 стойки 1—2 определится величиной:

$$\delta_{12} = \frac{\delta_2}{\cos \alpha_{12}};$$

б) смещение конца 2 ригеля 2—6 определится величиной:

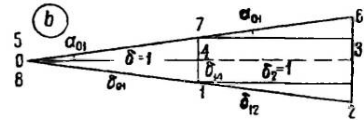
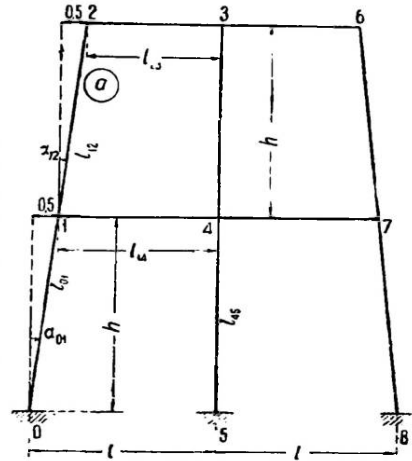
$$\delta_{26} = -(\delta_{14} + \delta_2 \operatorname{tg} \alpha_{12})$$

и т. д.

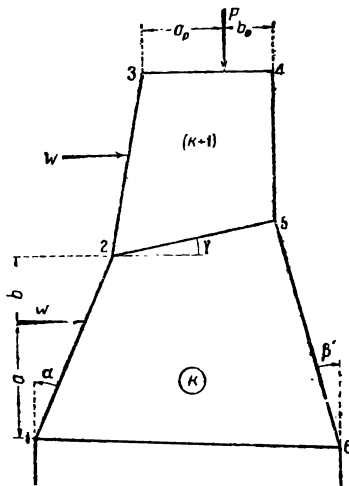
Из полученных результатов видно, что в многоярусных рамах с наклонными стойками смещение узлов стоек зависит от смещения рассматриваемого яруса, смещения же ригелей зависят от смещения во всех нижележащих ярусах.

2. Составление уравнений. Предположим, что требуется составить уравнение равновесия моментов для узла 2 в раме, показанной на черт. 293, и уравнение равновесия сил при смещении в k -м ярусе той же рамы.

Прежде всего надо определить смещения узлов рамы, или, что то же, смещение концов всех стержней, выразив их в долях линейного смещения $\bar{Z}_{2k} = 1$. Для этого строим диаграмму перемещений (черт. 294, с), приняв за исходную величину отрезок, равный $\bar{Z}_{2k} = 1$, представляющий собой горизонтальное смещение



Черт. 292.



Черт. 293.

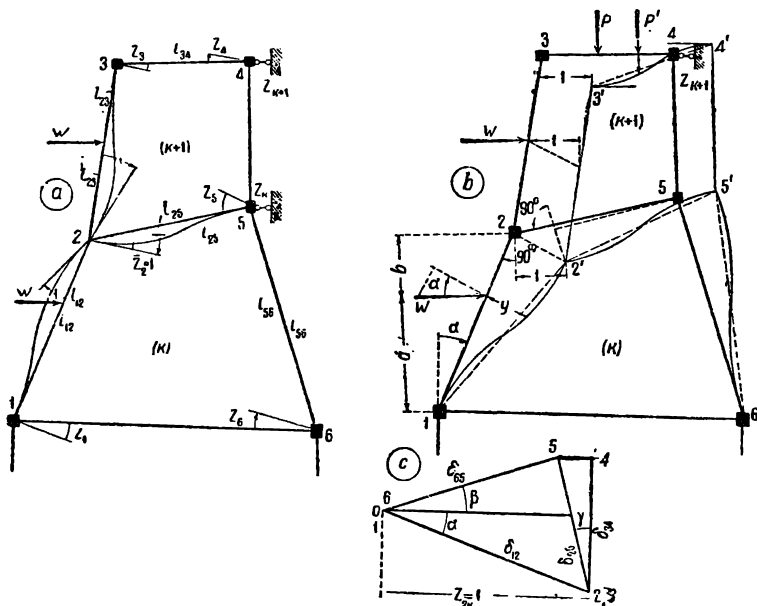
узла 2. В долях этого отрезка определяем относительные смещения δ концов стержней и по ним углы ψ поворота осей.

$$\begin{aligned} \frac{\delta_{12}}{l_{12}} &= \psi_{12} \text{ — угол поворота оси стойки } 1-2, \\ \frac{\delta_{56}}{l_{56}} &= \psi_{56} \text{ — } && 5-6, \\ -\frac{\delta_{25}}{l_{25}} &= \psi_{25} \text{ — } && \text{ригеля } 2-5, \\ -\frac{\delta_{34}}{l_{34}} &= \psi_{34} \text{ — } && \text{„ } 3-4. \end{aligned}$$

Влияние этих смещений на величины реактивных моментов и усилий учитывается по множителем величин, даваемых в табл. 49, на множители $\frac{\delta}{l}$ вместо $\frac{1}{l}$.

Для рассматриваемой рамы будем иметь: реактивные моменты

$$\begin{aligned} r_{1k} &= -6i_{12} \frac{\delta_{12}}{l_{12}}; & r_{3k} &= -6i_{13} \frac{\delta_{13}}{l_{12}} - 6i_{25} \frac{-\delta_{25}}{l_{25}}; \\ r_{6k} &= -6i_{56} \frac{\delta_{56}}{l_{56}}; & r_{5k} &= -6i_{56} \frac{\delta_{56}}{l_{56}} - 6i_{25} \frac{-\delta_{25}}{l_{25}}; \\ r_{3k} &= r_{4k} = -6i_{34} \frac{-\delta_{34}}{l_{34}}. \end{aligned}$$



Черт. 294.

и реактивные силы

$$\begin{aligned} r_{1,2k} &= 12 \frac{i_{12}}{l_{12}^2} \delta_{12}; & r_{5,6k} &= 12 \frac{i_{56}}{l_{5,6}^2} \delta_{56}; \\ r_{2,5k} &= -12 \frac{i_{25}}{l_{2,5}^2} \delta_{25}; & r_{3,4k} &= -12 \frac{i_{34}}{l_{3,4}^2} \delta_{34}. \end{aligned}$$

Перейдем теперь к написанию уравнений, считая наличие смещения Z_k в нижнем ярусе (черт. 294, а) и Z_{k+1} во втором ярусе. Написание уравнений проводится или путем сопоставления единичных эпюр моментов, или пользуясь указаниями § 63 и данными табл. 49.

Уравнение равновесия моментов у узла 2 напишется так:

$$4(i_{12} + i_{23} + i_{25})Z_2 + 2(i_{12}Z_1 + i_{23}Z_3 + i_{25}Z_6) - 6\frac{i_{12}}{l_{12}}Z_k\delta_{12} + 6\frac{i_{25}}{l_{25}}Z_k\delta_{25} - 6\frac{i_{23}}{l_{23}}Z_{k+1}\delta_{23} + M_{21} + M_{23} = 0. \quad (194)$$

Это уравнение отличается от такого же уравнения (186) при параллельных стойках добавочным членом $6\frac{i_{25}}{l_{25}}Z_k\delta_{25}$ и коэффициентами δ_{12} и δ_{23} в двух других членах.

Уравнение равновесия сил по направлению линейного смещения Z_k для k -го яруса напишется так:

$$6\frac{i_{12}}{l_{12}}\delta_{12}\left(2\frac{1}{l_{12}}Z_k\delta_{12} - Z_1 - Z_2\right) + 6\frac{i_{56}}{l_{56}}\delta_{56}\left(2\frac{1}{l_{56}}Z_k\delta_{56} - Z_6 - Z_6\right) - 6\frac{i_{25}}{l_{25}}\delta_{25}\left(-2\frac{1}{l_{25}}Z_k\delta_{25} - Z_3 - Z_5\right) - 6\frac{i_{34}}{l_{34}}\delta_{34}\left(-2\frac{1}{l_{34}}Z_k\delta_{34} - Z_3 - Z_4\right) = A_{12}\delta_{12} + A_{23} \cdot 1 - A_{34}\delta_{34}. \quad (195)$$

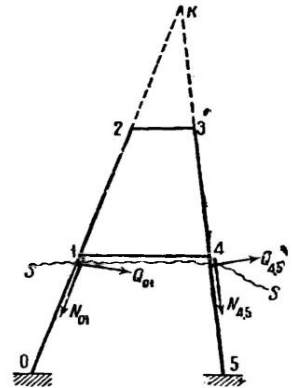
Это уравнение отличается от аналогичного ему уравнения (189) для рамы с параллельными стойками наличием третьего и четвертого членов в левой части, вошедших в уравнение в результате влияния смещений ригелей 2—5 и 3—4, и наличием в правой части слагаемого $A_{34}\delta_{34}$, определяющего собой реакцию от нагрузки, приложенной к верхнему ригелю. Кроме того должно быть отмечено наличие коэффициентов δ_{12} , δ_{56} , δ_{25} и δ_{34} при неизвестном Z_k , что является результатом выражения смещения всех узлов через неизвестное $Z_k\delta$.

Уравнения вида (194) и (195) могут быть составлены для всех узлов и для всех ярусов рамы. Предварительно должны быть определены величины δ смещений концов стержней, возникающих от сдвигов $\bar{Z}_k = 1$, $\bar{Z}_{k+1} = 1$ и т. д. в каждом ярусе системы.

Иногда заменяют составление дополнительных уравнений, т. е. уравнений равновесия сил при смещении (189), составлением условий равновесия по разрезам, проводимым через ярусы системы, связывая между собой таким путем поперечные силы Q и нормальные силы N , имеющие место в сделанных разрезах стержней.

Так например, для составления дополнительного уравнения относительно первого яруса системы, показанной на черт. 295, надо провести горизонтальный разрез ss через стойки яруса вблизи одного из концов их. Условие равновесия по этому разрезу свяжет между собой силы N и Q , действующие в сечениях стоек. Далее потребуются исключить из этого уравнения силы N , выразив их через поперечные силы, для чего надо последовательно вырезать узлы в системе и составлять условия равновесия, по которым силы N_{01} и N_{45} выразятся через поперечные силы Q_{14} , Q_{12} , Q_{23} и т. д. После подстановки значений N_{01} и N_{45} в первое уравнение оно будет выражено только через поперечные силы всех или части стержней системы. Поперечные же силы, как известно, могут быть выражены через углы поворотов и линейные смещения по концам стержней.

В конечном результате это условие равновесия должно привести к виду уравнения (195).



Черт. 295.

Нельзя сказать, какой из приемов составления дополнительного уравнения будет сложнее, но можно указать, что при последовательном вычислении продольных сил в функции поперечных сил теряется взаимность коэффициентов при неизвестных в уравнениях угловых деформаций и смещений, что заставляет переходить к решению полученных уравнений путем последовательного приближения.

Следует отметить, что на практике обычно конструкции с наклонными стойками имеют более простой вид и симметричны. Это часто позволяет использовать для составления дополнительного уравнения условие равновесия моментов относительно точки пересечения стоек по разрезу, проводимому через один из концов стоек. В это уравнение войдут только моменты и поперечные силы на концах стоек, выражаемые через нагрузку и неизвестные Z (см. пример 25).

§ 68. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ (ИТЕРАЦИИ)

В отдельных случаях рам с наклонными стойками и при использовании условий симметрии нарушается взаимность коэффициентов в канонических уравнениях. Решение таких уравнений сокращенным способом Гаусса невозможно. Можно рекомендовать проводить решение их способом итерации, т. е. определять неизвестные путем последовательного приближения. Этот способ дает хорошие результаты в применении к решению канонических уравнений, составленных по методу деформаций, так как в каждом из них главный коэффициент (r_{kk}) при неизвестном значительно превышает все побочные коэффициенты (r_{km}). Это обстоятельство приводит к тому, что при разделении в каждом уравнении всех побочных коэффициентов на главный r_{kk} получаются частные, незначительные по своей величине. Сумма их абсолютных величин обычно меньше единицы:

$$\frac{1}{r_{kk}}(r_{k1} + r_{k2} + \dots + r_{kn}) < 1,$$

что, как известно¹, служит признаком сходимости процесса последовательных приближений. Сущность метода заключается в следующем.

Каждое из канонических уравнений, например k -е, делится на главный коэффициент r_{kk} и решается относительно неизвестного Z_k , т. е. типовое уравнение принимает форму:

$$Z_k = -\frac{R_{kp}}{r_{kk}} - \frac{r_{k1}}{r_{kk}} Z_1 - \frac{r_{k2}}{r_{kk}} Z_2 - \dots - \frac{r_{kn}}{r_{kk}} Z_n.$$

Таким образом вся система канонических уравнений представляется в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} Z_1 &= -\frac{R_{1p}}{r_{11}} - \left(\frac{r_{12}}{r_{11}} Z_2 + \frac{r_{13}}{r_{11}} Z_3 + \dots + \frac{r_{1n}}{r_{11}} Z_n \right); \\ Z_2 &= -\frac{R_{2p}}{r_{22}} - \left(\frac{r_{21}}{r_{22}} Z_1 - \frac{r_{23}}{r_{22}} Z_3 + \dots + \frac{r_{2n}}{r_{22}} Z_n \right). \end{aligned} \right\} \quad (196)$$

и т. д.

В первом приближении значение всех неизвестных принимается равным величине известного члена R_p , поделенной на коэффициент при неизвестном:

$$Z_1^I = -\frac{R_{1p}}{r_{11}}; \quad Z_2^I = -\frac{R_{2p}}{r_{22}}; \quad Z_n^I = -\frac{R_{np}}{r_{nn}}.$$

Эти значения подставляются в каждое уравнение (196):

$$Z_1^{II} = Z_1^I - \left(\frac{r_{12}}{r_{11}} Z_2^I + \frac{r_{13}}{r_{11}} Z_3^I + \dots + \frac{r_{1n}}{r_{11}} Z_n^I \right),$$

$$Z_2^{II} = Z_2^I - \left(\frac{r_{21}}{r_{22}} Z_1^I + \frac{r_{23}}{r_{22}} Z_3^I + \dots + \frac{r_{2n}}{r_{22}} Z_n^I \right),$$

и т. д.,

чем определяются вторые приближенные значения неизвестных: Z_1^{II} , Z_2^{II} и т. д.

¹ Штаерман И. Я., О методе последовательного приближения в строительной механике, Киев 1929.

Суммы вида:

$$-\left(\frac{r_{12}}{r_{11}} Z_2^I + \frac{r_{13}}{r_{11}} Z_3^I + \dots + \frac{r_{1n}}{r_{11}} Z_n^I\right) = \mu_1^I,$$

$$-\left(\frac{r_{21}}{r_{22}} Z_1^I + \frac{r_{23}}{r_{22}} Z_3^I + \dots + \frac{r_{2n}}{r_{22}} Z_n^I\right) = \mu_2^I$$

и т. д.

являются первыми поправками в отношении первого приближенного значения неизвестных ($Z_1^I, Z_2^I, \dots, Z_n^I$).

Полученные величины ($Z_1^{\text{II}}, Z_2^{\text{II}}, \dots, Z_n^{\text{II}}$ надо внести в уравнения (196), чем определяются третьи приближенные значения неизвестных. Например

$$\begin{aligned} Z_1^{\text{III}} &= Z_1^I - \left[\frac{r_{12}}{r_{11}} (Z_2^I + \mu_2^I) + \frac{r_{13}}{r_{11}} (Z_3^I + \mu_3^I) + \dots + \frac{r_{1n}}{r_{11}} (Z_n^I + \mu_n^I) \right] = \\ &= Z_1^I + \mu_1^I - \left(\frac{r_{12}}{r_{11}} \mu_1^I + \frac{r_{13}}{r_{11}} \mu_3^I + \dots + \frac{r_{1n}}{r_{11}} \mu_n^I \right) = Z_1^I + \mu_1^I + \mu_1^{\text{II}} \end{aligned}$$

и т. д.

В этих уравнениях величины $\mu_1^{\text{II}}, \mu_3^{\text{II}}, \dots, \mu_n^{\text{II}}$ представят собой вторые поправки, получаемые в результате третьего приближения.

Полученные значения поправок в третьем приближении позволяют составить уравнения, определяющие их значения в четвертом приближении, и т. д. Процесс вычисления продолжается до тех пор, пока величины поправок не станут настолько малыми, что ими можно будет пренебречь.

В процессе вычисления можно ограничиться только последовательным вычислением величин поправок $\mu^I, \mu^{\text{II}}, \mu^{\text{III}}$ и т. д. Окончательные величины неизвестных определяются тогда суммами:

$$\left. \begin{aligned} Z_1 &= Z_1' + (\mu_1^I + \mu_1^{\text{II}} + \mu_1^{\text{III}} + \dots), \\ Z_2 &= Z_2' + (\mu_2^I + \mu_2^{\text{II}} + \mu_2^{\text{III}} + \dots). \end{aligned} \right\} \quad (197)$$

Указанное выше требование превалирующей величины коэффициента при неизвестном, относительно которого составляется уравнение, не всегда удовлетворяется в дополнительных уравнениях равновесия усилий при смещениях, поэтому совместное решение этих уравнений с уравнениями равновесия моментов приводит к большому числу пересчетов в процессе последовательного приближения. Можно рекомендовать в таких случаях проведение расчета двумя способами, смотря по величине коэффициентов при неизвестных и в дополнительных уравнениях.

1) Определяют в функции углов поворота неизвестное Z_n смещение из уравнения равновесия сил и подставляют его значение в уравнения равновесия моментов. Если эта подстановка не нарушает превалирующей величины главного коэффициента, то проводится определение величин неизвестных углов поворота в порядке последовательного приближения.

2) Если указанная подстановка нарушает превалирующее значение главных коэффициентов, то относят члены, характеризующие влияния смещения Z_n в уравнениях равновесия моментов к свободным членам и проводят определение неизвестных углов поворота в порядке последовательного приближения. После того как будут определены величины углов поворота в функции нагрузок и смещений Z_n , подставляют их значения в уравнения равновесия сил и определяют из них величины неизвестных Z_n ; последние вносятся в выражения для углов поворота.

В заключение отметим, что возможность контрольных проверок в способе Гаусса заставляет предпочитать его способу итерации, где это возможно.

Пример 24. Для пояснения вычислительного процесса по способу итерации рассмотрим решение канонических уравнений, составленных для расчета рамы, показанной на черт. 286 и решенных в примере 23 способом Гаусса. Такой параллельный расчет позволит читающему сделать сопоставление обоих способов.

Выписываем канонические уравнения:

$$\begin{aligned} 3Z_1 + 8Z_2 + 4Z_5 - 3Z_9 - 3Z_{10} &= 0, \\ 8Z_1 + 56Z_2 + 4Z_6 - 3Z_9 - 3Z_{10} &= 0, \\ 4Z_1 + 24Z_5 + 8Z_6 - 3Z_{10} &= -32 \frac{W}{EJ}, \\ 4Z_2 + 8Z_5 + 48Z_6 - 3Z_{10} &= 0, \\ 3Z_1 + 3Z_2 + 3Z_5 + 3Z_6 - 3Z_{10} &= 12 \frac{Wh}{EJ} \\ 3Z_1 + 3Z_2 + 3Z_9 &= 36 \frac{Wh}{EJ}. \end{aligned}$$

Так как в последних двух уравнениях отношения всех коэффициентов при угловых неизвестных к коэффициентам при неизвестных смещениях Z_9 и Z_{10} равны единице, то целесообразно, определив из этих уравнений неизвестные Z_9 и Z_{10} , подставить их в остальные уравнения и после этого перейти к решению их.

Так как $h = 4$, то:

$$\begin{aligned} Z_{10} &= Z_1 + Z_2 + Z_5 + Z_6 + 16 \frac{W}{EJ}, \\ Z_9 &= Z_1 + Z_2 + 48 \frac{W}{EJ}. \end{aligned}$$

После подстановки этих величин в остальные уравнения последние приводятся к виду:

$$\begin{aligned} 26Z_1 + 2Z_2 + Z_5 - 3Z_6 &= 192 \frac{W}{EJ}, \\ 2Z_1 + 50Z_2 - 3Z_5 + Z_6 &= 192 \frac{W}{EJ}, \\ Z_1 - 3Z_2 + 21Z_5 + 5Z_6 &= 16 \frac{W}{EJ}, \\ -3Z_1 + Z_2 + 5Z_5 + 45Z_6 &= 48 \frac{W}{EJ}. \end{aligned}$$

В этих уравнениях главный коэффициент при неизвестном значительно больше побочных, поэтому для решения можно применить способ последовательного приближения. Разделив каждое из уравнений на главный коэффициент и решив их относительно этих неизвестных, получим уравнения в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} Z_1 &= 7,385 \frac{W}{EJ} - 0,077Z_2 - 0,0385Z_5 + 0,1155Z_6, \\ Z_2 &= 3,84 \frac{W}{EJ} - 0,04Z_1 + 0,06Z_5 - 0,02Z_6, \\ Z_5 &= 0,762 \frac{W}{EJ} - 0,0476Z_1 + 0,1428Z_2 - 0,238Z_6, \\ Z_6 &= 1,067 \frac{W}{EJ} + 0,066Z_1 - 0,0222Z_2 - 0,111Z_5. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Для первого приближения принимаем все неизвестные равными величине известных членов:

$$Z_1^I = 7,385C; \quad Z_2^I = 3,84C; \quad Z_5^I = 0,762C; \quad Z_6^I = 1,067C;$$

Здесь $C = \frac{W}{EJ}$.

Приняв эти значения неизвестных, подставляем их в уравнения (a) и определяем по ним новые значения неизвестных:

$$\left. \begin{aligned} Z_1^{II} &= (7,385 - 0,077 \cdot 3,84 - 0,0385 \cdot 0,762 + 0,1155 \cdot 1,067) C = 7,183 C \\ Z_2^{II} &= (3,84 - 0,04 \cdot 7,385 + 0,06 \cdot 0,762 - 0,02 \cdot 1,067) C = 3,573 C \\ Z_5^{II} &= (0,762 - 0,0476 \cdot 7,385 + 0,1428 \cdot 3,84 - 0,238 \cdot 1,067) C = 0,705 C \\ Z_6^{II} &= (1,067 + 0,0667 \cdot 7,385 - 0,0222 \cdot 3,84 - 0,111 \cdot 0,762) C = 1,390 C \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

В целях упрощения вычислений последующее приближение делаем не по полученным величинам неизвестных, а по поправкам к ним; из сопоставления первых и вторых значений неизвестных поправки к ним будут:

$$\begin{array}{cccc} Z_1 = 7,385C & Z_2 = 3,84C & Z_5 = 0,762C & Z_6 = 1,067C \\ \underline{7,183C} & \underline{3,573C} & \underline{0,705C} & \underline{1,390C} \\ \mu_1^I = -0,202C & \mu_2^I = -0,267C & \mu_5^I = -0,057C & \mu_6^I = -0,323C \end{array}$$

По этим поправкам вычисляем новые поправки к каждому неизвестному, увеличенные в 1 000 раз:

$$\begin{aligned} \mu_1^I &= (0,077 \cdot 267 + 0,0385 \cdot 57 + 0,1155 \cdot 323) C = 60C, \\ \mu_2^I &= (0,040 \cdot 202 - 0,06 \cdot 57 - 0,02 \cdot 323) C = -2C, \\ \mu_5^I &= (0,0476 \cdot 202 - 0,1428 \cdot 267 - 0,238 \cdot 323) C = -105C, \\ \mu_6^I &= (-0,0667 \cdot 202 + 0,22 \cdot 267 + 0,111 \cdot 57) C = -1C. \end{aligned}$$

По этим поправкам находим новые поправки:

$$\begin{aligned} \mu_1^{II} &= (0,077 \cdot 2 + 0,0385 \cdot 105 - 0,1155 \cdot 1) C = 4,0C, \\ \mu_2^{II} &= (-0,4 \cdot 60 - 0,06 \cdot 105 + 0,02 \cdot 1) C = -8,7C, \\ \mu_5^{II} &= (-0,0476 \cdot 60 - 0,1428 \cdot 2 + 0,238 \cdot 1) C = -3,0C, \\ \mu_6^{II} &= (0,067 \cdot 60 - 0,022 \cdot 2 + 0,111 \cdot 105) C = 15,71C, \end{aligned}$$

также увеличенные в 1 000 раз.

Проводим такое же вычисление поправок еще раз и получаем:

$$\mu_1^{III} = +0,8C; \quad \mu_2^{III} = -0,1C; \quad \mu_5^I = -1,8C; \quad \mu_6^{III} = 0,2C.$$

Так как эти поправки близки к нулю, то процесс пересчета их можно прекратить и вычислить по ним значения неизвестных:

$$\begin{aligned} Z_1 &= C(7,385 - 0,202 + 0,060 + 0,004 + 0,0008) = 7,248C, \\ Z_2 &= C(3,840 - 0,267 - 0,002 - 0,009 - 0,0001) = 3,567C, \\ Z_5 &= C(0,762 - 0,057 - 0,105 - 0,003 - 0,0018) = 0,595C, \\ Z_6 &= C(1,067 + 0,323 - 0,001 + 0,016 + 0,0002) = 1,405C. \end{aligned}$$

Правильность полученных неизвестных проверяем по исходным уравнениям:

$$\begin{aligned} Z_1 &= (7,385 - 0,077 \cdot 3,567 - 0,0385 \cdot 0,595 + 0,1155 \cdot 1,405) C = 7,249C, \\ Z_2 &= (3,84 - 0,04 \cdot 7,248 + 0,06 \cdot 0,595 - 0,02 \cdot 1,405) C = 3,56C, \\ Z_5 &= (0,762 - 0,0476 \cdot 7,248 + 0,1428 \cdot 3,567 - 0,238 \cdot 1,405) C = 0,592C, \\ Z_6 &= (1,0670,0667 \cdot 7,248 - 0,0222 \cdot 3,567 - 0,111 \cdot 0,595) C = 1,405C. \end{aligned}$$

Значения неизвестных получились достаточно близкими, поэтому дальнейшего пересчета можно не проводить.

Итак на основании произведенных подсчетов принимаем:

$$\begin{aligned} Z_1 &= 7,25 \frac{W}{EJ}; & Z_2 &= 3,56 \frac{W}{EJ}, \\ Z_5 &= 0,59 \frac{W}{EJ}; & Z_6 &= 1,40 \frac{W}{EJ}. \end{aligned}$$

По этим значениям углов поворота определяются величины линейных смещений:

$$\begin{aligned} Z_9 &= (7,25 + 3,56 + 48) \frac{W}{EJ} = 58,8 \frac{W}{EJ}, \\ Z_{10} &= (7,25 + 3,56 + 0,59 + 1,40 + 16) \frac{W}{EJ} = 28,8 \frac{W}{EJ}. \end{aligned}$$

Полученные значения неизвестных в точности соответствуют их значениям, полученным в примере 23.

§ 69. УЧЕТ ВЛИЯНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ

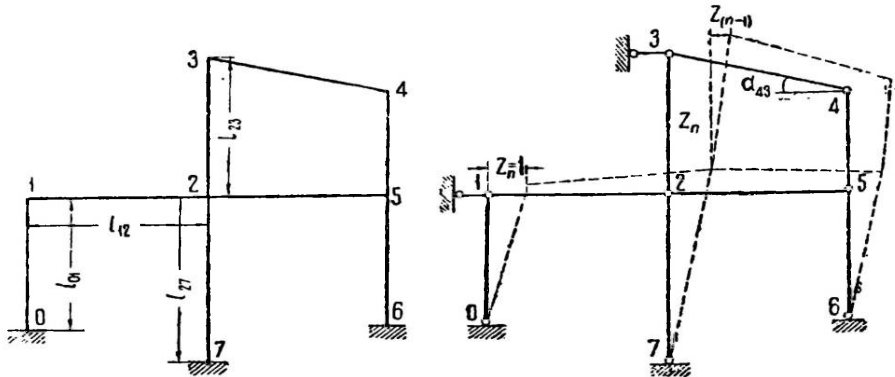
Изменение температурного режима рамы по сравнению с температурой при ее установке вызывает изменение длин стержней, а также и искривление их осей, если температура по сторонам стержня неодинакова. Оба эти вида деформаций

вызывают смещения и повороты узлов рамы, чему сопротивляются стержни своей упругостью, создавая реактивные силы и моменты. Величины последних зависят только от жесткости и длины стержней, поэтому они вычисляются так же, как это делалось при учете влияния нагрузки, и вводятся в канонические уравнения деформаций в виде коэффициентов r при неизвестных.

Таким образом вопрос об учете влияния изменения температуры на величину неизвестных углов поворота и линейных смещений сводится к внесению в канонические уравнения дополнительных свободных членов, характеризующих влияние температуры. Рассмотрим отдельно влияние равномерного и неравномерного нагрева.

1. Равномерный нагрев. В расчетах приходится принимать температурный режим одинаковым по длине каждого стержня. Удлинение стержня определяется по температуре осевого волокна:

$$\Delta_{kmt} = \alpha t^{\circ} l_{km}.$$



Черт. 296.

Изменение длин стержней вызывает смещение всех узлов, но все эти смещения связаны между собой и могут быть определены из рассмотрения геометрической схемы рамы.

Для вычисления перемещений принимают раму шарнирной в опорах и во всех узлах и вводят в нее неизвестные дополнительные связи, обеспечивающие ее неизменяемость, после чего переходят к вычислению перемещений узлов шарнирной схемы, что может быть сделано аналитически и графически путем построения диаграммы перемещений. Разберем этот процесс на конкретных примерах рамы с параллельными и непараллельными стойками.

При несимметричном изменении температурного режима все узлы рамы, показанной на черт. 296, должны получить смещения, в том числе и узел 1. Смещение узла 1 нам неизвестно, поэтому примем его за неизвестное Z_n и выразим смещения всех остальных узлов через это неизвестное смещение и удлинения по направлению каждого стержня, вызываемые изменением его температурного режима.

Смещения узлов в нижнем ярусе:

$\delta_{01} = Z_n$ — смещение узла 1, перпендикулярное к оси стойки 0—1 и определяющее угол ее поворота $\psi_{01} = \frac{Z_n}{l_{01}}$;

$\delta_{72} = Z_n + \alpha t^{\circ} l_{12}$ — смещение узла 2, перпендикулярное к оси стойки 7—2; угол поворота $\psi_{72} = \frac{\delta_{72}}{l_{72}}$.

$\delta_{65} = \delta_{72} + \alpha t^{\circ} l_{25}$ — смещение, перпендикулярное к оси стойки 6—5; угол поворота $\psi_{65} = \frac{\delta_{65}}{l_{65}}$;

$\delta_{12} = (\alpha t^\circ l_{01} - \alpha t^\circ l_{27})$ — разность смещений узлов 1 и 2 по направлению вертикали, определяющая перекося ригеля 1—2; $\psi_{12} = \frac{\delta_{12}}{l_{12}}$;

$\delta_{25} = (\alpha t^\circ l_{27} - \alpha t^\circ l_{56})$ то же для ригеля 2—5; угол перекося ригеля $\psi_{25} = \frac{\delta_{25}}{l_{25}}$.

Переходим к определению перемещений во втором ярусе. При рассмотрении смещений узлов в нижнем ярусе предполагалось, что стержни второго яруса переместились параллельно самим себе; теперь будем определять смещения их по отношению к этому новому положению их.

Смещение δ_3 нам неизвестно, принимаем его равным $Z_{(n-1)}$ и направленным по горизонтали.

$\delta_{23} = Z_{(n-1)}$ — относительное смещение концов стойки 3—2, определяющее угол поворота ее оси $\psi_{23} = \frac{\delta_{23}}{l_{23}}$.

$\delta_{54} = Z_{n-1} + \alpha t l_{34} \cos \alpha_{34}$ — относительное смещение по горизонтали концов стойки 5—4; угол перекося стойки $\psi_{54} = \frac{\delta_{54}}{l_{54}}$.

δ_{34} — вертикальная проекция относительного смещения концов ригеля 3—4:

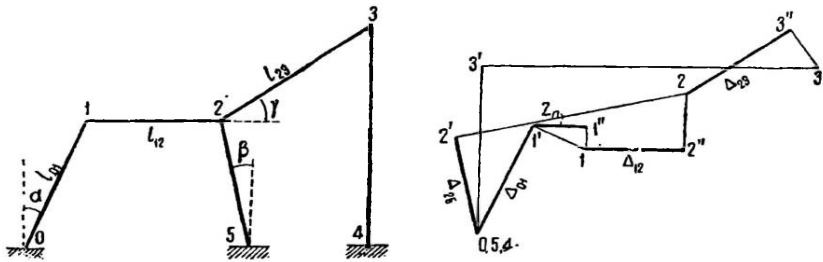
$$\delta_{34} = \alpha t^\circ l_{12} + \alpha t^\circ l_{23} - (\alpha t^\circ l_{56} + \alpha t^\circ l_{54} - \alpha t^\circ l_{43} \sin \alpha_{43});$$

угол поворота его оси

$$\psi_{34} = \frac{\delta_{34}}{l_{34} \cos \alpha_{34}}.$$

Рассмотрим теперь более сложный случай рамы с непараллельными стойками (черт. 297).

При вычислении смещений узлов в рамах с непараллельными стойками можно рекомендовать проводить вычисление параллельно с построением диаграммы перемещений по способу Виллио (ч. I, § 101) и даже просто определять смещения узлов непосредственным измерением по диаграмме.



Черт. 297.

В рассматриваемой раме (черт. 297) узел 1 сместится под влиянием удлинения стержня 0—1 на некоторую величину Z_n . Благодаря этому смещению стержень 0—1 повернется на угол $\psi_{01} = \frac{Z_n}{l_{01} \cos \alpha}$.

На диаграмме смещение узла 1 определяется следующим построением.

От некоторой точки 0, принятой за неподвижную, откладывается по направлению оси стержня 0—1 его удлинение $\Delta_{01} = \alpha t^\circ l_{01}$; к отложенному отрезку присоединяется неизвестное пока по величине смещение Z_n . Так как под влиянием этих деформаций стержень 0—1 должен повернуться, то для определения смещенного положения узла 1 проводим прямые 1'—1 перпендикулярно к оси 0—1 и 1''—1 перпендикулярно к заданному направлению смещения Z_n .

Для определения смещения узла 2 проводим от той же неподвижной точки 0 диаграммы прямую 5—2' \parallel 5—2 и откладываем на ней величину удлинения $\Delta_{25} = \alpha t^\circ l_{25}$. От точки 1 диаграммы проводим прямую 1—2'', параллельную оси ригеля 1—2, и откладываем на ней величину его удлинения $\Delta_{12} = \alpha t^\circ l_{12}$.

Полученные точки $2'$ и $2''$ определяют собой смещение узла 2 по направлению стержней $1-2$ и $2-5$. Оба эти смещения вызовут поворот стержней $2-5$ и $1-2$; поэтому, для того чтобы найти истинное положение смещенного узла 2, надо из точек $2'$ и $2''$ провести прямую $2'-2$ перпендикулярно к оси стержня $2-5$ и прямую $2''-2$ перпендикулярно к оси стержня $1-2$.

Аналогичным построением может быть найдено смещенное положение узла 3.

Пользуясь диаграммой и схемой рамы, можно написать аналитические выражения смещений узлов, а через них углов поворота каждого стержня.

Например смещение узла 2 по горизонтальному направлению равно горизонтальной проекции отрезка $2'-2$ в диаграмме перемещений и определяется выражением:

$$\delta_{25} = \alpha l_{25}^c \sin \beta + \alpha l_{01}^c \sin \alpha + Z_n + \alpha l_{12}^c;$$

угол поворота стержня $2-5$ равен:

$$\psi_{25} = \frac{\delta_{25}}{l_{25} \cos \beta}.$$

Относительное смещение узлов ригеля $1-2$ равно отрезку $2-2''$ в диаграмме и определяется выражением:

$$\delta_{12} = (\alpha l_{01}^c \cos \alpha - Z_n \operatorname{tg} \beta) - (\alpha l_{25}^c \cos \beta + \delta_{25} \operatorname{tg} \beta).$$

Это смещение перпендикулярно к оси ригеля $1-2$ и поэтому угол перекаса ригеля равен:

$$\psi_{12} = \frac{\delta_{12}}{l_{12}}.$$

Аналогичным путем могут быть вычислены относительные смещения концов других стержней и углы поворота их осей.

Все вышеприведенные выражения для смещений составлены в предположении, что температура возросла по сравнению с первоначальной температурой при установке. Если температура опустилась ниже температуры установки, то все величины деформаций вводятся с отрицательным знаком и при построении диаграммы откладываются в ней в обратную сторону.

Определение относительных смещений (δ_{12} , δ_{25} и др.) через разность смещений левого и правого узлов устанавливает направление смещений по или против хода часовой стрелки. Если смещение правого конца окажется больше смещения левого конца, то суммарное смещение будет иметь знак минус и поворот оси будет направлен против хода часовой стрелки.

Кроме изложенных приемов определения перемещений возможно определение их по обычной формуле Мора в применении к шарнирным цепям.

Все углы поворотов стержней рамы, вызываемые относительными смещениями их концов, должны быть учтены при составлении канонических уравнений. В уравнения вносятся реактивные моменты и силы, вызываемые указанными поворотами; для этого могут быть использованы формулы (176), (177), (176') и (177'), но в них вместо $\frac{1}{l}$ надо подставить угол поворота ψ .

2. Неравномерный нагрев. Неравномерный нагрев стержня вызывает изменение длины его оси на величину:

$$\Delta l = \alpha \frac{1}{2} (t_1^\circ + t_2^\circ) l$$

и поворот каждого сечения на угол

$$d\varphi = \alpha \frac{\Delta t^c}{h} dx.$$

Здесь h — высота сечения стержня, $\Delta t^c = (t_1^\circ - t_2^\circ)$ — разница в температуре крайних волокон. В расчетах принимают, что разница температур по длине стержня остается постоянной.

Если брус имеет шарниры по концам (черт. 298, а) и постоянную высоту сечения, то неравномерный нагрев вызовет поворот сечений по концам бруса на углы:

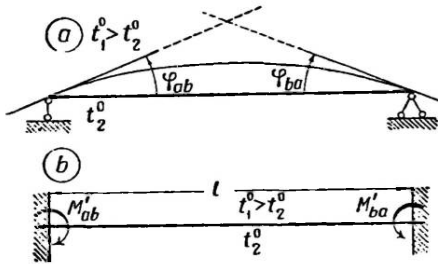
$$\varphi_{abt} = \varphi_{bat} = \int_0^{\frac{1}{2}l} \alpha \frac{\Delta t^\circ}{h} dx = \alpha \frac{\Delta t^\circ}{h} \frac{l}{2}.$$

Если брус будет иметь защемленные концы (черт. 298, б), то углов поворота по концам бруса не будет, но зато иметь место опорные моменты M_{ab} и M_{ba} . По формуле (173) поворот обоих концов бруса на угол, равный единице, создает опорные моменты:

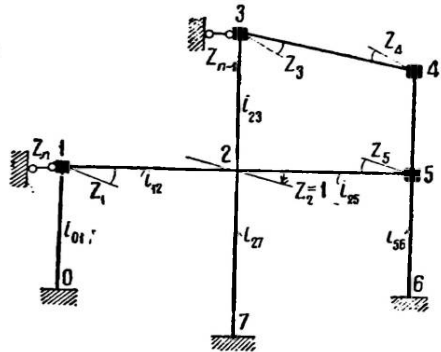
$$\bar{M}_{ab} = \bar{M}_{ba} = \frac{4EJ}{l} - \frac{2EJ}{l} = \frac{2EJ}{l}.$$

Следовательно при заделке концов бруса неравномерный нагрев создает опорные моменты:

$$M'_{ab} = \bar{M}_{ab} \varphi_{abt} = \frac{\alpha \Delta t^\circ}{h} EJ. \quad (198)$$



Черт. 298.



Черт. 299.

Если брус будет на одном конце защемлен, а на другом закреплен шарнирно, то опорный момент при неравномерном нагреве такого стержня будет равен:

$$M = \frac{3}{2} \alpha \frac{\Delta t^\circ}{h} EJ. \quad (199)$$

Выражения (198) и (199) для опорных моментов вносятся в уравнения угловых деформаций. Знак в уравнениях определяется по соображению с искривлением оси от нагрева; опорные моменты имеют направления, обратные направлению искривления оси.

3. Составление уравнений. Составление канонических уравнений для учета влияния температурного режима проводится так же, как и при учете влияния нагрузки, но вместо грузовых членов R_{kp} вводятся члены, характеризующие влияние температуры R_{kt} .

Составим уравнение равновесия моментов относительно узла 2 рамы, показанной на черт. 299, и используем значения относительных смещений, составленные нами выше в условиях нагрева всей системы на $+t^\circ$:

$$4(i_{12} + i_{23} + i_{26} + i_{27})Z_2 + 2(Z_1 i_{13} + Z_3 i_{23} + Z_5 i_{25}) - 6 \frac{i_{27}}{l_{27}} \delta_{27} - 6 \frac{i_{23}}{l_{23}} \delta_{23} - 6 \frac{i_{12}}{l_{12}} \delta_{12} - 6 \frac{i_{25}}{l_{25}} \delta_{25} = 0.$$

Подставим в него значения смещений δ , определенные выше (черт. 296), и, выделив слагаемые с неизвестными Z_n и Z_{n-1} , получим:

$$4(i_{12} + i_{23} + i_{26} + i_{27})Z_2 + 2(Z_1 i_{12} + Z_3 i_{23} + Z_5 i_{25}) - 6 \frac{i_{27}}{l_{27}} Z_n - 6 \frac{i_{23}}{l_{23}} Z_{n-1} = 6\alpha t^\circ \left[l_{12} \frac{i_{27}}{l_{27}} + (l_{01} - l_{27}) \frac{i_{12}}{l_{12}} + (l_{27} - l_{26}) \frac{i_{25}}{l_{25}} \right].$$

Слагаемые, отнесенные в правую сторону уравнения, представляют собой известные члены, характеризующие температурное влияние.

Если бы имел место неравномерный нагрев, предположим стержня 1—2 с большей температурой нижних волокон, то в левую сторону надо было бы внести опорный момент:

$$M_{21} = \alpha \frac{\Delta t^2}{h} i_{12} l_{12},$$

приписав ему знак плюс, как направленному по ходу часовой стрелки. В правую часть уравнения он войдет со знаком минус.

Составим теперь уравнение равновесия сил по направлению линейного смещения в первом ярусе на величину Z_n [см. формулу (195)]:

$$6 \frac{i_{01}}{l_{01}} \left(\frac{2}{l_{01}} Z_n - Z_1 \right) + 6 \frac{i_{27}}{l_{27}} \left(\frac{2}{l_{27}} \delta_{27} - Z_2 \right) + 6 \frac{i_{56}}{l_{56}} \left(\frac{2}{l_{56}} \delta_{56} - Z_5 \right) = 0.$$

После внесения значений смещений δ и выделения членов с неизвестным Z_n получим:

$$\begin{aligned} 2 \left(\frac{i_{01}}{l_{01}^2} + \frac{i_{27}}{l_{27}^2} + \frac{i_{56}}{l_{56}^2} \right) Z_n - \left(\frac{i_{01}}{l_{01}} Z_1 + \frac{i_{27}}{l_{27}} Z_2 + \frac{i_{56}}{l_{56}} Z_5 \right) = \\ = -2\alpha t^0 \left[\frac{i_{27}}{l_{27}^2} l_{12} + \frac{i_{56}}{l_{56}^2} (l_{12} + l_{25}) \right]. \end{aligned}$$

Аналогичным путем составляются и другие уравнения в количестве, равном числу неизвестных.

Пример 25. Предположим, что требуется определить момент в раме, показанной на черт. 300, от изменившегося температурного режима.

Основные размеры рамы, погонные жесткости стержней и распространение нагрева по системе показаны на том же чертеже.

Так как рама симметрична, а нагрев ее несимметричен, то для проведения расчета целесообразно разбить нагрев на симметричный (черт. 301, а) и обратно симметричный (черт. 301, б) и рассчитывать оба случая отдельно.

А) При симметричном нагреве узлы системы получают смещения, показанные на черт. 302:

$$\delta_{01} = -\delta_{32} = l' \cdot l'' = -1 \cdot 1' \operatorname{tg} \beta = -\alpha \frac{10^\circ + 0^\circ}{2} 5 \frac{3}{4} = -18,75\alpha,$$

$$\delta_{14} = \delta_{25} = -\alpha \frac{20^\circ + 0^\circ}{2} \frac{4}{2} = -20\alpha,$$

$$\delta_{12} = \delta_{45} = 0.$$

Неравномерный нагрев стержней создает опорные моменты:

$$\text{стержень } 0-1 \quad M_{01t} = \frac{\alpha(10^\circ - 0^\circ)}{0,5} 5 \cdot 2 = 200\alpha,$$

$$1-4 \quad M_{14t} = -\frac{\alpha(10^\circ - 0^\circ)}{0,5} 4 \cdot 1 = -80\alpha,$$

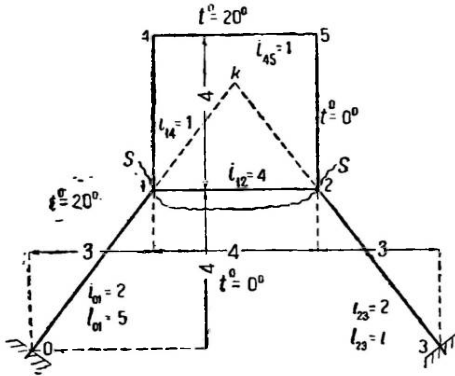
$$4-5 \quad M_{45t} = -\frac{\alpha(20^\circ - 0^\circ)}{0,5} 4 \cdot 1 = -160\alpha.$$

В этих выражениях высота сечений в стержнях принята $h = 0,5$ м.

По этим данным составляем уравнения равновесия моментов у узлов 1 и 4:

$$4(2 + 4 + 1) Z_1' + 2 \cdot 1 Z_4' + 2 \cdot 4 Z_2' - 6 \frac{2}{5} \delta_{01} - 6 \frac{1}{4} \delta_{14} = M_{01t} + M_{14t},$$

$$4(1 + 1) Z_4' + 2 \cdot 1 \cdot Z_1' + 2 \cdot 1 Z_5' - 6 \frac{1}{4} \delta_{14} = M_{14t} + M_{45t}.$$



Черт. 300.

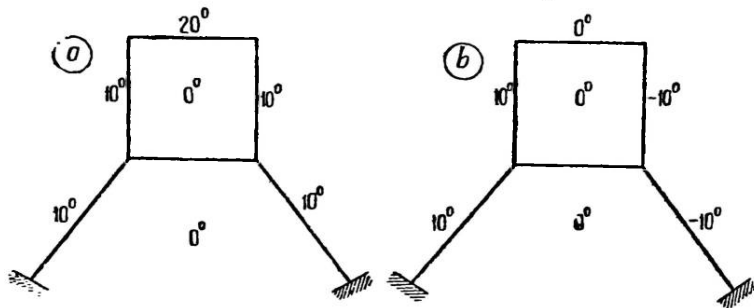
Подставив в них величины смещений и опорных моментов и учтя, что по условиям симметрии $Z_1' = -Z_2'$ и $Z_4' = -Z_5'$, получим:

$$(28 - 8) Z_1' + 2Z_4' = -2,4 \cdot 18,75\alpha - 1,5 \cdot 20\alpha + 200\alpha - 80\alpha,$$

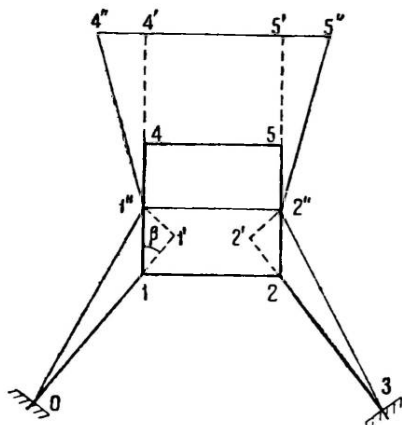
$$2Z_1' + (8 - 2) Z_4' = -1,5 \cdot 20\alpha + 80\alpha - 160\alpha.$$

Отсюда

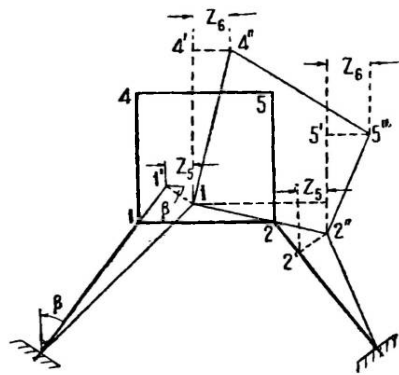
$$Z_1' = 4,225\alpha; \quad Z_4' = -19,75\alpha.$$



Черт. 301.



Черт. 302.



Черт. 303.

Соответственно этому моменты по концам стержней определяются значениями:

$$M_{01} = M_{32} = 2 \cdot 2 \cdot 4,225\alpha + 6 \frac{2}{5} 18,75\alpha + 200\alpha = 261,9\alpha,$$

$$M_{10} = M_{23} = 4 \cdot 2 \cdot 4,225\alpha + 6 \frac{2}{5} 18,75\alpha - 200\alpha = -121,2\alpha,$$

$$M_{13} = M_{31} = 4 \cdot 4 \cdot 4,225\alpha - 2 \cdot 4 \cdot 4,225\alpha = 33,80\alpha,$$

$$M_{14} = M_{25} = 87,40\alpha; \quad M_{41} = M_{52} = -120,55\alpha.$$

Контуры этой эпюры моментов показан пунктиром на черт. 304.

Б) При обратном симметричном нагреве система получит перекося, показанный на черт. 303, сопровождающийся смещением обоих ярусов системы в горизонтальном направлении.

Принимаем за неизвестные: Z_6 — горизонтальное смещение в узле 1; Z_6 — горизонтальное смещение в узле 4.

По условию обратной симметрии будем иметь смещения узлов в стойках:

$$\delta_{01} = \delta_{32} = \frac{1}{\cos \beta} Z_6 = \frac{5}{4} Z_6; \quad \delta_{14} = \delta_{25} = Z_6.$$

Смещения узлов в ригелях будут зависеть от неодинакового нагрева стоек и горизонтального смещения:

$$\delta_{12} = 2 \left(\alpha \frac{100 + 0^0}{2} 5 \cos \beta - Z_6 \operatorname{tg} \beta \right) = 2 \left(25 \frac{4}{5} \alpha - \frac{3}{4} Z_6 \right) = 40\alpha - \frac{3}{2} Z_6,$$

$$\delta_{45} = \delta_{12} + 2\alpha \frac{100 + 0^0}{2} 4 = 80\alpha - \frac{3}{2} Z_6.$$

Концевые моменты, вызываемые неравномерным нагревом стержней, будут иметь те же величины, как и в выше рассмотренном случае симметричного нагрева.

По полученным данным составляем уравнения деформаций.

Уравнения равновесия моментов у узлов 1 и 4:

$$4(2 + 4 + 1)Z_1'' + 2 \cdot 4Z_2'' + 2 \cdot 1Z_4'' - 6 \frac{2}{5} Z_6 \frac{1}{\cos \beta} - 6 \frac{1}{4} \delta_{12} - 6 \frac{1}{4} Z_6 - 200\alpha + 80\alpha = 0,$$

$$2 \cdot 1 \cdot Z_1 + 4(1 + 1)Z_4'' + 2 \cdot 1Z_6 - 6 \frac{1}{4} Z_6 - 6 \frac{1}{4} \delta_{45} - 80\alpha = \alpha.$$

Подставив в них полученные выше величины δ_{12} и δ_{45} и учтя, что по условию обратной симметрии $Z_1'' = Z_2''$ и $Z_4'' = Z_5''$, получим:

$$36Z_1'' + 2Z_4'' + 6Z_6 - 1,5Z_6 = 360\alpha; \quad (a)$$

$$2Z_1'' + 10Z_4'' + 2,25Z_6 - 1,5Z_6 = 200\alpha. \quad (b)$$

Составляем уравнение равновесия сил по линейному смещению в верхнем ярусе [формула (189)]:

$$6 \frac{1}{4} \left(\frac{2}{4} Z_6 - Z_1'' - Z_4'' \right) = 0.$$

Отсюда

$$Z_1'' + Z_4'' - \frac{1}{2} Z_6 = 0. \quad (c)$$

Вместо составления уравнений равновесия сил по смещению нижнего яруса составим уравнение по условию равновесия моментов относительно точки *K* (черт. 300) пересечения ног рамы, что в рассматриваемом случае проще.

Проводим сечение через верхние концы стоек и составляем уравнение равновесия (черт. 300):

$$2M_{10} + 2Q_{10} \frac{l_{12}}{2 \sin \beta} = 0.$$

Сократив на 2 и подставив выражения *M* и *Q*, получим:

$$8Z_1'' - 6 \frac{2}{5} Z_6 \frac{1}{\cos \beta} - 200\alpha - 6 \frac{2}{5} \left(\frac{2}{5} Z_6 \frac{1}{\cos \beta} - Z_1'' \right) 2 \frac{5}{3} = 0.$$

После подстановки в уравнение $\frac{1}{\cos \beta} = \frac{5}{4}$ и приведения подобных членов получим:

$$16Z_1'' - 7Z_6 = 200\alpha. \quad (d)$$

Ввиду простоты полученных (с и d) решаем их относительно Z_1'' и Z_4'' и подставляем в уравнения (a) и (b).

Последовательно будем иметь:

$$Z_1'' = \frac{200\alpha + 7Z_6}{16},$$

$$Z_4'' = \frac{8Z_6 - 200\alpha - 7Z_6}{16}$$

и из уравнений (а) и (б) получаем:

$$\frac{36}{16}(200\alpha + 7Z_5) + \frac{2}{16}(8Z_6 - 200\alpha - 7Z_3) + 6Z_5 - 1,5Z_6 = 360\alpha,$$

$$\frac{2}{16}(200\alpha + 7Z_5) + \frac{10}{16}(8Z_6 - 200\alpha - 7Z_3) + 2,25Z_5 - 1,5Z_6 = 200\alpha.$$

Решение этих уравнений дает:

$$Z_5 = -1,070\alpha; \quad Z_6 = 85,332\alpha;$$

$$Z_1'' = 12,032\alpha; \quad Z_3'' = 30,636\alpha.$$

Ординаты эпюры моментов по концам стержней, вычисленные по найденным значениям неизвестных, определяются следующими величинами:

у узла *o*:

$$M_{01} = 2 \cdot 2 \cdot 12,032\alpha + 6 \cdot \frac{2}{4} \cdot 1,070\alpha + 200\alpha = 251,34\alpha;$$

у узла *1*:

$$M_{10} = -100,52\alpha;$$

$$M_{12} = 39,14\alpha;$$

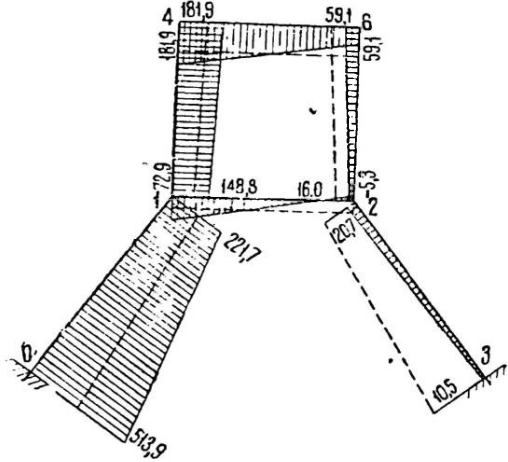
$$M_{14} = 61,41\alpha;$$

у узла *4*:

$$M_{41} = 61,38\alpha;$$

$$M_{45} = 61,39\alpha.$$

На черт. 304 построена суммарная эпюра моментов по данным, полученным при расчетах на симметричный и обратно симметричный нагрев. Пунктирными линиями показана эпюра при симметричном нагреве и к ней прибавлена эпюра при несимметричном нагреве.



Черт. 304.

§ 70. ВЛИЯНИЕ ЛИНЕЙНЫХ СМЕЩЕНИЙ И ПОВОРОТОВ СЕЧЕНИЙ В ОПОРАХ

Всякое смещение опорных точек рамы можно разложить на горизонтальное и вертикальное линейное смещение и поворот опорного сечения. Каждый из этих видов смещений вызывает соответственные смещения узлов рамы и перекосы осей ее стержней. Последние в свою очередь вызывают сопротивление стержней в виде реактивных моментов и усилий, которые вносятся в качестве известных членов в канонические уравнения по методу деформаций.

Вывод выражений для смещений узлов делается теми же приемами, которые были использованы при определении смещений в рамах с непараллельными стойками и при изучении влияния изменения температуры. Рама предполагается шарнирной во всех узлах и опорных точках; неизменяемость ее обеспечивается введением дополнительных связей, по направлению которых смещения принимаются за неизвестные. Смещения всех узлов каждого яруса выражаются в функции смещения опоры и функции Z_n смещения одного из узлов этого же яруса. При составлении выражений для смещений узлов считают, что длины стержней не изменяются под действием продольных сил.

Разберем на конкретных случаях рам процесс составления выражений для смещений узлов, вызываемых смещениями в опорных точках.

Предположим, что рама, показанная на черт. 305, имеет просадку средней опоры на величину Δh . Эта просадка вызовет смещение узла 2 по вертикали на

величину Δh и заставит сместиться узлы 1 и 2, вращая стержни 0—1 и 4—3 вокруг их неподвижных концов 0 и 4. Примем за неизвестное Z_n смещение по горизонтали узла 1, тогда относительные смещения всех стержней определятся следующими выражениями:

$$\begin{aligned} \text{стойка } 0-1 \quad \delta_{10} &= Z_n \frac{1}{\cos \alpha}, \\ \text{„ } 5-2 \quad \delta_{25} &= Z_n, \\ \text{„ } 3-4 \quad \delta_{34} &= Z_n + \Delta h \operatorname{tg} \beta, \\ \text{ригель } 1-2 \quad \delta_{12} &= -Z_n \operatorname{tg} \alpha + \Delta h, \\ 2-3 \quad \delta_{23} &= -\Delta h. \end{aligned}$$

Если та же опора рамы получит горизонтальное смещение (черт. 306), то путем рассуждений, аналогичных предыдущим, можно написать выражения относительных смещений концов стержней для этого случая.

Примем за неизвестное смещение узла 1, тогда относительное смещение концов

$$\begin{aligned} \text{стойки } 0-1 \quad \delta_{01} &= Z_n \frac{1}{\cos \alpha}, \\ 2-5 \quad \delta_{25} &= Z_n - \Delta l, \\ \text{„ } 3-4 \quad \delta_{34} &= Z_n - \Delta l, \\ \text{ригеля } 1-2 \quad \delta_{12} &= -Z_n \operatorname{tg} \alpha, \\ 2-3 \quad \delta_{23} &= 0. \end{aligned}$$

Все знаки внесены в зависимости от поворота оси стержня по ходу (+) или против хода (−) часовой стрелки.

Если опорное сечение той же средней стойки и повернется на угол ψ_0 , то горизонтальное смещение узла 2 в общей деформации рамы определится выражением:

$$\delta_{25} = Z_n + l_{25} \psi_0 \operatorname{tg} \alpha.$$

Это выражение является основным для определения относительных смещений для всех стержней.

Все относительные смещения должны быть учтены при составлении канонических уравнений, в которые они вводятся с умножением их на числовую величину моментов или усилий, данных в табл. 49 для поворота $\psi = \frac{1}{l}$.

Составление канонических уравнений с учетом влияния смещения в опорах проводится в том же порядке, как это делается при учете влияния температуры (§ 69).

§ 71. ЛИНИИ ВЛИЯНИЯ

1. Построение линий влияния неизвестных (углов поворота и смещений узлов). Как известно, линия влияния всякого перемещения может быть построена как эпюра прогибов от момента или силы, равных единице и приложенных по направлению изучаемого перемещения. Это положение остается в силе для по-

строения линий влияния поворота и смещений узлов, принимаемых за неизвестные в расчетах по методу деформаций.

Для того чтобы построить линию влияния угла поворота Z в какой-либо раме, надо приложить по направлению поворота момент $\overline{M}_1 = 1$, который войдет в систему канонических уравнений в качестве грузового члена:

$$r_{11}Z_1' + r_{12}Z_2' + \dots + r_{1n}Z_n' + 1 = 0,$$

$$r_{21}Z_1' + r_{22}Z_2' + \dots + r_{2n}Z_n' = 0,$$

$$r_{n1}Z_1' + r_{n2}Z_2' + \dots + r_{nn}Z_n' = 0.$$

Совместным решением этих уравнений определяются неизвестные Z_1', Z_2', \dots, Z_n' при действии $\overline{M}_1 = 1$. Зная же их, можно построить линию влияния Z_1 на протяжении всей линии действия нагрузки как эпюру прогибов, создаваемую этими неизвестными по длине всех стержней.

Для построения линии влияния угла поворота Z_2 надо приложить момент $\overline{M}_2 = 1$ по направлению этого угла поворота и составить новую систему канонических уравнений:

$$r_{11}Z_1'' + r_{12}Z_2'' + \dots + r_{1n}Z_n'' = 0,$$

$$r_{21}Z_1'' + r_{22}Z_2'' + \dots + r_{2n}Z_n'' + 1 = 0,$$

$$r_{n1}Z_1'' + r_{n2}Z_2'' + \dots + r_{nn}Z_n'' = 0,$$

из которых определяются новые значения неизвестных, выраженные в долях $\overline{M}_2 = 1$, что позволит построить линию влияния Z_2 .

Этот процесс должен быть повторен для всех неизвестных поворотов и смещений, включенных в раму в качестве дополнительных связей.

Вычислительный процесс облегчается тем, что коэффициенты при неизвестных во всех системах канонических уравнений остаются одинаковыми и следовательно при решении уравнений способом Гаусса потребуются пересчет только столбцов с грузовыми членами. Возможно также использование обратного хода (§ 54).

Самое построение линий влияния, как эпюр прогибов, упрощается благодаря тому, что каждый стержень в раме рассматривается или как закрепленный обоими концами или как закрепленный одним концом и свободно опертый на другом. В таких стержнях уравнения ординат эпюры прогибов легко могут быть получены из обобщенного уравнения упругой кривой и другими приемами. Покажем, как определить их по данным табл. 49, основываясь на взаимности между величиной реактивного момента r_{kp} или реактивной силы r_{np} , вызываемых действием силы $P = 1$, приложенной к стержню, и величиной перемещения δ_{pk} под грузом P , вызываемого единичным поворотом или смещением того же опорного сечения согласно формуле (182):

$$r_{kp} = -\delta_{pk} \quad \text{и} \quad r_{np} = -\delta_{pn}.$$

Примем: начало координат на левом конце бруса; положительное направление оси Y книзу; положение груза определяется отрезком $u = \frac{x}{l}$; знаки углов поворота и смещений положительны, т. е. они вращают ось стержня по ходу часовой стрелки.

Стержень заделан обоими концами.

1) при повороте левого конца на угол $\overline{Z} = 1$ (табл. 49 схема 2 — M_{ab}):

$$v = \frac{x(l-x)^2}{l^2} = u(1-u)^2 l; \quad (200)$$

2) при повороте правого конца на угол $\overline{Z} = 1$ (табл. 49 схемы 2 — M_{ba}):

$$y = -\frac{x^2(l-x)}{l^2} = -u^2(1-u) l; \quad (201)$$

3) при линейном смещении правого конца на $\bar{Z}=1$ (табл. 49 схема 2 — B):

$$v = \frac{1}{l^3} x^3 (3l - 2x) = u^3 (3 - 2u); \quad (202)$$

4) при линейном смещении левого конца на $\bar{Z}=1$:

$$y = - \left[1 - \frac{1}{l^3} x^3 (3l - 2x) \right] = -1 + u^3 (3 - 2u). \quad (203)$$

Стержень заделан одним концом и свободно оперт на другом

1) при повороте левого заделанного конца на угол $\bar{Z}=1$:

$$v = \frac{1}{2l^2} x (l - x) (2l - x) = \frac{1}{2} u (1 - u) (2 - u) l; \quad (204)$$

2) при линейном смещении того же конца на отрезок $\bar{Z}=1$:

$$y = - \frac{1}{2l^3} (l - x) (2l^3 + 2lx - x^3) = - (1 - u) - \frac{1}{2} u (1 - u) (2 - u); \quad (205)$$

3) при повороте правого заделанного конца на угол $\bar{Z}=1$ (табл. 49 схема 8 — $M_{об}$):

$$y = - \frac{1}{2l^2} x (l^3 - x^3) = - \frac{1}{2} u (1 - u^3) l; \quad (206)$$

4) при линейном смещении того же конца на $\bar{Z}=1$ (табл. 49 схема 8 — B):

$$y = \frac{1}{2l^3} x (3l^3 - x^3) = \frac{1}{2} u (3 - u^3) = u + \frac{1}{2} u (1 - u^3). \quad (207)$$

В табл. 52 приведены данные для вычисления ординат упругих линий осей стержней по уравнениям (200)—(207) для значений u , взятых с интервалами 0,05, что обеспечивает достаточную точность построения линий влияния.

Таким образом построение линий влияния неизвестных сводится к перемножению чисел табл. 52 на величины Z_1, Z_2, \dots, Z_n , определяемые для каждой линии влияния по своей системе канонических уравнений. Такое построение линий влияния сделано в примере 26.

Таблица 52

Данные для вычисления ординат упругих линий осей стержней

| u | $u(1-u)^2$ | $u^2(1-u)$ | $\frac{1}{2} u(1-u)(2-u)$ | $\frac{1}{2} u(1-u^3)$ | $u^2(3-2u)$ | $u(1-u)(1-2u)$ | $(1-u)$ |
|------|------------|------------|---------------------------|------------------------|-------------|----------------|---------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1,00 |
| 0,05 | 0,0451 | 0,0024 | 0,0463 | 0,0249 | 0,0075 | 0,0425 | 0,95 |
| 0,10 | 0,0810 | 0,0090 | 0,0855 | 0,0495 | 0,0280 | 0,0720 | 0,90 |
| 0,15 | 0,1084 | 0,0191 | 0,1179 | 0,0733 | 0,0608 | 0,0802 | 0,85 |
| 0,20 | 0,1280 | 0,0320 | 0,1440 | 0,0960 | 0,1040 | 0,0960 | 0,80 |
| 0,25 | 0,1406 | 0,0469 | 0,1640 | 0,1172 | 0,1563 | 0,0937 | 0,75 |
| 0,30 | 0,1470 | 0,0630 | 0,1785 | 0,1365 | 0,2160 | 0,0840 | 0,70 |
| 0,35 | 0,1479 | 0,0796 | 0,1877 | 0,1536 | 0,2818 | 0,0632 | 0,65 |
| 0,40 | 0,1440 | 0,0960 | 0,1920 | 0,1680 | 0,3520 | 0,0460 | 0,60 |
| 0,45 | 0,1361 | 0,1114 | 0,1918 | 0,1794 | 0,4253 | 0,0247 | 0,55 |
| 0,50 | 0,1250 | 0,2505 | 0,1875 | 0,1875 | 0,5000 | 0,000 | 0,50 |
| 0,55 | 0,1114 | 0,1361 | 0,1794 | 0,1918 | 0,5747 | -0,0247 | 0,45 |
| 0,60 | 0,0960 | 0,1440 | 0,1680 | 0,1920 | 0,6480 | -0,0480 | 0,40 |
| 0,65 | 0,0796 | 0,1479 | 0,1536 | 0,1877 | 0,7182 | -0,0682 | 0,35 |
| 0,70 | 0,0630 | 0,1470 | 0,1365 | 0,1785 | 0,7840 | -0,0840 | 0,30 |
| 0,75 | 0,0469 | 0,1406 | 0,1172 | 0,1640 | 0,8437 | -0,0937 | 0,25 |
| 0,80 | 0,0320 | 0,1280 | 0,0960 | 0,1440 | 0,8960 | -0,0960 | 0,20 |
| 0,85 | 0,0191 | 0,1084 | 0,0733 | 0,1173 | 0,9392 | -0,0892 | 0,15 |
| 0,90 | 0,0090 | 0,0810 | 0,0495 | 0,0855 | 0,9720 | -0,0720 | 0,10 |
| 0,95 | 0,0024 | 0,0451 | 0,0249 | 0,0463 | 0,9925 | -0,0425 | 0,05 |
| 1,00 | 0,0 | 0,00 | 0,00 | 0,000 | 1,000 | 0,000 | 1,00 |

2. Построение линий влияния внутренних усилий и моментов. Построение линий влияния моментов и поперечных сил делается путем рассмотрения каждого стержня под действием концевых моментов и нагрузки силой $P=1$. В величину концевых моментов входят моменты как от нагрузки, так и от углов поворота и линейных смещений концевых сечений:

а) Стержень, заделанный обоими концами. Если рассматривать линию влияния моментов в непосредственной близости справа от опоры m (черт. 307), то уравнение ее определится выражением:

$$M_m = y_m = 4i_{mk}y_{zm} + 2i_{mk}y_{zk} - 6\frac{i}{l}y_{zn} - M_{mp} \quad (208)$$

В этом выражении:

$M_m = y_m$ — ординаты линии влияния момента в сечении у опоры m ;

$y_{zm} = u(1-u^2)lZ_m$ — ордината линии влияния в том же сечении от поворота узла m на угол Z_m ;

$y_{zk} = -u^2(1-u)lZ_k$ — ордината линии влияния в том же сечении от поворота узла k на угол Z_k ;

$y_{zn} = [1-u^2(3-2u)]Z_n$ — ордината линии влияния в том же сечении от смещения узла k на величину Z_n ;

$M_{mp} = y_{mp} = u(1-u^2)l$ — ордината линии влияния в том же сечении от груза $P=1$, находящегося на стержне на расстоянии

$u = \frac{x}{l}$ от левого конца.

Аналогичным образом уравнение линии влияния момента в сечении, лежащем непосредственно слева от конца k , напишется так:

$$M_k = y_k = -\left(2i_{mk}y_{zm} + 4i_{mk}y_{zk} - 6\frac{i_{km}}{l}y_{zn} + M_{kp}\right). \quad (209)$$

Если не будет иметь место смещение опор и груз $P=1$ будет находиться вне стержня, то два последних члена в выражениях (208) и (209) выпадут.

Рассмотрим теперь составление уравнения линии влияния момента в сечении на расстоянии a от левой опоры. Основанием для составления этого уравнения служит выражение момента в сечении стержня, заделанного двумя концами:

$$M_a = M^0 + M_m \frac{l-a}{l} + M_k \frac{a}{l}, \quad (210)$$

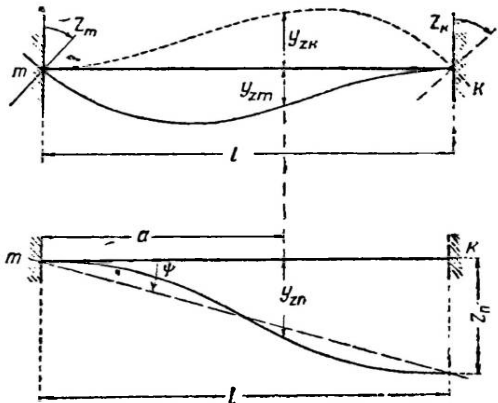
где $M^0 = y_p^0$ — ордината линии влияния момента в сечении стержня, свободно лежащего на опорах, от груза $P=1$, приложенного на расстоянии x от левой опоры.

При положении груза левее сечения:

$$y_p^0 = \frac{x(l-a)}{l} = u(l-a).$$

При положении груза $P=1$ правее сечения:

$$y_p^0 = \frac{a(l-x)}{l} = a(1-u).$$



Черт. 307.

Подставив в выражение (210) значения M^0 , M_m и M_k в их развернутом виде, получим:

$$M_a = y_a = u(l-a) + \left[4iy_{zm} + 2iy_{zk} - 6\frac{i}{l}y_{zn} - u(l-u)^2 l \right] \frac{l-a}{l} - \left[2iy_{zm} + 4iy_{zk} - 6\frac{i}{l}y_{zn} + u^2(1-u)l \right] \frac{a}{l}. \quad (211)$$

После приведения подобных членов получим:

$$y_a = u(l-a) + 2\frac{i}{l}[y_{zm}(2l-3a) + y_{zk}(l-3a)] - [u(1-u)^2(l-a) + u^2(1-u)a] - 6\frac{i}{l^2}(l-2a)y_{zn}. \quad (212)$$

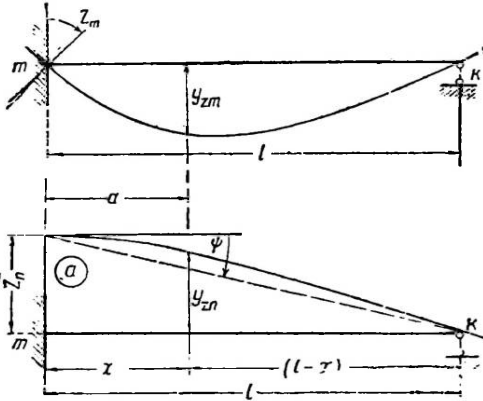
Значения y_{zm} , y_{zk} и y_{zn} должны быть взяты по уравнениям (200)—(207).

Для построения линии влияния поперечной силы уравнение ее должно быть составлено по выражению:

$$Q_a = Q_a^0 + \frac{1}{l}(M_k - M_m).$$

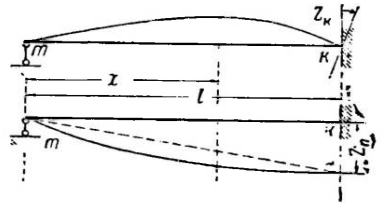
В развернутом виде оно напишется так:

$$y_a = \frac{l-a}{l} + 6\frac{i}{l}\left(\frac{2}{l}y_{zn} - y_{zm} - y_{zk}\right) + u(1-u)^2 - u^2(1-u). \quad (213)$$



Черт. 308.

б) Стержень, заделанный одним концом и свободно опертый на другом. Мы разобрали достаточно подробно составление уравнений линии влияния внутренних моментов и усилий в стержне, заделанном обоими кон-



Черт. 309.

цами. Ниже мы без подробного вывода даем уравнения линий влияния в стержне, заделанном одним концом и свободно опертом на другом.

Закреплен левый конец (черт. 308).

Линия влияния момента в сечении в непосредственной близости от заделки:

$$M_m = y_m = 3iy_{zm} - 3\frac{i}{l}y_{zn} - \frac{l}{2}u(1-u)(2-u). \quad (214)$$

Линия влияния момента в сечении на расстоянии a от левого конца; груз P — слева от сечения:

$$M_a = y_a = u(l-a) + 3i\left(y_{zm} - \frac{1}{l}y_{zn}\right) \frac{l-a}{l} - \frac{1}{2}u(1-u)(2-u)(l-a). \quad (215)$$

Линия влияния поперечной силы в том же сечении:

$$Q_a = y_a = \frac{1}{l}(l-a) + 3\frac{i}{l}\left(y_{zm} - \frac{1}{l}y_{zn}\right) - \frac{1}{2}u(1-u)(2-u). \quad (216)$$

Закреплен правый конец (черт. 309).

Линия влияния момента в сечении в непосредственной близости слева от заделки:

$$M_k = y_k = - \left[3i y_{zk} - 3 \frac{i}{l} y_{zn} + \frac{l}{2} u (1 - u^2) \right]. \quad (217)$$

Линия влияния момента в сечении на расстоянии a от левого конца, груз слева от сечения:

$$M_a = y_a = u(l - a) - 3i \left(y_{zk} - \frac{1}{l} y_{zn} \right) \frac{a}{l} - \frac{1}{2} u (1 - u^2) a. \quad (218)$$

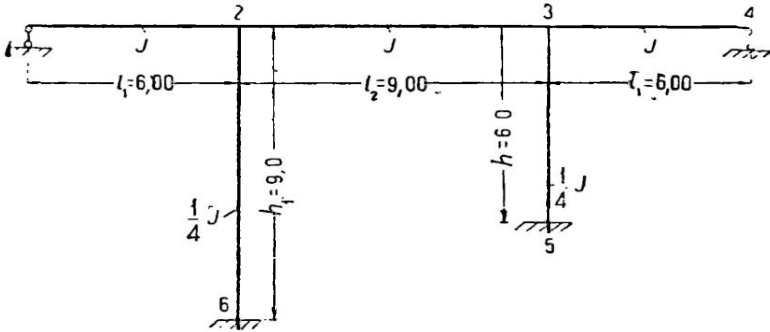
Линия влияния поперечной силы в том же сечении:

$$Q_a = y_a = \frac{l - a}{l} - 3 \frac{i}{l} \left(y_{zk} - \frac{1}{l} y_{zn} \right) - \frac{1}{2} u (1 - u^2). \quad (219)$$

Применение этих формул и построение линий влияния показано в нижеприводимом примере.

Пример 26. Рассмотрим построение линий влияния в раме (черт. 310) путепроводного типа, разобранный в примере 18. Такое параллельное рассмотрение одной и той же рамы даст возможность сделать сопоставление расчетов по методу сил и по методу деформаций.

При расчете по методу деформаций эта система имеет три неизвестных: два угла поворота Z_2 и Z_3 и линейное смещение Z_n . Построение линий влияния требует решения трех систем канонических уравнений.



Черт. 310.

Для определения неизвестных, входящих в уравнение ординат линии влияния угла поворота Z_2 , рассматриваем раму под действием момента, равного единице, приложенного в узле 2; система канонических уравнений для этого случая будет:

$$(3i_{12} + 4i_{23} + 4i_{25}) Z_2 + 2i_{23} Z_3 - 6 \frac{i_{26}}{l_{26}} Z_n + 1 = 0,$$

$$2i_{23} Z_2 + (4i_{23} + 4i_{35} + 3i_{34}) Z_3 - 6 \frac{i_{35}}{l_{35}} Z_n = 0,$$

$$6 \frac{i_{26}}{l_{26}} \left(\frac{2}{l_{26}} Z_n - Z_2 \right) + 6 \frac{i_{35}}{l_{35}} \left(\frac{2}{l_{35}} Z_n - Z_3 \right) = 0.$$

Входящие в эти уравнения погонные жесткости i определяются величинами:

$$i_{12} = i_{34} = \frac{1}{6} EJ = 1,5 \frac{EJ}{9}; \quad i_{26} = \frac{1}{9} EJ_{26} = \frac{1}{4 \cdot 9} EJ;$$

$$i_{23} = \frac{1}{9} EJ; \quad i_{35} = \frac{1}{6} EJ_{35} = \frac{3}{8 \cdot 9} EJ.$$

В последующем расчете величины погонных жесткостей i введены уменьшенными в $\frac{9}{EJ}$ раз, а потому все получаемые результаты должны быть помножены на множитель:

$$c = \frac{9}{EJ}.$$

По подстановке значений погонных жесткостей i и длин $l_{23} = 9$, $l_{35} = 6$ в составленные уравнения последние приводятся к следующему виду:

$$\begin{aligned} 9,5Z_2 + 2Z_3 - 0,166Z_n &= -1, \\ 2Z_2 + 10Z_3 - 0,375Z_n &= 0, \\ -0,1667Z_2 - 0,375Z_3 + 0,162Z_n &= 0. \end{aligned}$$

Для определения неизвестных, входящих в уравнение ординат линии влияния угла поворота в узле 3, рассматриваем раму под действием момента, равного единице, приложенного в узле 3. Система канонических уравнений будет:

$$\begin{aligned} 9,5Z_2 + 2Z_3 - 0,1667Z_n &= 0, \\ 2Z_2 + 10Z_3 - 0,375Z_n &= -1, \\ -0,1667Z_2 - 0,375Z_3 + 0,162Z_n &= 0. \end{aligned}$$

Для определения неизвестных, входящих в уравнение ординат линии влияния линейного смещения Z_n , рассматриваем раму под действием силы, равной единице, приложенной по направлению ригеля; система канонических уравнений получится в виде:

$$\begin{aligned} 9,5Z_2 + 2Z_3 - 0,1667Z_n &= 0, \\ 2Z_2 + 10Z_3 - 0,375Z_n &= 0, \\ -0,1667Z_2 - 0,375Z_3 + 0,162Z_n &= -1. \end{aligned}$$

Как было указано выше, коэффициенты при неизвестных во всех канонических уравнениях остаются без изменения, меняются только свободные (грузовые) члены.

Если поставить вопрос о построении линий влияния только для стержней ригеля, то решения третьей системы уравнений не требуется, так как горизонтальное смещение не вызывает деформации оси ригеля.

Решение этих систем проводим способом Гаусса, для чего составляем табл. 53.

Таблица 53

Решение канонических уравнений примера 26 по способу Гаусса

| № уравнений | Множители α | Z_2 | Z_3 | Z_n | $M_2 = 1$ | $M_3 = 1$ | $M_n = 1$ |
|---|--|--------------------|-----------------------------|------------------------------|-------------------------|-------------------|--------------|
| I | | 9,5 | 2 | -0,1667 | -1 | 0 | 0 |
| II I · α_{12} | $\alpha_{12} = -0,2105$ | 2,0 -2,0 | 10 -0,430 | -0,375 +0,035 | 0 0,2105 | -1 0 | 0 |
| II ^I | | 0 | 9,579 | -0,340 | 0,2105 | -1 | 0 |
| III I · α_{13} II ^I · α_{23} | $\alpha_{13} = 0,0175$ $\alpha_{23} = 0,0355$ | -0,1607 +0,1667 | -0,375 +0,0350 +0,340 | +0,162 -0,0029 -0,0121 | 0 -0,0175 +0,0074 | 0 0 -0,0355 | -1 0 0 |
| III ^{II} | | - | - | 0,147 | -0,0101 | -0,0355 | -1 |

Определяем неизвестные.

При действии момента $M_2 = 1$:

$$Z_n = -\frac{-0,0101}{0,1470} c = 0,0685c,$$

$$Z_3 = \left(-\frac{0,2105}{9,579} + 0,0355 \cdot 0,0685 \right) c = -0,0186c,$$

$$Z_2 = \left(\frac{1}{9,5} + 0,2105 \cdot 0,0186 + 0,0175 \cdot 0,0685 \right) c = 0,1104c.$$

При действии момента $M_3 = 1$:

$$Z_n = \frac{0,0355}{0,1479} c = 0,2415c,$$

$$Z_3 = \left(\frac{1}{9,578} + 0,0355 \cdot 0,2415 \right) c = 0,1130c,$$

$$Z_2 = (-0,2105 \cdot 0,1130 + 0,0175 \cdot 0,2415) c = -0,0186c.$$

При действии усилия $Q = 1$:

$$Z_n = \frac{1}{0,1470} c = 6,803c,$$

$$Z_3 = 0,0355 \cdot 6,803c = 0,2415c,$$

$$Z_2 = [-0,2105 \cdot 0,2415 + 0,0175 \cdot 6,803] c = 0,0685c.$$

По этим величинам углов поворота и смещений узлов вычисляем при помощи табл. 52 ординаты линий влияния неизвестных по следующим уравнениям:
Неизвестное — угол поворота Z_2 .

Стержень 1—2 $y = -0,1104 \frac{6}{2} u(1-u^2),$

2—3 $y = 9 \cdot 0,1104u(1-u)^2 + 9 \cdot 0,0186u(1-u),$

3—4 $y = -6 \cdot 0,0186 \frac{1}{2} u(1-u)(2-u).$

Неизвестное — угол поворота Z_3 .

Стержень 1—2 $y = 0,0186 \frac{6}{2} u(1-u^2),$

2—3 $y = -9 \cdot 0,0186u(1-u)^2 - 9 \cdot 0,1130u^2(1-u),$

3—4 $y = 6 \cdot 0,1130 \frac{1}{2} u(1-u)(2-u).$

Неизвестное — смещение Z_n по ригелю:

Стержень 1—2 $y = -0,0685 \frac{6}{2} u(1-u^2),$

2—3 $y = 9 \cdot 0,685 \cdot u(1-u)^2 - 9 \cdot 0,2415u^2(1-u),$

3—4 $y = 6 \cdot 0,2415 \frac{1}{2} u(1-u)(2-u).$

Вычисление сделано в табличной форме (табл. 54) и ограничено стержнями ригеля, по которым перемещается груз.

Таблица 54

Вычисление ординат линий влияния неизвестных, увеличенных в $\frac{EJ}{9}$ раз

| Стержень | Положение груза | Линия влияния Z_2 | | | Линия влияния Z_3 | | | Линия влияния Z_n | | |
|----------|-----------------|---------------------|--------|--------|---------------------|---------|--------|---------------------|---------|--------|
| | | | | | | | | | | |
| 1—2 | 0 | — | — | 0 | — | — | 0 | — | — | 0 |
| | 0,2 | — | — | -0,064 | — | — | 0,011 | — | — | -0,039 |
| | 0,4 | — | — | -0,111 | — | — | 0,020 | — | — | -0,069 |
| | 0,6 | — | — | -0,127 | — | — | 0,023 | — | — | -0,079 |
| | 0,8 | — | — | -0,095 | — | — | 0,017 | — | — | -0,059 |
| | 1,0 | — | — | 0 | — | — | 0 | — | — | 0 |
| 2—3 | 0,2 | 0,1272 | 0,0053 | 0,132 | -0,0211 | -0,0325 | -0,054 | -0,0789 | -0,0696 | +0,009 |
| | 0,4 | 0,1431 | 0,0161 | 0,159 | -0,0241 | -0,6976 | -0,122 | -0,0888 | -0,2086 | -0,120 |
| | 0,5 | 0,1242 | 0,0211 | 0,145 | -0,0211 | -0,1271 | -0,148 | 0,0771 | -0,2717 | -0,194 |
| | 0,6 | 0,0953 | 0,0241 | 0,119 | -0,0161 | -0,1464 | -0,163 | 0,0592 | -0,3180 | -0,254 |
| | 0,8 | 0,0318 | 0,0214 | 0,053 | -0,0053 | -0,1302 | -0,135 | 0,0197 | -0,2782 | -0,258 |
| | 1,0 | — | — | 0 | — | — | 0 | — | — | 0 |
| 3—4 | 0,2 | — | — | -0,017 | — | — | 0,098 | — | — | 0,209 |
| | 0,4 | — | — | -0,023 | — | — | 0,130 | — | — | 0,278 |
| | 0,6 | — | — | -0,020 | — | — | 0,114 | — | — | 0,243 |
| | 0,8 | — | — | -0,011 | — | — | 0,065 | — | — | 0,159 |
| | 1,0 | — | — | 0 | — | — | 0 | — | — | 0 |

На черт. 311 и 312 показаны контуры линий влияния Z_2 и Z_n .

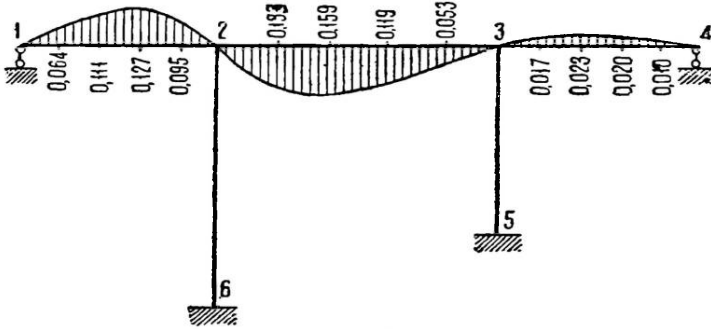
Переходим к построению линий влияния внутренних усилий и моментов.

Рассмотрим построение линии влияния в сечении по середине среднего пролета:

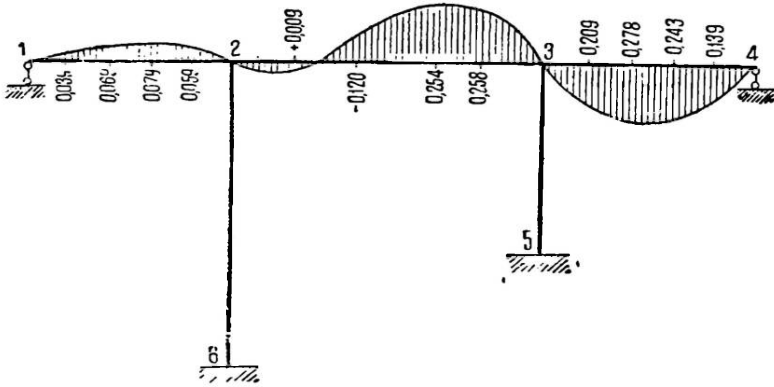
для него $a = \frac{1}{2} l$, поэтому уравнение (212), определяющее ординату линии влияния моментов, приводится к такому виду:

$$y = u \frac{l_{22}}{2} + i_{23} (y_{z2} - y_{z3}) - [u(1-u)^2 + u^2(1-u)] \frac{l_{23}}{2}.$$

По этому уравнению произведено вычисление ординат при положении груза, равного единице, в различных сечениях ригеля; вычисление приведено в табл. 55. Полученные значения ординат по величине соответствуют ординатам линии влияния, показанной на черт. 239,а.



Черт. 311.



Черт. 312.

Таблица 55

Вычисление ординат линии влияния момента в сечении по середине среднего пролета рамы (пример 26)

| Стержень | u | y^0 | y_{22} | $-y_{23}$ | $-u(1-u)^2 \cdot 4,5$ | $-u^2(1-u) \cdot 4,5$ | y |
|----------|-----|-------|----------|-----------|-----------------------|-----------------------|-------|
| 1—2 | 0,2 | — | 0,064 | 0,011 | — | — | 0,075 |
| | 0,4 | — | 0,111 | 0,020 | — | — | 0,131 |
| | 0,6 | — | 0,127 | 0,023 | — | — | 0,150 |
| | 0,8 | — | 0,096 | 0,017 | — | — | 0,113 |
| 2—3 | 0,2 | 0,9 | 0,133 | 0,054 | -0,576 | -0,144 | 0,367 |
| | 0,4 | 1,8 | 0,159 | 0,122 | -0,648 | -0,432 | 1,001 |
| | 0,5 | 2,25 | 0,145 | 0,148 | -0,563 | -0,563 | 1,417 |
| | 0,6 | 1,8 | 0,119 | 0,163 | -0,432 | -0,648 | 1,002 |
| | 0,8 | 0,9 | 0,053 | 0,136 | -0,144 | -0,576 | 0,369 |
| 3—4 | 0,2 | — | 0,017 | 0,098 | — | — | 0,116 |
| | 0,4 | — | 0,023 | 0,130 | — | — | 0,153 |
| | 0,6 | — | 0,020 | 0,114 | — | — | 0,134 |
| | 0,8 | — | 0,011 | 0,065 | — | — | 0,076 |

В качестве второго примера рассмотрим построение линии влияния момента в сечении на верхнем конце левой ноги. Для определения ординат этой линии влияния следует воспользоваться уравнением (209), которое в применении к рассматриваемому случаю напишется так:

$$y = -4i_{26}u_{22} + 6i_{26} \frac{1}{l_{26}} y_{2n}.$$

Так как

$$i_{26} = \frac{1}{4} \text{ и } l_{26} = 9, \text{ то } y = -y_{22} - \frac{1}{6} y_{2n}.$$

Вычисление сделано в табличной форме (табл. 5б). Величины их в точности соответствуют величинам ординат линии влияния, показанной на черт. 240.

Таблица 5б

Вычисление ординат линии влияния момента в сечении на верхнем конце левой ноги

| Стержень | u | y_{22} | $\frac{1}{6} y_{2n}$ | y |
|----------|-----|----------|-------------------------------|--------|
| 1—2 | 0,2 | 0,064 | $-\frac{1}{6} 0,039 = -0,006$ | 0,058 |
| | 0,4 | 0,111 | $-\frac{1}{6} 0,069 = -0,011$ | 0,100 |
| | 0,6 | 0,127 | $-\frac{1}{6} 0,079 = -0,013$ | 0,114 |
| | 0,8 | 0,096 | $-\frac{1}{6} 0,059 = -0,010$ | 0,085 |
| | 1,0 | 0 | | |
| 2—3 | 0,2 | -0,132 | $\frac{1}{6} 0,009 = 0,001$ | -0,131 |
| | 0,4 | -0,159 | $-\frac{1}{6} 0,120 = -0,020$ | -0,179 |
| | 0,6 | -0,119 | $-\frac{1}{6} 0,254 = -0,042$ | -0,161 |
| | 0,8 | -0,053 | $-\frac{1}{6} 0,258 = -0,043$ | -0,096 |
| | 1,8 | 0 | | |
| 3—4 | 0,2 | 0,017 | $\frac{1}{6} 0,209 = 0,035$ | 0,052 |
| | 0,4 | 0,023 | $\frac{1}{6} 0,278 = 0,046$ | 0,069 |
| | 0,6 | 0,020 | $\frac{1}{6} 0,243 = 0,040$ | 0,060 |
| | 0,8 | 0,011 | $\frac{1}{6} 0,139 = 0,023$ | 0,034 |
| | 1,0 | 0 | | |

§ 72. УЧЕТ ПЕРЕМЕННОСТИ СЕЧЕНИЯ

В расчетах по методу деформации коэффициенты при неизвестных определяются моментами и усилиями, возникающими под действием поворотов и линейных смещений узлов рамы; поэтому переменность сечений по длине стержня влияет на величину этих коэффициентов.

Выведем формулы для учета переменности сечения стержня, закрепленного концами при действии на него поворота и линейного смещения одного из концов и заданной нагрузки.

От действия угла поворота $\bar{Z}_k = 1$ (черт. 313) по концам стержня возникают неизвестные моменты r_{kk} и r_{mk} . Для определения неизвестных рассматриваем стержень, как свободно опертый, в действительном состоянии (черт. 313,б) и в воображаемом состоянии под действием раздельно момента, равного единице, на левом (k) конце (черт. 313,с), вызывающего углы поворотов φ_{kk} и φ_{mk} , и момента, равного единице, на правом конце (черт. 313,д), вызывающего углы поворотов φ_{km} и φ_{mm} .

Применяя теорему о взаимности работы к первому состоянию стержня (черт. 313,б) и каждому из двух других состояний (черт. 313,с и 313,д), получим два следующих уравнения:

$$\begin{aligned} r_{kk} \bar{\varphi}_{kk} - r_{mk} \bar{\varphi}_{mk} &= \bar{Z}_k \cdot 1. \\ -r_{kk} \bar{\varphi}_{km} + r_{mk} \bar{\varphi}_{mm} &= 0. \end{aligned}$$

Из совместного решения этих уравнений получим:

$$r_{kk} = \frac{\bar{\varphi}_{mm}}{\varphi_{kk}\varphi_{mm} - \varphi_{mk}^2}; \quad r_{mk} = \frac{\bar{\varphi}_{mk}}{\varphi_{kk}\varphi_{mm} - \varphi_{mk}^2}. \quad (220)$$

В стержне с постоянным сечением

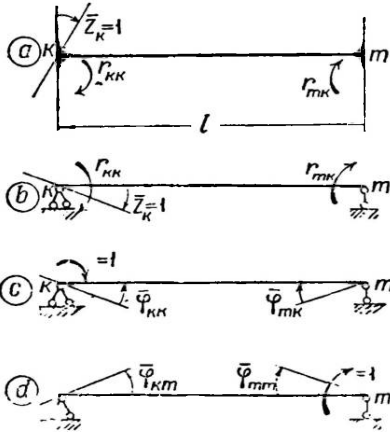
$$\bar{\varphi}_{kk}^0 = \bar{\varphi}_{mm}^0 = 2\bar{\varphi}_{mk}^0 = \frac{l}{3EJ_0}.$$

Подстановка этих значений углов в формулы (220) дает:

$$r_{kk}^0 = \frac{4EJ_0}{l} \quad \text{и} \quad r_{mk}^0 = \frac{2EJ_0}{l},$$

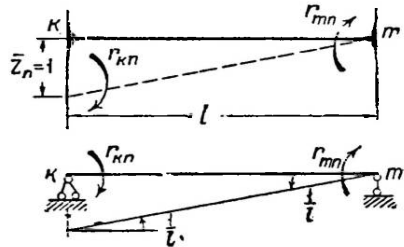
что в точности соответствует формулам (173).

Предположим теперь, что один конец того же стержня сместился на величину $\bar{Z}_k = 1$, вследствие чего ось стержня повернулась на угол $\psi = \frac{\bar{Z}_k}{l} = \frac{1}{l}$ и по



Черт. 313.

концам его возникли моменты r_{kn} и r_{mn} (черт. 314). Для составления уравнений, из которых определяются неизвестные моменты r_{kn} и r_{mn} рассматриваем стержень в действительном состоянии и раздельно в воображаемом состоянии под



Черт. 314.

действием „единичных“ моментов, приложенных по концам k и m стержня (черт. 313, c и d):

$$\begin{aligned} -r_{kn}\bar{\varphi}_{kk} - r_{mn}\bar{\varphi}_{mk} &= -\frac{1}{l}, \\ -r_{kn}\bar{\varphi}_{km} + r_{mn}\bar{\varphi}_{mm} &= -\frac{1}{l}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$r_{kn} = -\frac{1}{l} \frac{\bar{\varphi}_{mm} + \bar{\varphi}_{mk}}{\varphi_{kk}\varphi_{mm} - \varphi_{mk}^2}; \quad r_{mn} = -\frac{1}{l} \frac{\bar{\varphi}_{kk} + \bar{\varphi}_{mk}}{\varphi_{kk}\varphi_{mm} - \varphi_{mk}^2}. \quad (221)$$

Если сечение стержня постоянно, то

$$\bar{\varphi}_{kk}^0 = \bar{\varphi}_{mm}^0 = 2\bar{\varphi}_{mk}^0 = \frac{l}{3EJ_0},$$

и

$$r_{kn}^0 = r_{mn}^0 = -\frac{6EJ_0}{l^2},$$

что в точности соответствует формуле (176).

Действие на тот же стержень какой-либо нагрузки вызывает по концам его неизвестные моменты R_{kp} и R_{mp} ¹ и углы поворота сечений $\bar{\varphi}_{kp}$ и $\bar{\varphi}_{mp}$ (черт. 315)..

¹ Обозначение моментов сохранено по уравнениям (170).

Уравнения, необходимые для определения неизвестных, составляются опять из рассмотрения действительного состояния и двух воображаемых состояний при действии на стержень раздельно единичных моментов на концах k и m (черг. 313, c и d):

$$\begin{aligned} +R_{kp}\bar{\varphi}_{kk} - R_{mp}\bar{\varphi}_{mk} &= \varphi_{kp}, \\ -R_{kp}\bar{\varphi}_{km} + R_{mp}\bar{\varphi}_{mm} &= -\varphi_{mp}. \end{aligned}$$

Из решения их получим:

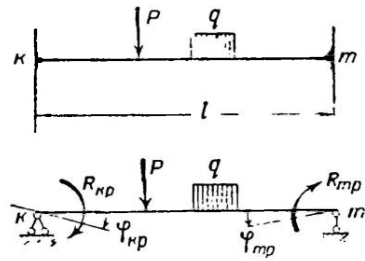
$$R_{kp} = \frac{\varphi_{kp}\bar{\varphi}_{mm} - \varphi_{mp}\bar{\varphi}_{km}}{\bar{\varphi}_{kk}\bar{\varphi}_{mm} - \bar{\varphi}_{mk}^2}; \quad R_{mp} = -\frac{\varphi_{mp}\bar{\varphi}_{kk} - \varphi_{kp}\bar{\varphi}_{km}}{\bar{\varphi}_{kk}\bar{\varphi}_{mm} - \bar{\varphi}_{mk}^2}. \quad (222)$$

Мы, вывели формулы, определяющие моменты по концам стержня переменного сечения с закрепленными концами, и показали, что эти моменты выражаются через углы поворотов $\bar{\varphi}_{kk}$, $\bar{\varphi}_{mm}$ и $\bar{\varphi}_{km}$. Путем аналогичных рассуждений можно показать, что моменты и реакции по концам стержня переменного сечения с одним закрепленным и с другим шарнирно опертым концом также выражаются через угол поворота закрепленного конца.

Таким образом вопрос об учете переменности сечения в стержне связан с определением углов поворотов $\bar{\varphi}_{kk}$, $\bar{\varphi}_{mm}$ и $\bar{\varphi}_{mk}$, что может быть сделано по формуле Мора:

$$\bar{\varphi}_{mk} = \int_s \bar{M}_k \bar{M}_m \frac{ds}{EJ}.$$

В эту формулу момент инерции входит в качестве переменной величины. Вычисление интегралов этого вида не встречает затруднений при изменении сечения стержня по закону прямой и по параболическому закону (см. § 58). Само вычисление облегчается таблицами, разработанными рядом авторов¹. Мы не останавливаемся здесь на рассмотрении принципов составления этих таблиц, так как это не имеет значения для усвоения метода, и считаем, что это рассмотрение следует отнести к курсу железобетонных конструкций, для расчета которых приспособлены упомянутые таблицы.



Черт. 315.

СМЕШАННЫЙ И КОМБИНИРОВАННЫЙ ПРИЕМЫ РАСЧЕТА РАМ

§ 73. ОБЩИЕ УСТАНОВКИ

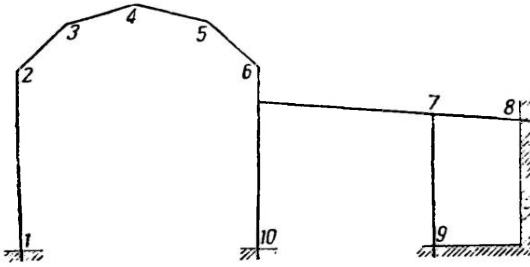
Каждый из изложенных способов расчета статически неопределимых систем — метод сил и метод деформаций — имеет свои преимущества. Благодаря этому является целесообразным в расчетах одних систем применять метод сил, в расчетах других — применять метод деформаций.

Метод сил в одинаковой степени применим как к системам сплошным, так и к фермам, как к системам с прямыми осями, так и к системам с криволинейными и ломаными очертаниями; но применение его сопровождается часто сложным процессом вычисления коэффициентов при неизвестных.

Метод деформаций удобоприменим в расчетах рам, не имеющих большого числа линейных смещений узлов и образованных из прямых стержней со сплошными сечениями. В расчетах таких рам по методу деформаций число уравнений, необходимых для определения неизвестных, обычно меньше, чем при расчете их по методу сил, и вычисление коэффициентов значительно проще. Но эти преимущества теряются при наличии в раме криволинейных и ломаных контуров; наличие их приводит к увеличению числа уравнений, необходимых для расчета, и к более сложному вычислению коэффициентов.

¹ Strassner, Neuere Methoden für Statik d. Rahmentragwerke, Berlin 1925. Акимов-Перец, проф., Расчет рамных систем, Л. 1931; Б. Н. Жемочкин, проф., Способ угловых деформаций, М. 1931 и др.

Несмотря на то, что оба эти метода включают в себя взаимно противоположные по виду неизвестные (силы и перемещения), они имеют большую близость между собой. В обоих методах канонические уравнения могут быть составлены на основании теоремы о взаимности возможных работ. В обоих методах коэффициенты при неизвестных обладают взаимностью. В обоих методах возможны упрощения путем использования прямой и обратной симметрии, группирования неизвестных и т. д.

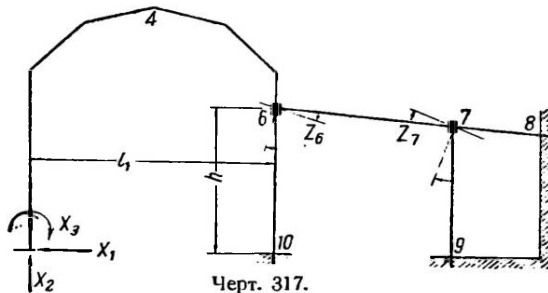


Черт. 316.

Эта общность — сравнительно простое выражение неизвестных в методе сил через неизвестные в методе деформаций и наоборот, а также установленная числовая взаимность (183) между коэффициентами при неизвестных в обоих методах наводят на мысль о возможности совместного использования обоих методов в расчете одной и той же системы, т. е. о возможности применения „смешанного приема“ расчета.

Сущность смешанного приема расчета заключается в том, что одна и та же система рассматривается в одной своей части с устранением некоторых лишних связей, заменяемых соответствующими силами или моментами, а в другой части с введением дополнительных связей, препятствующих поворотам и линейным смещениям, принимаемым за неизвестные. В этих условиях представляется возможным использовать совместные преимущества обоих методов.

Например расчет рамной системы, показанной на черт. 316, по методу сил потребовал бы составления 9 канонических уравнений. Расчет той же системы по методу деформаций потребовал бы составления $7 + 4 = 11$ уравнений. Но если расчет той же рамы провести смешанным приемом, приняв за основную



Черт. 317.

систему, показанную на черт. 317, то для расчета потребуется составить $3 + 2 = 5$ уравнений: три — отрицательные смещения по направлению устраненных связей X_1 , X_2 , X_3 в левой опоре и два — отрицательные момент по направлению введенных связей Z_6 и Z_7 в узлах 6 и 7.

Преимущество расчета смешанным приемом в данном случае очевидно.

§ 74. СОСТАВЛЕНИЕ РАСЧЕТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Разберем процесс составления расчетных уравнений при смешанном методе применительно к системе, показанной на черт. 316.

Примем систему, показанную на черт. 317, за основную. Она получена из заданной устранением опорного закрепления с заменой его силами X_1 и X_2 , моментом X_3 и введением закреплений в узлах 6 и 7 против поворота их на углы Z_6 и Z_7 .

Таким образом основная система в действительном состоянии будет рассматриваться:

- 1) под действием нагрузки P и сил X_1 , X_2 и X_3 ,
- 2) под действием углов поворота Z_6 и Z_7 ,
- 3) при условии, что деформации по направлению указанных сил $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0$, $\Delta_3 = 0$,
- 4) при условии, что сумма моментов по концам стержней, рассматриваемых как балки с заделанными концами в узлах 6 и 7, равна 0:

$$\Sigma M_6 = 0 \text{ и } \Sigma M_7 = 0.$$

Для составления канонических уравнений, необходимых для определения неизвестных, будем последовательно рассматривать основную систему в заданном состоянии и каждом из пяти воображаемых состояний:

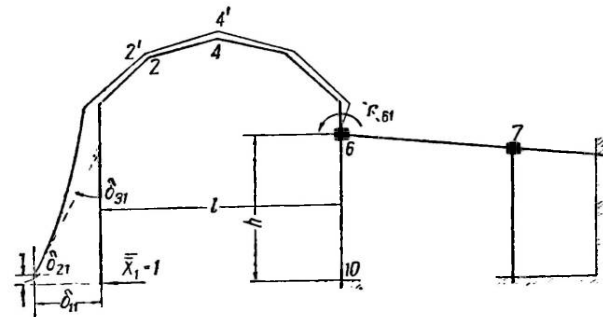
$$\bar{X}_1 = 1; \bar{X}_2 = 1; \bar{X}_3 = 1;$$

$$\bar{Z}_6 = 1; \bar{Z}_7 = 1.$$

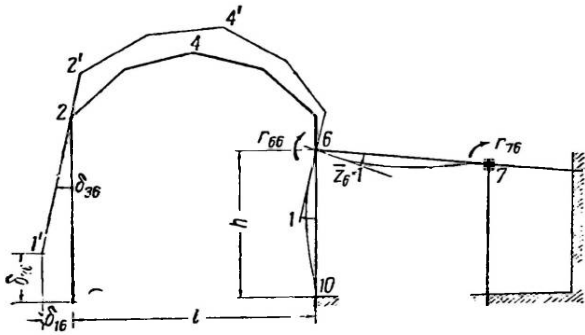
Каждое из этих воздействий будет вызывать соответственное перемещение δ по направлению силовых воздействий и реактивные моменты r по направлению угловых деформаций (черт. 318 и 319). Для наглядности и удобства

коэффициентов при неизвестных и свободные члены в канонических уравнениях, составленных по смешанному приему расчета

| Воздействие | Направление | | | | |
|-----------------|---------------|---------------|---------------|----------|----------|
| | X_1 | X_2 | X_3 | Z_6 | Z_7 |
| $\bar{X}_1 = 1$ | δ_{11} | δ_{21} | δ_{31} | r_{61} | r_{71} |
| $\bar{X}_2 = 1$ | δ_{12} | δ_{22} | δ_{32} | r_{62} | r_{72} |
| $\bar{X}_3 = 1$ | δ_{13} | δ_{23} | δ_{33} | r_{63} | r_{73} |
| $\bar{Z}_6 = 1$ | δ_{16} | δ_{26} | δ_{36} | r_{66} | r_{76} |
| $\bar{Z}_7 = 1$ | δ_{17} | δ_{27} | δ_{37} | r_{67} | r_{77} |
| P | Δ_{1p} | Δ_{2p} | Δ_{3p} | R_{6p} | R_{7p} |



Черт. 318.



Черт. 319.

для наглядности и удобства составления уравнений все символы перемещений и моментов, являющиеся коэффициентами при неизвестных и свободными членами в канонических уравнениях, выписаны в виде матрицы 12.

Пользуясь этими данными, мы можем составить выражение полного перемещения по направлению любого из силовых неизвестных как сумму перемещений от отдельных воздействий. Например выражение полного перемещения по направлению действия силы X_1 напишется так:

$$X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + X_3 \delta_{13} + Z_6 \delta_{16} + Z_7 \delta_{17} + \Delta_{1p} = 0.$$

Точно так же может быть составлено выражение суммы моментов, вызываемых всеми воздействиями в одном из узлов по направлению угла поворота; так например, сумма моментов у узла 6 напишется так:

$$X_1 r_{61} + X_2 r_{62} + X_3 r_{63} + Z_6 r_{66} + Z_7 r_{67} + R_{6p} = 0.$$

Аналогичные уравнения могут быть составлены для каждого неизвестного; число их будет равно числу неизвестных, и они будут иметь вид канонических уравнений.

Отличие этих уравнений, составленных смешанным приемом, от уравнений, составленных по методу сил или методу деформаций, заключается в равнозначности коэффициентов при неизвестных, выражаемых частично через перемещения, частично через моменты. Но произведения, образуемые множением каждого из них на соответствующее ему неизвестное, приводят все члены уравнений к одноименному виду.

Все коэффициенты при неизвестных обладают взаимностью:

$$\delta_{km} = \delta_{mk}; r_{km} = r_{mk}; r_{km} = -\delta_{mk}.$$

Расчетные уравнения могут быть составлены также на основе принципа взаимности возможных работ, рассматривая основную систему каждый раз в двух состояниях: в заданном и в одном из воображаемых состояний под действием или силового единичного воздействия на нее или угла поворота, равного единице, приложенных по направлению неизвестных.

В общем виде эти уравнения будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{21} + X_3 \delta_{31} + Z_6 r_{61} + Z_7 r_{71} + \Delta_{p1} &= 0, \\ X_1 \delta_{16} + X_2 \delta_{26} + X_3 \delta_{36} + Z_6 r_{66} + Z_7 r_{76} + R_{p6} &= 0 \\ &\text{и т. д.} \end{aligned}$$

Знаки при коэффициентах в этих уравнениях должны быть учтены при определении их величины.

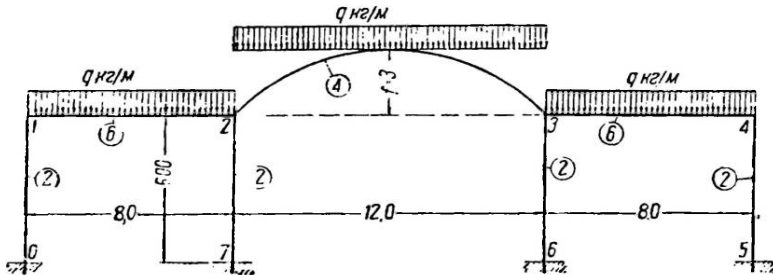
После того как составлены расчетные уравнения, остается совместное решение их для определения неизвестных. В процессе решения возможно использование приемов упрощения для приведения к нулю побочных коэффициентов путем использования симметрии, переносом в центр фиктивных упругих сил, групповыми преобразованиями и т. д.

Процесс вычисления коэффициентов при смешанном способе расчета показан в приводимом ниже примере.

Пример 27. На черт. 320 показана общая схема заданной системы с ее основными размерами, погонными жесткостями и расположением нагрузки. Арка очерчена по параболе. Центр фиктивных упругих сил этой арки находится на высоте $2/3 \cdot f$ от пят. Уравнение оси арки, отнесенное к началу в центре упругих фиктивных сил:

$$y = f \left(\frac{1}{3} - 4 \frac{x^2}{l^2} \right).$$

Применение для расчета этой системы смешанного метода представляется более рациональным, чем применение метода сил или метода деформаций по следующим соображениям.



Черт. 320.

При расчете по методу сил и использовании для расчета условия симметрии требуется определение пяти неизвестных силовых факторов, связанных пятью уравнениями, причем по условиям образования системы определения коэффициентов при неизвестных повлечет достаточно сложные вычисления вследствие распространения эпюр на все стержни.

При расчете по методу деформаций потребуется определение также пяти неизвестных: двух угловых деформаций, двух перемещений (в рамной части и арочной части между узлами 2 и 3) и еще распора в арочной части. Простое составление уравнений и вычи-

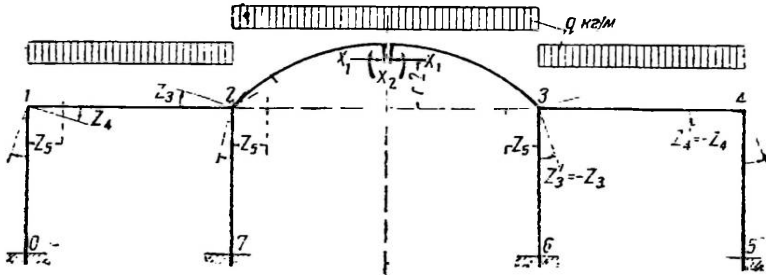
Следию коэффициентов, так выгодно отличающие метод деформаций, в этом случае осложняется вычислением коэффициентов при неизвестном смещении в арочной части, зависящих от изгибающих моментов в арке.

Сложность вычисления коэффициентов устраняется при применении смешанного метода, использующего упрощения, возможные в методе сил и методе деформаций. Внесение в боковые рамные системы закрепления узлов 1 и 2, 3 и 4 против поворотов и линейных смещений с приложением к ним реактивных моментов и сил от нагрузки, действующей на арочную часть в условиях воображаемого нагружения последней, позволяет производить вычисление коэффициентов при неизвестных, рассматривая отдельно боковые части и арочную часть как таковую.

Приняв за основную систему схему, показанную на черт. 321, и учитывая симметричность ее и заданной нагрузки, вводим следующие неизвестные: силы X_1 и момент X_2 по разрезу оси, закрепления в узлах 1 и 2 против поворота их на углы Z_4 , Z_3 и закрепление тех же узлов против смещения их на величину Z_5 . По условию симметрии $Z_3 = -Z_3'$ и $Z_4 = -Z_4'$.

Расчетные уравнения, необходимые для определения неизвестных, напишутся в общем виде так:

$$\begin{aligned} X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + Z_3 \delta_{13} + Z_4 \delta_{14} + Z_5 \delta_{15} + \Delta_{q1} &= 0, \\ X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + Z_3 \delta_{23} + Z_4 \delta_{24} + Z_5 \delta_{25} + \Delta_{q2} &= 0, \\ X_1 r_{31} + X_2 r_{32} + Z_3 r_{33} + Z_4 r_{34} + Z_5 r_{35} + M_{21} + M_{23} &= 0, \\ X_1 r_{41} + X_2 r_{42} + Z_3 r_{43} + Z_4 r_{44} + Z_5 r_{45} + M_{12} &= 0, \\ X_1 r_{51} + X_2 r_{52} + Z_3 r_{53} + Z_4 r_{54} + Z_5 r_{55} &= 0. \end{aligned}$$



Черт. 321.

Коэффициенты при неизвестных определяются по следующим соображениям.

Применяя перенос точки приложения силы \bar{X}_1 и момента \bar{X}_2 в центр фиктивных упругих сил арки (черт. 321), получим:

$$\delta_{21} = \delta_{12} = 0.$$

Далее, закрепив узел 2 в условиях воображаемого состояния (черт. 322, а и б), мы тем самым изолируем рассмотрение единичных воздействий \bar{X}_1 и \bar{X}_2 на узел 1 системы, а потому будем иметь:

$$r_{41} = r_{43} = 0$$

и соответственно

$$\delta_{14} = \delta_{24} = 0.$$

Остальные перемещения в арочной части определяются выражениями ¹ (черт. 322)

$$\delta_{11} = \int_0^{\frac{l}{2}} \bar{M}_1^2 \frac{dx}{EJ} = \frac{1}{EJ} \int_0^{\frac{l}{2}} y^2 dx = \frac{4}{90} \frac{f^2 l}{EJ} = \frac{4}{90} \cdot \frac{9}{4} = \frac{1}{10}.$$

$$\delta_{22} = \int_0^{\frac{l}{2}} \bar{M}_2^2 \frac{dx}{EJ} = \frac{1}{EJ} \int_0^{\frac{l}{2}} dx = \frac{l}{2EJ} = \frac{1}{8}.$$

¹ В определении перемещений не включен учет влияния продольных сил, как незначительных по своему влиянию на деформации по сравнению с влиянием моментов; кроме того принято $ds = dx$ и $\frac{l}{EJ} = \frac{1}{4}$.

Перемещения, вызываемые поворотом $\bar{Z}_2 = 1$, по направлению:

$$\text{силы } X_1 \delta_{13} = 1 \cdot \frac{2}{3} f = 2,$$

$$\text{момента } X_2 \delta_{23} = 1.$$

Перемещения, вызываемые горизонтальным смещением $\bar{Z}_3 = 1$ по направлению:

$$\text{силы } X_1 \delta_{15} = 1,$$

$$\text{момента } X_2 \delta_{25} = 0.$$

Реактивные моменты и силы, вызываемые в узле 2 силой $\bar{X}_1 = 1$ и моментом $\bar{X}_2 = 1$:

$$r_{31} = -1 \frac{2}{3} f = -2; \quad r_{51} = -1;$$

$$r_{32} = -1; \quad r_{52} = 0.$$

Остальные моменты и реакции, относящиеся к боковой рамной части, определяются значениями:

$$r_{44} = 4(2 + 6) = 32,$$

$$r_{34} = r_{43} = 2 \cdot 6 = 12,$$

$$r_{54} = r_{45} = -6 \frac{2}{6} = -2,$$

$$r_{33} = 4(6 + 2) = 32,$$

$$r_{53} = r_{35} = -6 \frac{2}{6} = -2,$$

$$r_{55} = 2 \frac{12 \cdot 2}{6^2} = \frac{4}{3}.$$

Свободные члены уравнений, зависящие от нагрузки, определяются выражениями (черт. 321):
в арочной части

$$\Delta q_1 = \int_0^{\frac{1}{2}l} M_q \bar{M}_1 \frac{dx}{EJ} = -\frac{q}{2EJ} \int_0^{\frac{1}{2}l} x^2 y dx = -\frac{qf}{2EJ} \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{f^3}{24} - \frac{4f^3}{160} \right) = \frac{3}{5} q,$$

$$\Delta q_2 = \int_0^{\frac{1}{2}l} M_q \bar{M}_2 \frac{dx}{EJ} = \frac{q}{2EJ} \int_0^{\frac{1}{2}l} x^2 dx = \frac{3}{4} q;$$

в рамной части

$$M_{12} = M_{43} = -\frac{ql^2}{12} = -\frac{16}{3} q,$$

$$M_{23} = M_{32} = -\frac{ql^2}{8} = -18q.$$

На основании полученных данных расчетные уравнения напишутся так:

$$\frac{1}{10} X_1 + 2Z_3 + Z_6 + \frac{3}{5} q = 0,$$

$$\frac{1}{8} X_2 + Z_3 + \frac{3}{4} q = 0,$$

$$-2X_1 - X_2 + 12Z_4 + 32Z_3 - 2Z_5 + \frac{16}{3} q - 18q = 0,$$

$$32Z_4 + 12Z_3 - 2Z_5 - \frac{16}{3} q = 0,$$

$$-X_1 - 2Z_4 - 2Z_3 + \frac{1}{3} Z_5 = 0.$$

В этих уравнениях взаимность коэффициентов по знаку достигается умножением первого и второго уравнений на (-1). Для решения их составляем табл. 57 Гаусса.

Решение канонических уравнений в примере 27 (способом Гаусса)

| № уравнений | Множители | X_1 | X_2 | Z_4 | Z_3 | Z_5 | Σq | Σ |
|---|---|-----------|---------------|---------------|------------------|----------------|---------------------------|----------------|
| I II I · α_{12} | $\alpha_{12} = 0$ | -0,1 0 | 0 -0,125 | 0 0 | -2 -1 | -1 0 | -0,6q -0,75q | -3,1 -1,125 |
| II' | | | -0,125 | 0 | -1 | 0 | -0,75q | -1,125 |
| III I α_{13} II α_{23} | $\alpha_{13} = 0$ $\alpha_{23} = 0$ | 0 | 0 | 32 | 12 | 2 | -5,333q | 42 |
| III ^{II} | | 0 | 0 | 32 | 12 | -2 | -5,333q | 42 |
| IV I α_{14} II α_{24} III α_{34} | $\alpha_{14} = -20$ $\alpha_{24} = -8$ $\alpha_{34} = -0,375$ | -2 +2 | -1 0 +1 | +12 0 0 | +32 +40 -8 | -2 +20 0 | -12,667q +12,0q -6q | 39 62 9 |
| IV ^{III} | | 0 | 0 | 0 | 75,5 | 18,75 | +7,333q | 94,25 |
| V I α_{15} II α_{25} III α_{35} IV α_{45} | $\alpha_{15} = -10$ $\alpha_{25} = 0$ $\alpha_{35} = 0,0625$ $\alpha_{45} = -0,2483$ | -1 +1 | 0 0 | -2 0 | -2 +20 | +1,33 +10 | 0 +6q | -3,67 +31 |
| | | — | — | 2 | 0,75 | -0,125 | -0,333q | 2,625 |
| | | — | — | — | -18,747 | -4,655 | -1,821q | -23,402 |
| V ^{IV} | — | — | — | — | — | 6,550 | 3,847q | 6,553 |

По данным табл. 57 определяем неизвестные:

$$Z_5 = -\frac{3,847}{6,552} q = -0,587q,$$

$$Z_3 = \left[-\frac{7,333}{75,5} + 0,248 \cdot 0,587 \right] q = 0,0485q,$$

$$Z_4 = \left[\frac{5,333}{32} - 0,375 \cdot 0,0485 - 0,0625 \cdot 0,587 \right] q = 0,1128q,$$

$$X_2 = \left[-\frac{0,75}{0,125} - 8 \cdot 0,0485 \right] q = -6,388q,$$

$$X_1 = \left[-\frac{0,6}{0,1} - 20 \cdot 0,0485 + 10 \cdot 0,587 \right] q = -1,104q.$$

Подстановкой этих значений в исходные уравнения убеждаемся в правильности вычислений.

По этим данным вычисляем моменты в узловых соединениях стержней.

Узел O:

$$M_{01} = +2 \cdot 2 \cdot 0,1122q - \frac{6 \cdot 2}{6} (-0,587)q = +1,623q.$$

Узел 1: $M_{10} = -2,0716q; M_{12} = -2,069q.$

Узел 2: $M_{21} = -7,8425q; M_{27} = +1,5616q; M_{23} = -9,4044q.$

Узел 7: $M_{72} = -1,3678q.$

В середине арки:

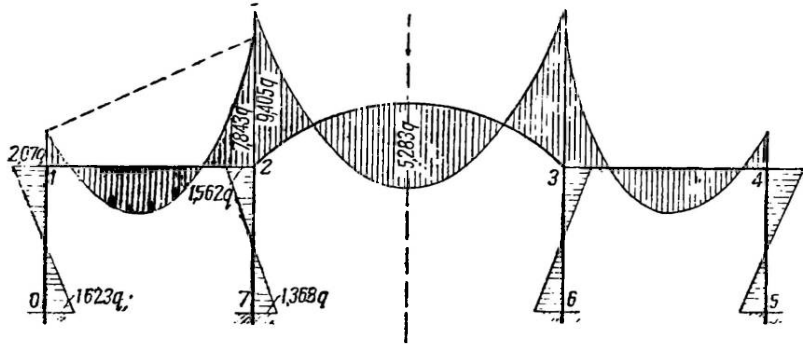
$$M = \left[6,387 - 1,104 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 \right] q = 5,283q.$$

По этим данным на черт. 323 построена эпюра моментов. Проверим правильность ее по условию проекций на горизонтальную ось сил, действующих в сечении, проведенном через стойки рамы и середину ее арочной части. В этом сечении должно иметь место следующее равенство:

$$Q_{01} + Q_{72} = X_1.$$

В действительности имеем:

$$-q \left(\frac{2,070 + 1,623}{6} + \frac{1,562 + 1,368}{6} \right) = -1,104q = X_1.$$



Черт. 323.

§ 75. КОМБИНИРОВАННЫЙ ПРИЕМ

В смешанном приеме расчета рам объединяются в одной системе канонических уравнений метод сил и метод деформаций. Возможен также другой прием использования обоих методов для расчета одной и той же рамы, называемый комбинированным. Для пояснения, что представляет собой комбинированный прием расчета, рассмотрим конкретный случай рамы, показанной на черт. 324.

Рама симметрична, это позволяет привести действующую на нее нагрузку к виду прямого и обратного нагружения, которые могут рассматриваться независимо друг от друга. Внутренние усилия и моменты в раме могут быть определены: в условиях одного нагружения — по методу сил, в условиях другого — по методу деформаций. Полученные величины их суммируются, и этой суммой определяется полная величина моментов и усилий в заданной раме. В этом приеме расчета применены метод сил и метод деформаций, но они ведутся раздельно и только взаимно дополняют друг друга. Нового по существу в нем ничего нет.

Комбинированный прием расчета дает значительные преимущества в расчетах симметричных рам, в которых всегда возможно разложение нагрузок на прямо и обратно симметричную.

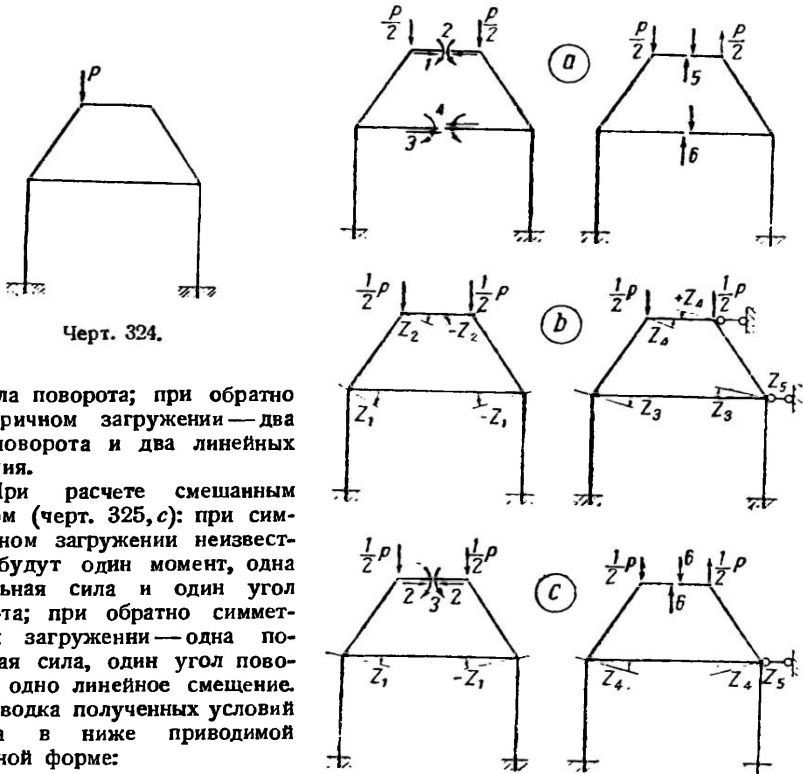
Возникает вопрос, когда же следует применять комбинированный прием расчета. Ответ всегда может быть получен из сопоставления основных систем, относящихся к каждому методу и приему.

Пусть на пример требуется решить вопрос о том, следует ли раму, показанную на черт. 324, решать комбинированным приемом или нет.

При решении по методу сил (черт. 325, а) канонические уравнения распадутся на две группы: при прямо симметричном нагружении неизвестными будут

два момента и две продольные силы; при обратно симметричном нагружении — две поперечные силы.

При расчете по методу деформации (черт. 325, *b*) уравнения распадутся также на две группы: при прямо симметричном нагружении неизвестными будут



Черт. 324.

два угла поворота; при обратно симметричном нагружении — два угла поворота и два линейных смещения.

При расчете смешанным приемом (черт. 325, *c*): при симметричном нагружении неизвестными будут один момент, одна продольная сила и один угол поворота; при обратно симметричном нагружении — одна поперечная сила, один угол поворота и одно линейное смещение.

Сводка полученных условий сделана в ниже приводимой табличной форме:

Черт. 325.

| Нагрузка | Метод сил | Метод деформаций | Смешанный прием | Комбинированный прием |
|------------------------|-----------|------------------|-----------------|-----------------------|
| Прямо симметричная . | 4 | 2 | 3 | 2 |
| Обратно симметричная . | 2 | 4 | 3 | 2 |

Анализируя возможные приемы расчета и определения внутренних сил и моментов, можно видеть, что в условиях симметричного нагружения раму следует рассчитать по методу деформаций, в условиях обратно симметричного нагружения методом сил, т. е. применить комбинированный прием расчета.

Итак, целесообразность применения комбинированного приема всегда выясняется путем сопоставления разных методов расчета.

РАСЧЕТ НЕРАЗРЕЗНЫХ БАЛОК И РАМ СПОСОБОМ МОМЕНТНЫХ ФОКУСОВ

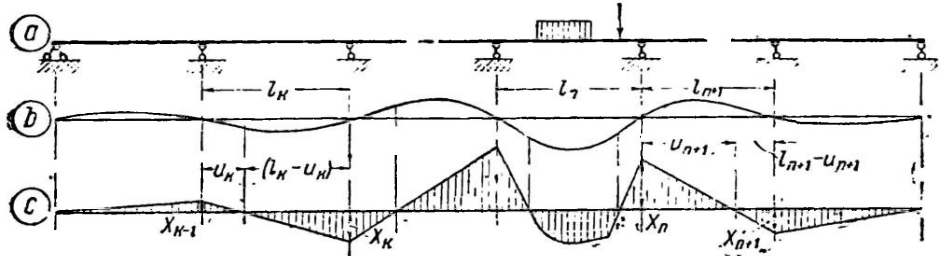
§ 76. ФОКУСНЫЕ ТОЧКИ И ФОКУСНЫЕ ОТНОШЕНИЯ В НЕРАЗРЕЗНЫХ БАЛКАХ

Если загружен какой-либо один пролет неразрезной балки (черт. 326), то эпюра моментов во всех пролетах кроме загруженного будет очерчиваться прямыми линиями. Форма упругой кривой, вызываемой такой нагрузкой, пока-

зывает, что кривизна кривой меняет свой знак в каждом пролете; последнее связано с наличием в каждом пролете нулевой точки в эпюре моментов. Положения нулевых точек в незагруженных пролетах балки остаются постоянными. Это доказывается следующим путем.

Приводим неразрезную балку к виду статически определимой введением в нее шарниров над опорными точками (черт. 327, б) и составляем в обычном порядке систему канонических уравнений, включающую все неизвестные опорные моменты для пролетов, лежащих слева от загруженного:

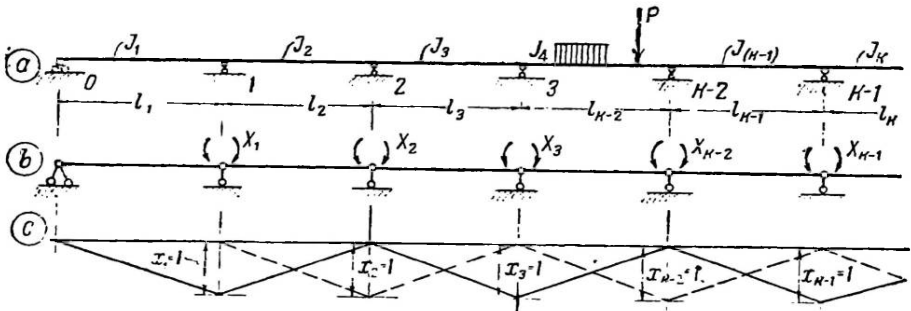
$$\left. \begin{aligned} X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} &= 0, \\ X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + X_3 \delta_{23} &= 0, \\ X_2 \delta_{32} + X_3 \delta_{33} + X_4 \delta_{34} &= 0 \\ &\text{и т. д.} \end{aligned} \right\} \quad (223)$$



Черт. 326.

Это система так называемых уравнений трех моментов. Для пролетов $l_{(k-1)}$ и l_k уравнение трех моментов напишется так:

$$X_{k-2} \delta_{(k-1)(k-2)} + X_{(k-1)} \delta_{(k-1)(k-1)} + X_k \delta_{(k-1)k} = 0,$$



Черт. 327.

Внеся в него значения величин δ — углов поворота:

$$\delta_{(k-1)(k-2)} = \frac{l_{k-1}}{6EJ_{k-1}}; \quad \delta_{(k-1)(k-1)} = \frac{l_{k-1}}{3EJ_{k-1}} + \frac{l_k}{3EJ_k}; \quad \delta_{(k-1)k} = \frac{l_k}{6EJ_k}, \quad (224)$$

получим:

$$X_{k-2} \cdot \frac{l_{k-1}}{6EJ_{k-1}} + X_{(k-1)} \left[\frac{l_{k-1}}{3EJ_{k-1}} + \frac{l_k}{3EJ_k} \right] + X_k \frac{l_k}{6EJ_k} = 0. \quad (225)$$

Введем для удобства написания обозначение $\frac{EJ}{l} = i$ и умножим на 6 обе части равенства (225):

$$X_{k-2} \frac{1}{i_{k-1}} + 2X_{k-1} \left(\frac{1}{i_{k-1}} + \frac{1}{i_k} \right) + X_k \frac{1}{i_k} = 0. \quad (226)$$

Из черт. 326, с видно, что в любом пролете, лежащем слева от загруженного:

$$-\frac{X_k}{k_{(k-1)k}} = \frac{l_k - u_k}{u_k} = k_{(k-1)k}. \quad (227)$$

Индекс $(k-1)k$ означает, что имеется в виду пролет между опорами $(k-1)$ и k и что нулевая точка в нем лежит в трети, ближайшей к левой опоре $(k-1)$, т. е. что это — левая нулевая точка.

Пользуясь зависимостью (227), выражаем в уравнении (226) $X_{(k-2)}$ через $X_{(k-1)}$:

$$-\frac{X_{k-1}}{k_{(k-2)(k-1)}} \cdot \frac{1}{i_{k-1}} + 2X_{k-1} \left(\frac{1}{i_{k-1}} + \frac{1}{i_k} \right) + X_k \frac{1}{i_k} = 0.$$

Определяем отсюда отношение моментов X_k и X_{k-1} :

$$-\frac{X_k}{X_{k-1}} = k_{(k-1)k} = 2 + \frac{i_k}{i_{k-1}} \left(2 - \frac{1}{k_{(k-2)(k-1)}} \right). \quad (228)$$

Из этого выражения видно, что отношение $k_{(k-1)k} = \frac{l_k - u_k}{u_k}$, устанавливающее положение нулевой точки в пролете, определяется через отношения $k_{(k-2)(k-1)}$, $k_{(k-3)(k-2)}$ и т. д. в предыдущих левых пролетах.

В первом пролете балки (черт. 326, а) опорный момент X_0 на концевой опоре равен нулю, следовательно $u_1 = 0$ и $k_{01} = \frac{l_1 - u_1}{u_1} = \infty$.

В соответствии с этим во втором пролете:

$$k_{1,2} = \frac{l_2 - u_2}{u_2} = 2 + 2 \frac{i_2}{i_1}. \quad (229)$$

Зная отношение $k_{1,2}$, можно определить отношение $k_{2,3}$, $k_{3,4}$ и т. д. Все эти отношения для пролетов, лежащих слева от загруженного, вычисляются через погонные жесткости $i = \frac{EJ}{l}$ пролетов, лежащих слева, поэтому положения нулевых точек эпюр моментов, определяемые этими отношениями, не меняются, что и требовалось доказать.

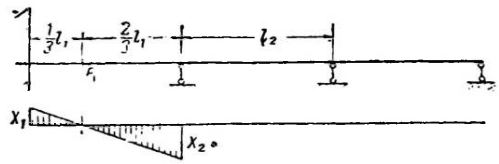
Нулевые точки эпюр моментов в незагруженных пролетах неразрезной балки называются фокусными точками, а отношения k (228), по которым определяются положения фокусных точек, называются фокусными отношениями.

Весь вывод, сделанный для пролетов, лежащих слева от загруженного пролета, остается справедливым и для пролетов, лежащих справа от загруженного но в них фокусные отношения вычисляются, начиная с крайнего правого пролета, и определяются выражением:

$$k_{n(n-1)} = 2 + \frac{i_n}{i_{n+1}} \left(2 - \frac{1}{k_{(n+1)n}} \right). \quad (230)$$

Индекс $n(n-1)$ означает, что имеется в виду пролет между опорами n и $(n-1)$ и что нулевая точка в нем лежит в трети, ближайшей к правой опоре n , т. е. это — правая нулевая или фокусная точка.

Таким образом нами установлено, что в каждом пролете неразрезной балки имеются две фокусные точки: левая $k_{(n-1)n}$, определяемая выражением (228), и правая $k_{n(n-1)}$, определяемая выражением (230). Эпюра моментов проходит через ту или другую из них, смотря по тому, где расположен рассматриваемый пролет относительно загруженного: если слева, то эпюра моментов проходит через левую фокусную точку; если справа, то через правую точку.



Черт. 328.

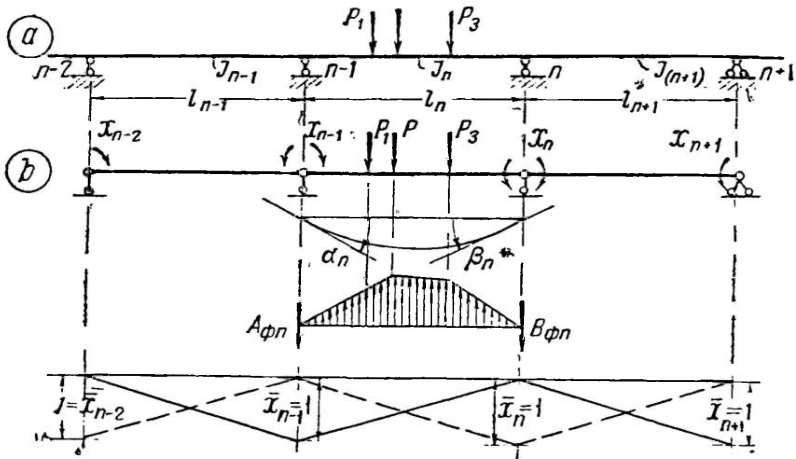
Отметим, что во всех пролетах неразрезной балки кроме крайних фокусные отношения $k > 2$. Если конец балки заделан (черт. 328), то $i_0 = \infty$ и $k_{0,1} = 2$.

Если пролеты балки равны и момент инерции одинаков на всей ее длине, то во втором пролете $k_{1,2} = 4$, в третьем пролете $k_{2,3} = 3,75$, в четвертом $k_{3,4} = 3,73$ и т. д.

Из этих величин фокусных отношений видно, что нулевые точки эпокр располагаются в пределах крайней третьей пролета, причем эпокра быстро убывает по мере удаления ее от загруженного пролета (черт. 326).

§ 77. ОПОРНЫЕ МОМЕНТЫ В ЗАГРУЖЕННОМ ПРОЛЕТЕ

Из черт. 326 видно, что построение эпокр моментов в неразрезной балке при помощи фокусных точек возможно, если будут известны опорные моменты по концам загруженного пролета. Определение величин последних может быть



Черт. 329.

сделано из совместного решения двух из числа уравнений (223), относящихся к загруженному пролету l_n и смежным с ним l_{n-1} и l_{n+1} (черт. 329):

$$\begin{aligned} X_{(n-2)} \delta_{(n-1)(n-2)} + X_{(n-1)} \delta_{(n-1)(n-1)} + X_n \delta_{(n-1)n} + \Delta_{(n-1)p} &= 0, \\ X_{(n-1)} \delta_n + X_n \delta_{nn} + X_{(n+1)} \delta_n + \Delta_{np} &= 0. \end{aligned} \quad (231)$$

В этих уравнениях величины δ вычисляются обычным порядком, как углы поворотов на опорах $n-1$ и n , вызываемые действием единичных моментов, приложенных по направлению неизвестных. Грузовые перемещения $\Delta_{(n-1)p}$ и Δ_{np} могут быть определены, как углы поворотов α_n и β_n путем фиктивного нагружения пролета l_n эпокрой моментами, вызываемой заданной нагрузкой на этом пролете (черт. 329):

$$\Delta_{(n-1)p} = \alpha_n = \frac{A_{\phi n}}{EJ_n}; \quad \Delta_{np} = \beta_n = \frac{B_{\phi n}}{EJ_n}. \quad (232)$$

Здесь $A_{\phi n}$ и $B_{\phi n}$ — фиктивные опорные реакции от фиктивной нагрузки.

По условию (227) распространения эпокры моментов в ненагруженных пролетах можно написать:

$$X_{n-2} = -\frac{X_{n-1}}{k_{(n-2)(n-1)}}; \quad X_{n+1} = -\frac{X_n}{k_{(n+1)n}}. \quad (233)$$

Подставив в уравнения (231) величины δ в их развернутом виде, величины Δ (232) и отношения (233) и сделав приведение, получим:

$$\left. \begin{aligned} X_{n-1} \left[-\frac{l_{n-1}}{J_{n-1}} \cdot \frac{1}{k_{(n-2) (n-1)}} + 2 \left(\frac{l_{n-1}}{J_{n-1}} + \frac{l_n}{J_n} \right) \right] + X_n \frac{l_n}{J_n} + 6 \frac{A \phi_n}{J_n} = 0, \\ X_{n-1} \frac{l_n}{J_n} + X_n \left[2 \left(\frac{l_n}{J_n} + \frac{l_{n+1}}{J_{n+1}} \right) - \frac{l_{n+1}}{J_{n+1}} \frac{1}{k_{(n+1) n}} \right] + 6 \frac{B \phi_n}{J_n} = 0. \end{aligned} \right\} (234)$$

Выражения, заключенные в большие скобки, представляют собой фокусные отношения $k_{(n-1) n}$ и $k_{n (n-1)}$, умноженные на $\frac{l_n}{J_n}$.

Сделав подстановку и приведение, получим:

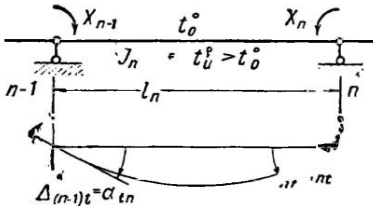
$$\begin{aligned} k_{(n-1) n} X_{n-1} + X_n &= -6 \frac{A \phi_n}{l_n}, \\ X_{n-1} + k_{n (n-1)} X_n &= -6 \frac{B \phi_n}{l_n}. \end{aligned}$$

Отсюда определяются:

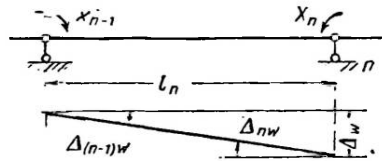
$$\left. \begin{aligned} X_{n-1} &= -\frac{6(A \phi_n k_{n (n-1)} - B \phi_n)}{l_n (k_{(n-1) n} k_{n (n-1)} - 1)}, \\ X_n &= -\frac{6(B \phi_n k_{(n-1) n} - A \phi_n)}{l_n (k_{(n-1) n} k_{n (n-1)} - 1)}. \end{aligned} \right\} (235)$$

Величины $A \phi_n$ и $B \phi_n$ определяются обычными приемами. В табл. 58 даны значения $A \phi_n$ и $B \phi_n$ для наиболее употребительных видов загрузжений.

Учет влияния температуры и осадки опор. Углы поворота Δ , входящие в уравнения (231) в качестве известных членов, могут быть созданы неравномерным нагревом балки и просадкой одного из концов ее.



Черт. 330.



Черт. 331.

а) При действии неравномерного нагрева (черт. 330) по длине одного пролета l_n углы поворота по его концам будут:

$$\Delta_{(n-1)n} \frac{1}{2} = \Delta_{nt} = \frac{1}{2} \alpha \frac{\Delta t^{\circ}}{c_n} l_n.$$

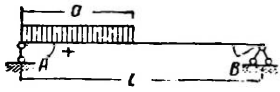
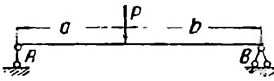
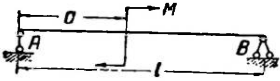

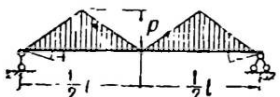
Здесь $\Delta t^{\circ} = (t_u^{\circ} - t_0^{\circ})$ — разность температур нижнего и верхнего волокон бруса;
 α — коэффициент линейного расширения материала бруса;
 c_n — высота поперечного сечения бруса.

В соответствии с этим опорные моменты по концам балки в пролете l_n определяются выражениями:

$$\left. \begin{aligned} X_{(n-1)} &= -3\alpha \frac{\Delta t^{\circ}}{c_n} i_n l_n \frac{(k_{n (n-1)} - 1)}{(k_{(n-1) n} k_{n (n-1)} - 1)}, \\ X_n &= -3\alpha \frac{\Delta t^{\circ}}{c_n} i_n l_n \frac{(k_{(n-1) n} - 1)}{(k_{(n-1) n} k_{n (n-1)} - 1)}. \end{aligned} \right\} (236)$$

Знаки показаны в соответствии с обозначениями на черт. 330.

Углы поворота опорных сечений однопролетной свободно опертой балки при разных видах загрузки

| № п/п | Вид загрузки | A_{ϕ} | B_{ϕ} |
|-------|---|---|---|
| 1 |  <p>при $a = l$</p> | $\frac{qa^2}{24} l(l+b)^2$ $\frac{ql^3}{24l}$ | $+\frac{qa^2}{24l}(2l^2 - a^2)$ $\frac{ql^3}{24}$ |
| 2 |  <p>при $a = \frac{l}{2}$</p> | $\frac{Pb}{6l}(l^2 - b^2)$ $\frac{Pl^2}{16}$ | $\frac{Pa}{6l}(l^2 - a^2)$ $\frac{Pl^2}{16}$ |
| 3 |  <p>при $a = 0$</p> | $-\frac{M}{6l}(3b^2 - l^2)$ $\frac{Ml}{3}$ | $\frac{M}{6l}(3a^2 - l^2)$ $\frac{Ml}{6}$ |
| 4 |  | $\frac{7}{360} pl^3$ | $\frac{+1}{45} pl^3$ |
| 5 |  | $\frac{17}{768} pl^3$ | $\frac{17}{718} pl^3$ |

б) Предположим теперь, что правый конец какого-либо пролета l_n опустился больше его левого конца на величину Δw (черт. 331), это вызовет поворот оси пролета на угол:

$$\Delta_{(n-1)w} = -\Delta_{nw} = \frac{\Delta w}{l_n}.$$

В этом случае опорные моменты по концам пролета определяются выражениями:

$$\left. \begin{aligned} X_{(n-1)} &= -6 \frac{i_n}{l_n} \frac{(k_n (n-1) + 1)}{(k_{(n-1)} n k_n (n-1) - 1)} \Delta w, \\ X_n &= +6 \frac{i_n}{l_n} \frac{(k_{(n-1)} n + 1)}{(k_{(n-1)} n k_n (n-1) - 1)} \Delta w. \end{aligned} \right\} \quad (237)$$

Знаки показаны в соответствии с обозначениями на черт. 331.

§ 78. ЛИНИИ ВЛИЯНИЯ В НЕРАЗРЕЗНОЙ БАЛКЕ

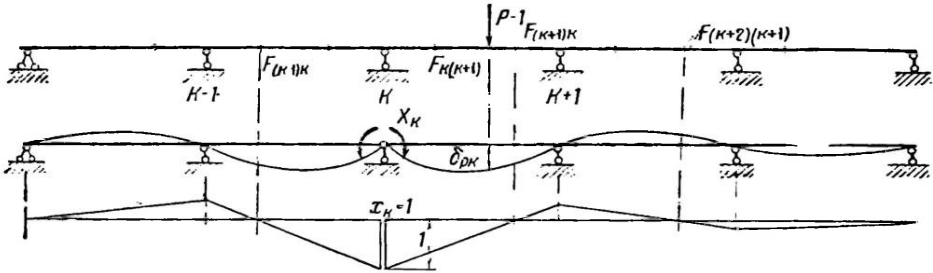
Преимущество расчета неразрезных балок при помощи фокусных точек заключается в том, что все опорные моменты, вызываемые нагрузкой, расположенной на каком-либо пролете, определяются без совместного решения канони-

ческих уравнений. Эта возможность с успехом может быть использована для построения линий влияния опорных моментов.

Предположим, что мы имеем какую-либо неразрезную балку (черт. 332), для которой определены фокусные точки.

Из общей теории статически неопределимых систем нам известно, что моделью линий влияния в них является эпюра прогибов, создаваемая единичным воздействием, приложенным по направлению неизвестного. Известно также, что эпюра прогибов вычисляется или строится при помощи эпюры моментов, получающейся от того же единичного воздействия. Таким образом, для того чтобы построить линию влияния какого-либо опорного момента, надо ввести в неразрезную балку шарнир на этой опоре, приложить момент $\bar{X}_k = 1$ и построить эпюру моментов на всей длине балки.

Введение шарнира не изменяет положения фокусных точек, и мы можем построить эпюру моментов, вызываемую действием опорного момента $\bar{X}_k = 1$,



Черт. 332.

проводя прямые вправо и влево от опорного момента \bar{X}_k через соответственные фокусные точки (черт. 332).

Имея фокусные точки, мы смогли в многократно статически неопределимой системе использовать в качестве основной системы статически неопределимую балку с одним неизвестным X_k , которое определяется из уравнения:

$$X_k \delta_{kk} + \delta_{pk} = 0.$$

Отсюда

$$X_k = -\frac{\delta_{pk}}{\delta_{kk}}.$$

Здесь δ_{pk} — ордината эпюры прогибов (черт. 332) под точкой приложения груза $\bar{P} = 1$, перемещающегося по балке;

δ_{kk} — масштаб перехода от эпюры прогибов к линии влияния.

Эпюра прогибов может быть построена любым способом: аналитически или графически. В рассматриваемых условиях ординаты эпюры во всех пролетах балки выражаются через опорные моменты, что позволяет использовать для определения ординат эпюры уравнения (35) и (36) и данные табл. 2.

Предположим например, что требуется построить линию влияния опорного момента на опоре 3 неразрезной балки, показанной на черт. 333.

Фокусные отношения в этой балке определяются величинами:

$$k_{1,2} = 4; \quad k_{2,3} = 3,75.$$

В соответствии с этим ординаты эпюры моментов, вызываемой действием момента $\bar{X}_3 = 1$ (черт. 333), будут:

$$\begin{aligned} \text{на опоре 3} \quad \bar{X}_3 &= 1, \\ 2 \quad X_{21} &= -\frac{4}{15} \cdot 1 = -0,267, \\ 1 \quad X_{13} &= -\frac{1}{4} (-0,267) = 0,0667. \end{aligned}$$

Для вычисления ординат эпюры прогибов используем уравнения (35) и (36):

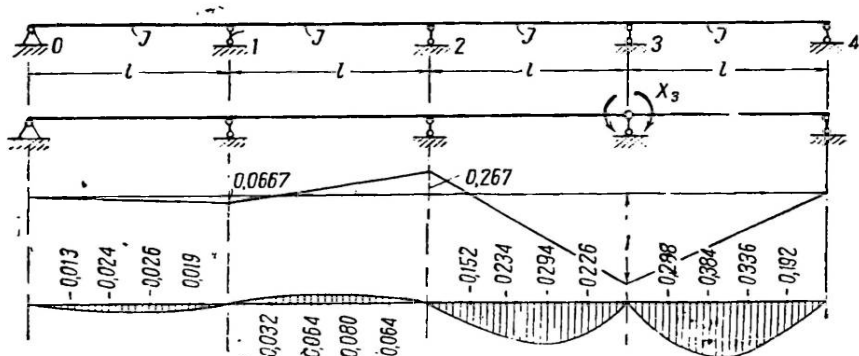
$$EIy = \frac{1}{6} X_{лев} l^2 u (1-u)(2-u) + \frac{1}{6} X_{прав} l^2 u (1-u)^2.$$

Здесь $u = \frac{x}{l}$ и опорные моменты $X_{лев}$ и $X_{прав}$ приняты со знаком плюс.

На черт. 333 выписаны ординаты эпюры прогибов, вычисленные по этой формуле; они уменьшены в $\frac{6}{EI}$ раз. Масштаб линии влияния определяется величиной:

$$EI\delta_{33} = \frac{l}{3} \left[0,0667^2 \left(1 + \frac{1}{5} \right) + 0,267^2 \left(\frac{4}{5} + \frac{4}{19} \right) + \left(\frac{15}{19} + 1 \right) \right] l = 0,622l.$$

Аналогичным путем могут быть построены линии влияния всех опорных моментов.



Черт. 333.

После того как построены линии влияния опорных моментов, построение линий влияния моментов и поперечных сил в сечениях балки проводится обычным порядком по формуле (40).

Момент в сечении балки:

$$M = y_M^0 + y_{(n-1)} \frac{l_n - x}{l_n} + y_n \frac{x}{l_n}.$$

Поперечная сила в сечении:

$$Q = y_Q^0 + \frac{1}{l_n} (y_n - y_{n-1}) x.$$

В этих формулах y_M^0 и y_Q^0 — ординаты линии влияния момента и поперечной силы в сечении основной системы, т. е. балки, свободно опертой на две опоры; y_{n-1} и y_n — ординаты линий влияния левого и правого опорных моментов в пролете, в котором находится рассматриваемое сечение; эти ординаты внесены в формулы в предположении, что моменты по концам пролета имеют положительные знаки.

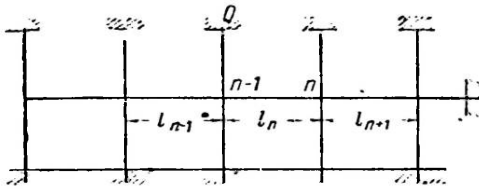
§ 79. ФОКУСНЫЕ ОТНОШЕНИЯ В РАМАХ

Расчет рамных систем при помощи моментных фокусов по своему содержанию и порядку производства расчета мало отличается от расчета этим способом неразрезных балок.

Каждый стержень рамы, так же как отдельные пролеты неразрезных балок, находится под действием нагрузки, приложенной к нему, и концевых (опорных) моментов; величина этих моментов зависит не только от нагрузки, расположенной на стержне, но и от нагрузок, расположенных вне его. При расположении нагрузки вне стержня на других стержнях только слева или только справа от рассматриваемого отношения опорных моментов по концам последнего остается

постоянным, и эпюра моментов и в том и в другом случаях пересекает стержень в фокусных точках.

В расчетах рам вычисление фокусных отношений несколько сложнее, чем в неразрезных балках; особенно в тех случаях, когда рама имеет замкнутые контуры. Оно осложняется также необходимостью вычисления коэффициента μ распределения опорного момента между стержнями рамы, примыкающими к узлу, где применен этот момент.



Черт. 334.

по концам шарниры и приложим равнодействующие моменты внутренних сил $X_{(n-1)n}$ и $X_{n(n-1)}$.

Применяя метод сил, составим обычное каноническое уравнение полного перемещения по направлению момента $X_{(n-1)n}$:

$$X_{(n-1)n} \delta_{(n-1)(n-1)} + X_{n(n-1)} \delta_{(n-1)n} = 0. \quad (238)$$

Из этого уравнения (238) находим общее выражение для левого фокусного отношения $k_{(n-1)n}$ в пролете l_n :

$$-\frac{X_{n(n-1)}}{X_{(n-1)n}} = \frac{\delta_{(n-1)(n-1)}}{\delta_{(n-1)n}} = k_{(n-1)n}. \quad (239)$$

Определим перемещения $\delta_{(n-1)(n-1)}$ и $\delta_{(n-1)n}$, входящие в это уравнение, предполагая моменты инерции в каждом стержне постоянными.

Угловое перемещение $\delta_{(n-1)(n-1)}$ состоит из поворота на угол $\varphi_{(n-1)}$ узла $(n-1)$ (черт. 336) под действием момента $X_{(n-1)n}$ и из угла поворота

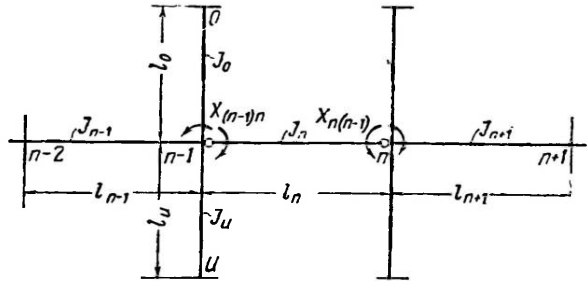
$\frac{l_n}{3EI_n} = \frac{1}{3i_n}$ левого конца стержня l_n от действия того же момента:

$$\delta_{(n-1)(n-1)} = \varphi_{(n-1)} + \frac{1}{3i_n}. \quad (240)$$

Величина угла поворота $\varphi_{(n-1)}$ узла $(n-1)$ зависит от жесткостей всех стержней, сходящихся в этом узле, за исключением стержня l_{n-1} , отделенного от него шарниром, и может быть определена при помощи эпюры моментов в этих стержнях, возникающих под действием момента $\bar{X}_{(n-1)n} = 1$ (черт. 337).

При наличии поворота на угол φ_{n-1} по концам стержня l_{n-1} возникают моменты $\bar{X}_{(n-1)(n-2)}$ и $\bar{X}_{(n-2)(n-1)}$, связанные между собой уравнением (черт. 337, б):

$$\begin{aligned} \varphi_{n-1} &= \bar{X}_{(n-1)(n-2)} \frac{l_{n-1}}{3EI_{n-1}} - \frac{\bar{X}_{(n-1)(n-2)}}{k_{(n-2)(n-1)}} \frac{l_{n-1}}{6EI_{n-1}} = \\ &= \bar{X}_{(n-1)(n-2)} \frac{l_{n-1}}{6EI_{n-1}} \left[2 - \frac{1}{k_{(n-2)(n-1)}} \right]. \end{aligned}$$



Черт. 335.

связанные между собой уравнением (черт. 337, б):

Здесь $k_{(n-2)(n-1)}$ — левое фокусное отношение, определяющее отношение между опорными моментами $\bar{X}_{(n-1)(n-2)}$ и $\bar{X}_{(n-2)(n-1)}$, возникающими по концам стержня $l_{(n-1)}$. Обозначив $\frac{EI_{(n-1)}}{l_{(n-1)}} = i_{(n-1)}$, получим:

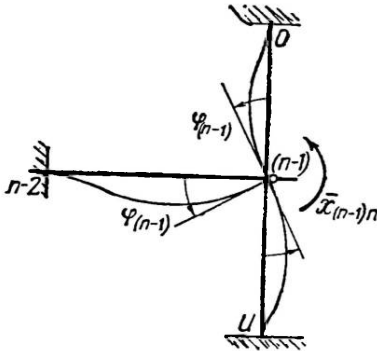
$$\bar{X}_{(n-1)(n-2)} = \varphi_{(n-1)} \frac{6i_{(n-1)}}{2 - \frac{1}{k_{(n-2)(n-1)}}}. \quad (241)$$

Тем же приемом найдем:

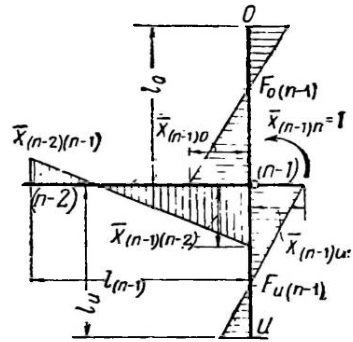
$$\bar{X}_{(n-1)0} = \varphi_{(n-1)} \frac{6i_0}{2 - \frac{1}{k_0(n-1)}} \quad (241')$$

и

$$\bar{X}_{(n-1)u} = \varphi_{(n-1)} \frac{6i_u}{2 - \frac{1}{k_u(n-1)}}.$$



Черт. 336.



Черт. 337.

Из условия равновесия узла $(n-1)$ следует, что

$$\bar{X}_{(n-1)(n-2)} + \bar{X}_{(n-1)0} + \bar{X}_{(n-1)u} = \bar{X}_{(n-1)n} = I. \quad (242)$$

Подставив сюда значения моментов (241) и (241') и вынеся φ_{n-1} за скобки, получим:

$$\varphi_{(n-1)} = \frac{1}{\frac{6i_{(n-1)}}{2 - \frac{1}{k_{(n-2)(n-1)}}} + \frac{6i_0}{2 - \frac{1}{k_0(n-1)}} + \frac{6i_u}{2 - \frac{1}{k_u(n-1)}}} = \frac{1}{\sum_{(n-1)} \frac{6i}{2 - \frac{1}{k}}}. \quad (243)$$

Таким образом полная величина угла поворота $\delta_{(n-1)(n-1)}$ в узле $(n-1)$ определится суммой:

$$\delta_{(n-1)(n-1)} = \frac{1}{\sum_{(n-1)} \frac{6i}{2 - \frac{1}{k}}} + \frac{1}{3i_n}. \quad (244)$$

Угловое перемещение $\delta_{(n-1)n}$ определяется, как угол поворота левого конца стержня l_n от действия единичного опорного момента $\bar{X}_n(n-1) = 1$:

$$\delta_{(n-1)n} = \frac{l_n}{6EJ_n} = \frac{1}{6i_n}. \quad (245)$$

Теперь мы можем определить фокусное отношение $k_{(n-1)n}$ по полученным значениям $\delta_{(n-1)(n-1)}$ и $\delta_{(n-1)n}$ угловых перемещений:

$$k_{(n-1)n} = \left[\frac{1}{\sum_{(n-1)} \frac{6i}{2 - \frac{1}{k}}} + \frac{1}{3i_n} \right] 6i_n = 2 + \frac{i_n}{\sum_{(n-1)} \frac{i}{2 - \frac{1}{k}}}. \quad (246)$$

По аналогии для правого фокусного коэффициента при расположении нагрузки только слева от пролета l_n можем написать:

$$k_{n(n-1)} = 2 + \frac{i_n}{\sum_{(n)} \frac{1}{2 - \frac{1}{k'}}} \quad (247)$$

В этой формуле обозначением k' показано, что в нее входят фокусные отношения для правых фокусов.

Отметим еще раз, что в суммах $\sum_{(n-1)}$ и $\sum_{(n)}$ не вводится учет пролета l_n .

§ 80. КОЭФИЦИЕНТЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Полученные нами выражения углов поворота по концам стержней, сходящихся в узле $(n-1)$ и равенство (241) позволяют вывести так называемые коэффициенты μ распределения концевого момента $\bar{X}_{(n-1)n} = 1$ между стержнями рамы, сходящимися в узле $(n-1)$.

Обозначаем:

$$\begin{aligned} 1\mu_{n(n-1)(n-2)} &= \bar{X}_{(n-1)(n-2)}, \\ 1\mu_{n(n-1)0} &= \bar{X}_{(n-1)0}, \\ 1\mu_{n(n-1)u} &= \bar{X}_{(n-1)u}. \end{aligned}$$

Здесь первые два значка при коэффициенте μ показывают, что момент $\bar{X}_{(n-1)n} = 1$, приложенный в узле $(n-1)$ пролета l_n , распределяется с пролета l_n по направлению от конца n через узел $(n-1)$ на стержни, примыкающие к этому узлу; последние два значка при том же коэффициенте показывают стержни, на направлении которых разлагается момент $\bar{X}_{(n-1)n}$.

По формуле (241) имеем:

$$\begin{aligned} \mu_{n(n-1)(n-2)} &= \bar{X}_{(n-1)(n-2)} = \frac{6i_{(n-1)}}{2 - \frac{1}{k_{(n-2)(n-1)}}} \cdot \frac{1}{\sum_{(n-1)} \frac{6i}{2 - \frac{1}{k}}} = \\ &= \frac{i_{n-1}}{2 - \frac{1}{k_{(n-2)(n-1)}}} \cdot \frac{1}{\sum_{(n-1)} \frac{i}{2 - \frac{1}{k}}}. \end{aligned} \quad (248)$$

Согласно формуле (246) сумма, входящая в знаменатель, может быть выражена через фокусное отношение $k_{(n-1)n}$:

$$\sum_{(n-1)} \frac{1}{2 - \frac{1}{k}} = -\frac{1}{i_n} (k_{(n-1)n} - 2).$$

Тогда (черт. 335)

$$\mu_{n(n-1)(n-2)} = \frac{i_{(n-1)} (k_{(n-1)n} - 2)}{i_n \left(2 - \frac{1}{k_{(n-2)(n-1)}} \right)}. \quad (249)$$

По аналогии можем написать:

$$\begin{aligned} \mu_{n(n-1)0} &= \frac{i_0}{2 - \frac{1}{k_{0(n-1)}}} \cdot \frac{1}{\sum_{(n-1)} \frac{i}{2 - \frac{1}{k}}} = \frac{i_0 (k_{(n-1)n} - 2)}{i_n \left(2 - \frac{1}{k_{0(n-1)}} \right)}, \\ \mu_{n(n-1)u} &= \frac{i_u}{2 - \frac{1}{k_{u(n-1)}}} \cdot \frac{1}{\sum_{(n-1)} \frac{i}{2 - \frac{1}{k}}} = \frac{i_u (k_{(n-1)n} - 2)}{i_n \left(2 - \frac{1}{k_{u(n-1)}} \right)}. \end{aligned}$$

Во всех этих выражениях суммой

$$\sum_{(n-1)} \frac{i}{2 - \frac{1}{k}}$$

охватываются все стержни, примыкающие к узлу $(n-1)$ за исключением стержня с пролетом l_n , где приложен момент $\bar{X}_{(n-1)n}$.

Из равенства (242) следует, что

$$u_{n(n-1)(n-2)} + u_{n(n-1)0} + u_{n(n-1)n} = 1. \quad (250)$$

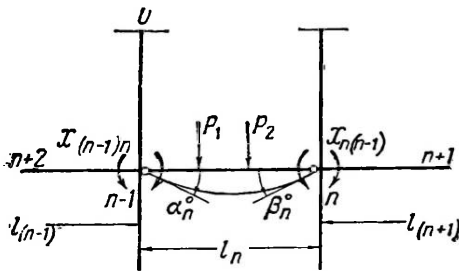
§ 81. ВЫРАЖЕНИЯ КОНЦЕВЫХ МОМЕНТОВ В ЗАГРУЖЕННОМ ПРОЛЕТЕ

Предполагаем, что рама (черт. 334) нагружена только в пролете l_n . На черт. 338 показана часть этой рамы с введенными в нее шарнирами и конечными моментами:

$$X_{(n-1)n} \text{ и } X_{n(n-1)}.$$

Пользуясь методом сил, составляем канонические уравнения возможных перемещений в этом пролете по направлениям моментов $X_{(n-1)n}$ и $X_{n(n-1)}$:

$$\left. \begin{aligned} X_{(n-1)n} \delta_{(n-1)(n-1)} + X_{n(n-1)} \delta_{(n-1)n} + \Delta_{(n-1)p} &= 0, \\ X_{(n-1)n} \delta_{n(n-1)} + X_{n(n-1)} \delta_{nn} + \Delta_{np} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (251)$$



Черт. 338.

В этих уравнениях выражения единичных перемещений определяются формулами (244) и (245).

Перемещения $\Delta_{(n-1)p}$, Δ_{np} могут быть определены, как углы поворота, применяя фиктивную нагрузку эпюрой моментов (черт. 338):

$$\Delta_{(n-1)p} = \alpha_n^0 = \frac{A \phi_n}{EJ_n};$$

$$\Delta_{np} = \beta_n^0 = \frac{B \phi_n}{EJ_n},$$

Здесь $A \phi_n$ и $B \phi_n$ — фиктивные опорные реакции от загрузки пролета l_n , шарнирного по концам, эпюрой моментов, вызываемой нагрузкой.

Подставляем в уравнения (251) значения найденных выше перемещений; после несложных преобразований этих уравнений получаем:

$$\left. \begin{aligned} \left[\sum_{(n-1)} \frac{1}{6i} \left(2 - \frac{1}{k} \right) + \frac{1}{3i_n} \right] X_{(n-1)n} + \frac{1}{6i_n} X_{n(n-1)} &= - \frac{A \phi_n}{EJ_n}, \\ \frac{1}{6i_n} X_{(n-1)n} + \left[\sum_{(n)} \frac{1}{6i} \left(2 - \frac{1}{k'} \right) + \frac{1}{3i_n} \right] X_{n(n-1)} &= - \frac{B \phi_n}{EJ_n}. \end{aligned} \right\} \quad (252)$$

Умножаем обе части каждого из этих уравнений на $6i_n$ и устанавливаем, что:

$$6i_n \left[\sum_{(n-1)} \frac{1}{6i} \left(2 - \frac{1}{k} \right) + \frac{1}{3i_n} \right] = 2 + \frac{i_n}{\sum_{(n-1)} \frac{i}{\left(2 - \frac{1}{k} \right)}} = k_{(n-1)n}$$

$$6i_n \left[\sum_n \frac{1}{\left(2 - \frac{1}{k'}\right)} + \frac{1}{3i_n} \right] = k_{n(n-1)}.$$

Введя $k_{(n-1)n}$ и $k_{n(n-1)}$ в уравнения (252), получаем:

$$\left. \begin{aligned} k_{(n-1)n} X_{(n-1)n} + X_{n(n-1)} &= -6i_n \frac{A_{\phi n}}{EJ_n}, \\ X_{(n-1)n} + k_{n(n-1)} X_{n(n-1)} &= -6i_n \frac{B_{\phi n}}{EJ_n}. \end{aligned} \right\} \quad (253)$$

Отсюда получаем общие выражения для искоемых конечных моментов:

$$\left. \begin{aligned} X_{(n-1)n} &= -\frac{6(k_{n(n-1)} A_{\phi n} - B_{\phi n})}{l_n(k_{(n-1)n} k_{n(n-1)} - 1)}, \\ X_{n(n-1)} &= -\frac{6(k_{(n-1)n} B_{\phi n} - A_{\phi n})}{l_n(k_{(n-1)n} k_{n(n-1)} - 1)}. \end{aligned} \right\} \quad (254)$$

Полученные формулы вполне совпадают в своем написании с формулами (235), определяющими опорные моменты в неразрезных балках. Они отличаются только содержанием фокусных отношений.

Это сходство позволяет использовать для определения моментов по концам стержней рамы, вызываемых влиянием неравномерного нагрева и смещения узлов, формулы (236) и (237), которые были выведены для неразрезных балок.

§ 82. РАСЧЕТ РАМ, НЕ ИМЕЮЩИХ СМЕЩЕНИЙ УЗЛОВ И ЗАМКНУТЫХ КОНТУРОВ

В расчетах рам при помощи моментных фокусов следует рассмотреть особо рамы, не имеющие линейных смещений узлов и замкнутых контуров (черт. 339), и затем рамы, имеющие и то и другое.

Установим порядок расчета рам первого вида:

1. Расчет начинается с определения фокусных отношений k и распределительных коэффициентов μ по формулам (246), (247) и (249).

2. По формулам (254) вычисляются конечные моменты для нагруженных пролетов рамы.

3. Производят распределение их по стержням рамы при помощи коэффициентов μ .

4. После распределения моментов по раме необходимо произвести проверку равновесия узлов рамы.

5. Окончательная эпюра моментов в раме получается сложением соответственных ординат эпюр моментов, вызванных в стержнях рамы каждым из нагружений, рассмотренных в п. 2.

6. Пользуясь суммарной эпюрой M , строят эпюру поперечных и нормальных сил.

7. Контроль окончательных эпюр M , Q и N производится обычным способом (§ 13).



Черт. 339.

Пример 28. Требуется произвести расчет рамы, показанной на черт. 340; на раму действует сплошная равномерная нагрузка, расположенная на всем протяжении ригеля.

Стержни 0—1 и 2—4 закреплены против поперечных смещений. Мы можем сразу написать, что

$$k_{01} = k_{42} = 2.$$

По формулам (246) и (247) находим значения фокусных коэффициентов k_{12} и k_{21} :

$$k_{12} = 2 + \frac{i_2}{\frac{i_1}{2 - \frac{1}{k}}} = 2 + \frac{2,5}{\frac{3}{3}} = 5,75,$$

$$k_{21} = 2 + \frac{i_2}{\frac{i_4}{2 - \frac{1}{k_{02}}} + \frac{i_3}{2}} = 2 + \frac{2,5}{\frac{2,6}{3} + \frac{2,6}{2}} = 3,27.$$

Теперь определяем k_{23} :

$$k_{23} = 2 + \frac{i_3}{\frac{i_2}{2 - \frac{1}{k_{12}}} + \frac{i_4}{2 - \frac{1}{k_{12}}}} = 2 + \frac{2,6}{\frac{2,5}{2 - \frac{1}{5,75}} + \frac{1}{2 - \frac{1}{2}}} = 3,27.$$

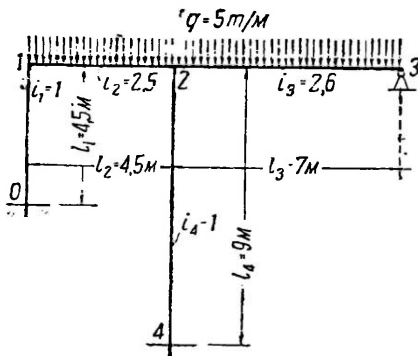
Вычисляем коэффициенты распределения для узла 2, пользуясь формулами (248):

$$\mu_{123} = \frac{\frac{i_3}{2 - \frac{1}{\infty}}}{\frac{i_2}{2 - \frac{1}{\infty}} + \frac{i_4}{2 - \frac{1}{2}}} = \frac{1,3}{1,3 + \frac{2}{3}} = 0,657,$$

$$\mu_{124} = 1 - 0,657 = 0,343,$$

$$\mu_{321} = \frac{\frac{i_2}{2 - \frac{1}{k_{12}}}}{\frac{i_2}{2 - \frac{1}{k_{12}}} + \frac{i_4}{2 - \frac{1}{k_{12}}}} = \frac{1,37}{1,37 + 0,67} = 0,67,$$

$$\mu_{324} = 1 - 0,67 = 0,33.$$



Черт. 340.

Определяем величины конечных моментов (254) для стержневой рамы от загрузки пролета 1—2.

$$A_{\phi 2} = B_{\phi 2} = \frac{ql_1^3}{24}.$$

$$M_{12} = -\frac{6}{4,5} q \frac{4,5^3}{24} \cdot \frac{(3,27 - 1)}{(5,75 \cdot 3,27 - 1)} = -3,24 \text{ тм.}$$

$$M_{21} = -\frac{6}{4,5} q \frac{4,5^3}{24} \cdot \frac{(5,75 - 1)}{(5,75 \cdot 3,27 - 1)} = -6,76 \text{ тм.}$$

При помощи фокусных и распределительных коэффициентов находим конечные моменты¹ для прочих стержневой рамы:

$$M_{10} = M_{12} = -3,24 \text{ тм}; \quad M_{01} = -\frac{M_{10}}{k_{01}} = +1,62 \text{ тм};$$

$$M_{23} = M_{21}\mu_{123} = -6,76 \cdot 0,657 = -4,444 \text{ тм};$$

$$M_{34} = -M_{21}\mu_{124} = +6,76 \cdot 0,343 = +2,32 \text{ тм};$$

$$M_{42} = -\frac{M_{24}}{k_{42}} = -1,16 \text{ тм.}$$

Определяем величины конечных моментов для стержневой рамы при загрузке пролета 1—3.

Приняв во внимание, что $k_{32} = \infty$, вычисляем M_{23} по выражению:

$$M_{23} = -\frac{ql_3^2}{4} \left(\frac{1 - \frac{1}{k_{32}}}{k_{23} - \frac{1}{k_{12}}} \right) = -\frac{ql_3^2}{4k_{23}} = -\frac{5 \cdot 7^2}{4 \cdot 3,27} = -18,7 \text{ тм.}$$

¹ Положительными считаем моменты, соответствующие растяжению нижних волокон стержневой рамы и правых волокон у стоек.

Концевые моменты для других стержней рамы вычисляем, пользуясь коэффициентами k и μ :

$$M_{21} = M_{23} \mu_{221} = -18,7 \cdot 0,67 = -12,47 \text{ тм},$$

$$M_{24} = M_{23} \mu_{224} = -18,7 \cdot 0,33 = -6,23 \text{ тм},$$

$$M_{42} = -\frac{M_{23}}{k_{42}} = 3,12 \text{ тм},$$

$$M_{12} = -\frac{M_{21}}{k_{12}} = \frac{12,47}{5,75} = 2,17 \text{ тм},$$

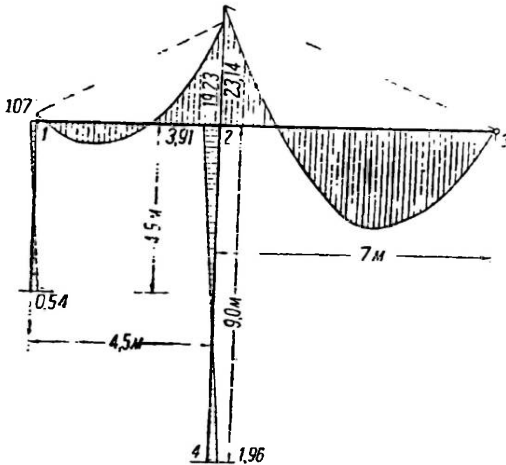
$$M_{10} = M_{12} = 2,17 \text{ тм},$$

$$M_{01} = -\frac{M_{10}}{k_{01}} = -\frac{2,17}{2} = -1,08 \text{ тм},$$

Окончательные величины конечных моментов в каждом стержне рамы от заданного нагружения рамы получим путем суммирования найденных конечных моментов от нагружения каждого пролета в отдельности. Величины их даны в табл. 59.

Таблица 59

Концевые моменты в раме (черт. 341), вычисленные при помощи фокусных отношений



Черт. 341.

| Наименование концевого мо- мента | Величина конечных мо- ментов от нагружения | | |
|--|---|------------------|------------------|
| | пролета l_2 | пролета l_3 | двух пролетов |
| M_{01} | + 1,62 | - 1,08 | + 0,54 |
| M_{10} | - 3,24 | + 2,17 | - 1,07 |
| M_{12} | - 3,24 | + 2,17 | - 1,07 |
| M_{21} | - 6,76 | - 12,47 | - 19,23 |
| M_{23} | - 4,44 | - 18,70 | - 23,14 |
| M_{24} | + 2,32 | - 6,23 | - 3,91 |
| M_{42} | - 1,16 | + 3,12 | + 1,96 |

На черт. 341 построена окончательная эпюра моментов. Ординаты ее в нагруженных пролетах вычисляются в обычном порядке.

Производим контроль полученной эпюры моментов по замкнутому контуру 0-1-2-4:

$$\begin{aligned} \sum \frac{\Omega}{EJ} &= \frac{(-1,07 + 0,54) 4,5}{2 \cdot 1 \cdot 4,5} + \frac{-4,5(1,07 + 19,23)}{2 \cdot 2,5 \cdot 4,5} + \\ &+ \frac{2}{3} \cdot \frac{12,65 \cdot 4,5}{2,5 \cdot 4,5} + \frac{(3,91 - 1,96) 9}{2 \cdot 1 \cdot 9} = 0,02. \end{aligned}$$

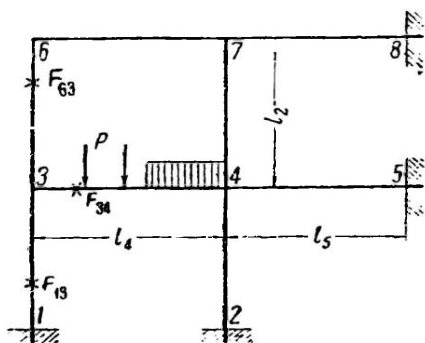
Ошибка менее 0,50%.

§ 83. РАСЧЕТ РАМ С ЗАМКНУТЫМИ КОНТУРАМИ, НО БЕЗ ЛИНЕЙНЫХ СМЕЩЕНИЙ УЗЛОВ

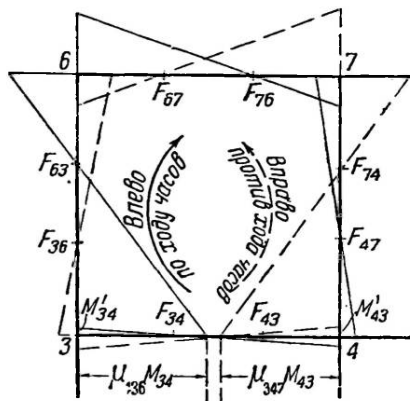
1. Отличие замкнутого контура от незамкнутого в отношении распространения конечных моментов нагруженного стержня. Рамы с замкнутыми контурами (черт. 342) отличаются от неразрезных балок и одноэтажных рам (черт. 339) тем, что при нагружении отдельных стержней замкнутого контура в остальных ненагруженных стержнях этого контура не имеется постоянных нулевых точек эпюры моментов. Это происходит от того, что изгибающие моменты в пределах остальных стержней появляются с двух сторон: левый концевой момент нагруженного пролета распространяется на весь контур в одну сторону, а правый концевой момент — на весь контур в обратную сторону.

Например в замкнутом контуре 3—4—7—6 рамы, показанной на черт. 342, изгибающие моменты, вызываемые действием нагрузки, расположенной на стержне 3—4, появляются в остальных стержнях в результате распространения как конечного момента M_{34} от узла 3 на весь контур по ходу часовой стрелки (на черт. 343 сплошная линия), так и конечного момента M_{43} от узла 4—против хода часовой стрелки (пунктирная линия)¹.

Однако указанная особенность не мешает использовать обычные фокусные точки для построения полной эпюры моментов в стержнях замкнутого контура. Полная эпюра моментов в пределах незагруженных стержней получается путем сложения ординат отдельных эпюр моментов, полученных от распространения конечных моментов через обычные фокусные точки при посредстве коэффициентов распределения моментов в узлах. В пределах же загруженного стержня к орди-



Черт. 342.



Черт. 343.

натам указанных эпюр, получаемых от сложения конечных моментов, добавляются ординаты эпюры моментов от нагрузки, расположенной на этом стержне, рассматриваемом как балка, свободно опертая по концам.

Таким образом вопрос о построении полной эпюры моментов в замкнутом контуре связан с определением фокусных отношений и коэффициентов μ .

2. Определение фокусных отношений и коэффициентов распределения моментов. Как известно (§ 79), фокусное отношение, соответствующее фокусной точке, лежащей вблизи какого-либо узла рамы, определяется через фокусные отношения для фокусных точек, расположенных у противоположных концов стержней, примыкающих к тому же узлу. Например для определения фокусного отношения для фокусной точки F_{34} в замкнутом контуре 3—4—7—6 (черт. 342) надо знать фокусные отношения для фокусных точек F_{18} и F_{63} .

Таким образом при определении фокусных отношений в замкнутом контуре приходится задаваться по соображению значением фокусного отношения в каком-либо стержне контура и затем по нему определять остальные фокусные отношения, делая обход этого контура. В результате обхода мы приходим к стержню, с которого начали обход, и получим для него новое исправленное значение фокусного отношения, по которому вновь надо пересчитать все фокусные отношения, обходя снова по контуру. Получив второе исправленное значение фокусного отношения для исходного стержня, надо сделать новый пересчет и т. д. Этот процесс, представляющий собой последовательное приближение, выполняется до тех пор, пока не получится достаточно близкое совпадение исходной величины фокусного отношения к получаемой из расчета.

¹ На черт. 343 не показано распространение эпюры моментов на стержни рамы, примыкающие к контуру 3—4—7—6.

Проследим этот процесс на частном случае рамы¹, показанной на черт. 344. В рассматриваемом случае известны фокусные отношения k_{13} и k_{24} в стержнях 1—3 и 2—4, нижние концы которых заделаны; в них $k_{13} = k_{24} = 2$. Фокусные отношения k_{63} и k_{64} неизвестны; ими надо задаться. Так как концы стержней 3—5 и 6—4 упруго заделаны, то фокусные отношения k_{63} и k_{64}

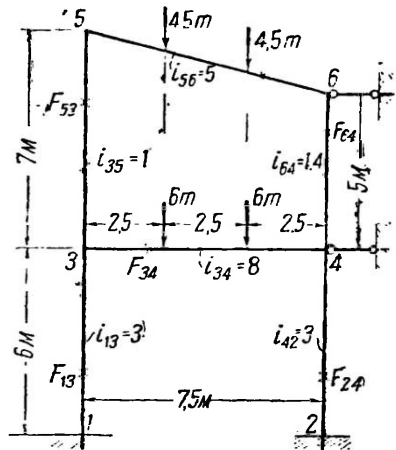
теперь мы можем провести вычисление всех фокусных коэффициентов по контуру 3—4—6—5 [формула (246)]:

$$k_{34} = 2 + \frac{8}{\frac{3}{2 - \frac{1}{2}} + \frac{1}{2 - \frac{1}{3}}} = 5,08,$$

$$k_{46} = 2 + \frac{1,4}{\frac{8}{2 - \frac{1}{5,08}} + \frac{3}{2 - \frac{1}{2}}} = 2,217,$$

$$k_{65} = 2 + \frac{5}{\frac{1,4}{2 - \frac{1}{2,217}}} = 7,53,$$

$$k_{63} = 2 + \frac{1}{\frac{5}{2 - \frac{1}{7,532}}} = 2,37.$$



Черт. 344.

Так как полученное отношение $k_{63} = 2,373 < 3$, принятого в начале, делаем пересчет по полученному значению k_{63} :

$$k_{34} = 2 + \frac{8}{\frac{3}{2 - \frac{1}{2}} + \frac{1}{2 - \frac{1}{2,37}}} = 5,038,$$

$$k_{46} = 2 + \frac{1,4}{\frac{8}{2 - \frac{1}{5,04}} + \frac{3}{2 - \frac{1}{2}}} = 2,217.$$

Из сопоставления результатов первого и второго подсчета можно видеть, что величины коэффициентов k_{46} в обоих случаях одинаковы; следовательно дальнейшие вторичные величины фокусных отношений будут одинаковыми с первым расчетом, поэтому можно принять:

$$k_{63} = 2,373; \quad k_{34} = 5,038; \quad k_{46} = 2,217; \quad k_{65} = 7,532.$$

Определяя аналогичным путем фокусные отношения k_{43} , k_{35} , k_{56} и k_{64} по предварительно принятой величине $k_{64} = 3$ и величине $k_{24} = 2$, получим $k_{64} = 2,531$, $k_{43} = 4,785$; $k_{35} = 2,155$; $k_{56} = 9,680$.

Фокусные отношения для стоек 1—3 и 2—4 будут:

$$k_{13} = 2,00; \quad k_{31} = 2 + \frac{3}{\frac{1}{2 - \frac{1}{2,373}} + \frac{8}{2 - \frac{1}{4,785}}} = 2,588,$$

$$k_{24} = 2; \quad k_{42} = 2 + \frac{3}{\frac{1,4}{2 - \frac{1}{2,53}} + \frac{8}{2 - \frac{1}{5,038}}} = 2,565.$$

¹ Пример взят из книги проф. Б. Н. Жемочкина „Расчет рам“, стр. 259, Госстройиздат, 1933.

Можно отметить, что ошибка, делаемая в предварительном определении начального фокусного отношения, выправляется обычно уже при втором пересчете. После того как определены фокусные отношения, представляется возможным вычислить по ним коэффициенты μ распределения моментов в узлах по формуле (249).

Узел 3:

$$M_{31} = 1,$$

$$\mu_{135} = \frac{i_{35}(k_{31} - 2)}{i_{31}\left(2 - \frac{1}{k_{35}}\right)} = \frac{1(2,588 - 2)}{3\left(2 - \frac{1}{2,373}\right)} = 0,124,$$

$$\mu_{134} = 1 - 0,124 = 0,876.$$

Узел 3:

$$M_{34} = 1,$$

$$\mu_{431} = \frac{i_{31}(k_{34} - 2)}{i_{34}\left(2 - \frac{1}{k_{13}}\right)} = \frac{3(5,038 - 2)}{8\left(2 - \frac{1}{2}\right)} = 0,759,$$

$$\mu_{435} = 1 - 0,759 = 0,241.$$

Узел 3:

$$M_{35} = 1,$$

$$\mu_{534} = \frac{i_{34}(k_{35} - 2)}{i_{35}\left(2 - \frac{1}{k_{43}}\right)} = \frac{8(2,155 - 2)}{1\left(2 - \frac{1}{4,785}\right)} = 0,692,$$

$$\mu_{531} = 1 - 0,692 = 0,308.$$

Аналогичным образом определяются коэффициенты μ у узла 4:

$$M_{42} = 1 \quad \mu_{245} = 0,836 \quad \mu_{246} = 0,164$$

$$M_{43} = 1 \quad \mu_{349} = 0,696 \quad \mu_{346} = 0,304$$

$$M_{46} = 1 \quad \mu_{642} = 0,310 \quad \mu_{643} = 0,690$$

Эти значения фокусных отношений и коэффициентов распределения остаются постоянными, как не зависящие от вида и расположения нагрузки на раме.

3. Контроль вычислений. Процесс вычисления фокусных отношений и коэффициентов распределения моментов связан с большими арифметическими подсчетами, в которые могут вкратиться ошибки. Для своевременного обнаружения их желательно проводить контроль, используя для этого другие формулы или отношения. Для такого контроля применяется формула ¹, показывающая, что взаимное отношение произведений левых и правых фокусных отношений в замкнутом контуре равно взаимному отношению произведений коэффициентов μ распределения моментов в том же контуре при обходе его по ходу и против хода часовой стрелки. В применении к контуру, показанному на черт. 343, эта формула напишется так:

$$\frac{k_{34}k_{54}k_{65}k_{46}}{k_{43}k_{64}k_{56}k_{35}} = \frac{\mu_{435}\mu_{356}\mu_{564}\mu_{641}}{\mu_{346}\mu_{465}\mu_{653}\mu_{534}}.$$

Подставив цифровые величины и учтя, что $\mu_{356} = \mu_{653}$ и $\mu_{564} = \mu_{465}$, получим:

$$\frac{5,038 \cdot 2,373 \cdot 7,532 \cdot 2,217}{4,785 \cdot 2,531 \cdot 9,680 \cdot 2,155} = \frac{0,241 \cdot 0,690}{0,304 \cdot 0,692},$$

$$\text{или } 0,790 \approx 0,792.$$

4. Расчетные моменты. Процесс определения расчетных моментов и построения окончательной эпюры моментов не представляет собой чего-либо нового, поэтому следует только проследить ход процесса.

¹ Нами не разбирается здесь вывод этой формулы, так как он не является существенным для усвоения метода. Вывод этой формулы можно найти в статье проф. И. М. Рабиновича „Контрольные равенства для фокусных отношений“, Сборник исследований по теории сооружений, стр. 246, ОНТИ, 1936.

1) Прежде всего вычисляются концевые моменты $M_{(n-1)n}$ и $M_n(n-1)$ в каждом загруженном стержне L_n .

2) По этим моментам определяются моменты в узлах контура путем распространения левого концевого момента загруженного пролета по стержням, лежащим слева по контуру, и правого момента — по стержням, лежащим справа по контуру.

Концевые моменты распределяются между стержнями, сходящимися в узле при посредстве коэффициентов распределения. По полученным моментам вычисляются моменты у других концов стержней при помощи фокусных отношений. Эти моменты опять распределяются между стержнями, сходящимися у этих узлов, и т. д.

Например концевой момент $M_{34} = -4,91$ тм распределяется на моменты:

$$M_{35} = \nu_{435} \cdot M_{34} = -0,241 \cdot 4,91 = 1,18 \text{ тм,}$$

$$M_{31} = \nu_{431} \cdot M_{34} = -0,759 \cdot 4,91 = -3,73 \text{ тм.}$$

Знаки моментов устанавливаются по сравнению с их направлением относительно узла. В сумме они должны уравнивать распределяемый момент и должны иметь направление, противоположное ему.

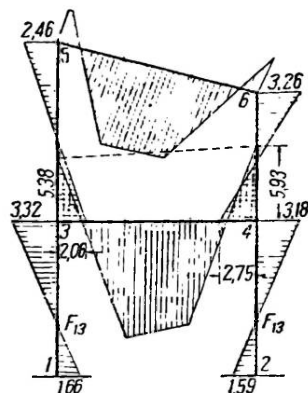
Переход от момента M_{35} к моменту M_{53} делается по условию:

$$M_{53} = -\frac{M_{35}}{k_{53}} = -\frac{1,18}{2,373} = -0,50 \text{ тм}$$

и т. д.

Отметим, что величины моментов убывают по контуру скорее, чем это имеет место в неразрезных балках, поэтому обход по контуру дает обычно уже на третьем стержне моменты такой величины, что ими можно пренебречь по сравнению с величинами основных расчетных моментов по концам загруженного пролета.

3) Полные расчетные моменты определяются сложением моментов, получаемых при обходе контура от каждого вида загрузки. Это сложение



Черт. 345.

следует делать в табличной

Таблица *60

Вычисление расчетных моментов по фокусным отношениям в раме с замкнутым контуром (черт. 344)

| | Нагрузка верхнего ригеля | | Нагрузка нижнего ригеля | | Моменты от загрузки в смежных контурах | Момент от всех нагрузок |
|----------|--------------------------|--------------|-------------------------|--------------|--|-------------------------|
| | обход слева | обход справа | обход слева | обход справа | | |
| M_{13} | -0,14 | -0,06 | +1,86 | — | — | +1,66 |
| M_{31} | +0,29 | -0,13 | -3,73 | -0,01 | — | -3,32 |
| M_{35} | +0,95 | -0,04 | +1,18 | -0,03 | — | +2,06 |
| M_{34} | -0,66 | +0,17 | -4,91 | +0,02 | — | -5,38 |

и т. д.

На черт. 345 построена полная эпюра моментов в раме от заданной нагрузки. Правильность ее построения проверяется обычными приемами: проверкой равновесия внутренних сил в сквозных разрезах, равенства нулю относительных перемещений в сечениях и т. д.

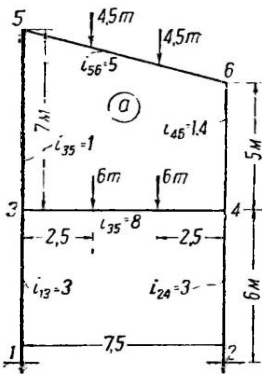
§ 84. РАСЧЕТ РАМ С ГОРИЗОНТАЛЬНЫМИ СМЕЩЕНИЯМИ

В рамах, не имеющих закреплений против горизонтальных смещений ее узлов (черт. 346,а), приходится учитывать моменты и усилия, вызываемые в ней не только нагрузкой, но и возможными линейными смещениями узлов. Число независи-

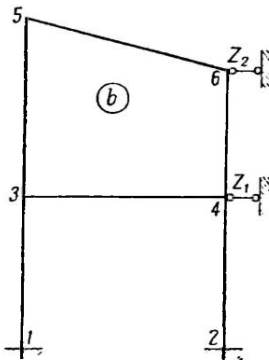
мых возможных линейных смещений узлов в каждой раме устанавливается приемами, рассмотренными в § 61. Принимают раму шарнирной во всех узлах (промежуточных и опорных) и устанавливают число связей, которые должны быть введены в полученную шарнирную систему, чтобы она стала неизменяемой. Этим числом необходимых связей устанавливается число независимых возможных смещений в заданной раме.

Для определения неизвестных смещений в раме приходится составлять дополнительные уравнения, для чего используется прием, аналогичный приему, применяемому в расчетах рам по методу деформаций. В раму вводят дополнительные, пока неизвестные, связи Z_1, Z_2, \dots, Z_n , препятствующие смещениям ее узлов (черт. 346, б). Так как в действительности этих закреплений, или связей, в системе нет, то сумма реакций по направлению каждой из них равна нулю; это положение позволяет составлять дополнительные уравнения. Если обозначить через R_{kp} реакцию по направлению связи k от действия заданной нагрузки, и через r_{k1}, r_{k2}, \dots реакции по направлению той же связи от смещений $Z_1 = 1, Z_2 = 1, \dots$, то дополнительное уравнение для связи k напишется так:

$$r_{k1}Z_1 + r_{k2}Z_2 + \dots + r_{kn}Z_n + R_{kp} = 0. \quad (255)$$



Черт. 346.



Число таких уравнений канонического вида будет равно числу неизвестных возможных смещений в раме; из совместного решения их определяются величины смещений. После этого нетрудно определить дополнительные внутренние силы и моменты в стержнях рамы, вызываемые указанными смещениями.

Таким образом расчет рам со смещающимися узлами способом моментных фокусов распадается на две части: на расчет рамы, не имеющей смещений узлов

при наличии введенных дополнительных связей, и на расчет ее под действием неизвестных смещений. Расчет рам с несмещающимися узлами нами разобран в предыдущих параграфах, поэтому здесь мы разберем в основном процесс расчета рамы под действием возможных в ней смещений. Разбор этого процесса целесообразно провести с параллельным применением его к расчету рамы (черт. 344), которая была рассмотрена нами в предыдущем параграфе, как рама с несмещающимися узлами, и для которой уже известны фокусные отношения и коэффициенты распределения моментов.

Рама, показанная на черт. 346, имеет два независимых линейных смещения Z_1 и Z_2 ; для определения их надо составить два уравнения (255):

$$\left. \begin{aligned} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1p} &= 0, \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2p} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (256)$$

Коэффициенты r при неизвестных представляют собой реакции, вызываемые сопротивлением стоек рам линейному смещению, равному единице, и определяются как поперечные силы по формуле:

$$r = \Sigma \bar{Q} = \Sigma \frac{\bar{M}_n - \bar{M}_{n-1}}{l_n}. \quad (257)$$

Здесь сумма распространяется на все стойки рассматриваемого ряда.

В этой формуле \bar{M}_n и \bar{M}_{n-1} представляют собой моменты по концам стоек, вызванные действием линейного смещения $\bar{Z} = 1$; в формуле (257) они приняты с положительными знаками (см. примечание на стр. 290).

Величины этих моментов определяются из рассмотрения рамы раздельно под действием каждого из возможных в ней смещений \bar{Z} .

Например для определения величин r_{11} , r_{12} , r_{21} и r_{22} , входящих в уравнение (256), рама (черт. 346) должна быть рассмотрена под действием линейных смещений $\bar{Z}_1 = 1$ и $\bar{Z}_2 = 1$.

Смещение $\bar{Z}_1 = 1$ вызывает поворот всех стоек нижнего яруса и параллельное смещение стоек верхнего яруса (черт. 347, а). Смещение верхних узлов стоек первого ряда создаст моменты по концам этих стоек, определяемые по формулам (254).

Для стойки 1—3:

$$M_{13} = -\frac{6i_{13}(k_{31} + 1)}{i_{13}(k_{13}k_{31} - 1)}\bar{Z}_1 = -\frac{6 \cdot 3(2,588 + 1)}{6(2 \cdot 2,588 - 1)} = -2,58 \text{ т.м.},$$

$$M_{31} = +\frac{6i_{13}(k_{13} + 1)}{i_{13}(k_{13}k_{31} - 1)}\bar{Z}_1 = 2,16 \text{ т.м.}$$

Для стойки 2—4:

$$M_{24} = +\frac{6i_{24}(k_{42} + 1)}{i_{24}(k_{24}k_{42} - 1)}\bar{Z}_1 = \frac{6 \cdot 3(2,565 + 1)}{6(2 \cdot 2,565 - 1)} = 2,59 \text{ т.м.},$$

$$M_{42} = -\frac{6i_{24}(k_{24} + 1)}{i_{24}(k_{24}k_{42} - 1)}\bar{Z}_1 = -2,18 \text{ т.м.}$$

Моменты в остальных узлах определяются по этим конечным моментам при помощи фокусных отношений и при посредстве коэффициентов распределения в порядке обхода контура рамы вправо и влево.

Например, распределяя момент $M_{31} = 2,16$ т.м., получим:
Обход вправо:

$$M_{34} = \mu_{134}M_{31} = 0,876 \cdot 2,16 = +1,89 \text{ т.м.},$$

$$M_{43} = -\frac{M_{34}}{k_{43}} = -\frac{1,89}{4,785} = -0,39 \text{ т.м.}$$

и т. д.

Обход влево:

$$M_{35} = \mu_{135}M_{31} = 0,124 \cdot 2,16 = +0,27 \text{ т.м.},$$

$$M_{53} = -\frac{M_{35}}{k_{53}} = -\frac{0,27}{2,373} = -0,11 \text{ т.м.}$$

и т. д.

Такое вычисление моментов делается раздельно по конечным моментам в каждой стойке рамы. Полученные из этих вычислений величины одноименных моментов суммируются (табл. 61) для получения полных величин моментов по концам стержней, вызываемых действием смещения $\bar{Z}_1 = 1$.

Таблица 61
Вычисление конечных моментов в стержнях рамы
от линейного смещения $\bar{Z}_1 = 1$

| Наименование момента | Момент от поворота стойки 1—3 | Момент от поворота стойки 2—4 | Полный момент от линейного смещения $\bar{Z}_1 = 1$ |
|----------------------|-------------------------------|-------------------------------|---|
| M_{13} | -2,58 | -0,14 | -2,72 |
| M_{31} | +2,16 | +0,27 | +2,43 |
| M_{35} | +0,27 | -0,09 | +0,18 |
| M_{53} | -0,11 + 0,01 ¹ | +0,04 - 0,01 | -0,07 |
| M_{34} | +1,89 | +0,36 | +2,25 |
| M_{43} | -0,39 | -1,82 | -2,21 |
| | и т. д. | | |

¹ Вторые числа являются моментами, получаемыми при вторичном обходе контура рамы; они прибавляются к моментам, полученным при первом обходе контура, если величина их достигает примерно 5% от последних.

Зная полные величины моментов по концам стоек рамы, можно вычислить реактивные силы, вызываемые смещением $\bar{Z}_1 = 1$ [формула (257)].

Сумма реакций по верхним стойкам (черт. 347, а):

$$r_{21} = Q_{35} + Q_{46} = \frac{M_{53} - M_{35}}{l_{35}} + \frac{M_{64} - M_{46}}{l_{46}},$$

$$r_{11} = Q_{13} + Q_{24} = \frac{M_{31} - M_{13}}{l_{13}} + \frac{M_{42} - M_{24}}{l_{24}}.$$

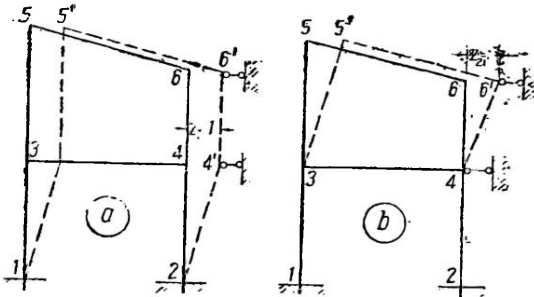
Аналогичным путем определяются величины реакций r_{12} и r_{22} , вызываемые действием линейного смещения $\bar{Z}_2 = 1$.

Под действием этого смещения поворачиваются стойки второго яруса рамы (черт. 347, б).

Смещение верхних узлов каждой стойки на величину $\bar{Z}_2 = 1$ вызывает по концам их опорные моменты, определяемые по формулам (254):

$$M_{33} = -\frac{6i_{35}(k_{53} + 1)}{l_{35}(k_{53}k_{35} - 1)} \bar{Z}_2; \quad M_{53} = \frac{6i_{35}(k_{35} + 1)}{l_{35}(k_{53}k_{35} - 1)} \bar{Z}_2;$$

$$M_{46} = \frac{6i_{46}(k_{64} + 1)}{l_{46}(k_{64}k_{46} - 1)} \bar{Z}_2; \quad M_{64} = -\frac{6i_{46}(k_{46} + 1)}{l_{46}(k_{64}k_{46} - 1)} \bar{Z}_2.$$



Черт. 347.

Далее вычисляются моменты по концам стержней, по ним вычисляются полные моменты и по последним определяются реакции от линейного смещения узлов:

$$r_{22} = \frac{M_{53} - M_{35}}{l_{35}} + \frac{M_{64} - M_{46}}{l_{46}},$$

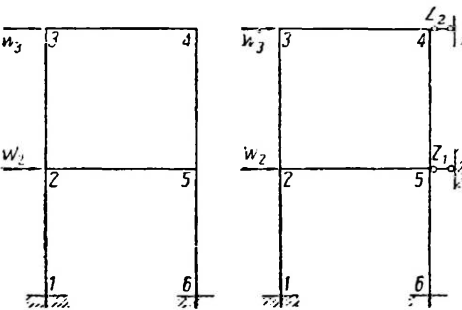
$$r_{12} = \frac{M_{31} - M_{13}}{l_{13}} + \frac{M_{42} - M_{24}}{l_{24}}.$$

Свободные члены R в уравнениях (256) представляют собой реакции от заданной нагрузки по направлению введенных связей. Если заданная нагрузка вертикальна, то величины R определяются, как поперечные силы по моментам на концах стоек, вызываемым действием заданной нагрузки.

Например, для нагрузки, показанной на черт. 346, эти реакции определяются выражениями:

$$R_{2p} = \frac{M_{53p} - M_{35p}}{l_{35}} + \frac{M_{64p} - M_{46p}}{l_{46}},$$

$$R_{1p} = \frac{M_{31p} - M_{13p}}{l_{13}} + \frac{M_{42p} - M_{24p}}{l_{24}}.$$



Черт. 348.

Моменты, входящие в эти выражения, представляют собой суммы моментов, вызываемых действием нагрузки, расположенной на верхнем и нижнем ригелях рамы и вычисляемых отдельно для каждого вида загрузки (табл. 60).

Если нагрузка была бы направлена горизонтально и приложена в узлах рамы (черт. 348), то величины R определялись бы просто реакцией от соответственных узловых нагрузок:

$$R_{2p} = -W_3; \quad R_{1p} = -(W_2 + W_3).$$

После того как вычислены коэффициенты r и свободные члены R , входящие в уравнения (256), определение неизвестных Z из них не представляет затруднений.

Далее остается вычислить окончательные моменты в раме от действия заданной нагрузки и линейных смещений Z_1, Z_2, \dots , имеющих место в ней. Это вычисление делается по формуле:

$$M = M_p + \bar{M}_1 Z_1 + \bar{M}_2 Z_2 + \dots + \bar{M}_n Z_n.$$

Здесь M_p — полный момент от заданной нагрузки (табл. 60);

$\bar{M}_1, \bar{M}_2, \dots, \bar{M}_n$ — моменты от смещений $Z_1 = 1$;

$Z_2 = 1, \dots$, вычисленные при определении величин r .

После того как вычислены суммарные моменты от нагрузки и линейных смещений, расчет рамы заканчивается в обычном порядке.

Из вышележащего видно, что определение величин r , входящих в уравнения (256), не зависит от вида загрузки рамы; поэтому он проводится отдельно, и результат этого расчета используется для всех видов загрузки рамы.

§ 85. ОБЩИЕ ВЫВОДЫ

Характерной особенностью расчета рам способом моментных фокусов является вычисление фокусных отношений и коэффициентов распределения моментов в узлах. Это вычисление связано с большими арифметическими подсчетами. Но величины фокусных отношений и коэффициентов распределения не зависят от вида и условий загрузки рамы; они остаются одними и теми же для любой нагрузки.

В этом заключается преимущество способа фокусов. Если самая кропотливая работа по вычислению фокусных отношений и коэффициентов распределения сделана, то определение моментов для любой новой нагрузки проводится просто и быстро. Поэтому способ фокусов следует применять в тех случаях, когда для построения объемлющей эпюры (см. § 18) надо рассмотреть раму под действием ряда различных нагрузок.

Наличие большого числа смещений в рамах осложняет расчет способом фокусов. Поэтому применение его для расчета многоярусных рам нецелесообразно. Однако способ фокусов с успехом может быть использован для расчета рам одноярусных (черт. 339), не имеющих замкнутых контуров и горизонтальных смещений, особенно при наличии временной нагрузки, располагаемой на разных пролетах.

Наличие симметрии в раме упрощает расчет ее способом фокусов, так как позволяет рассматривать ее в условиях прямой и обратной симметрии загрузки и получить те же упрощения, как и в расчетах по методу сил и методу деформаций.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ОБЗОР

§ 86. КРАТКИЙ ОБЗОР РАЗВИТИЯ РАСЧЕТОВ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ

Развитие расчетов статически неопределимых систем имеет свое историческое прошлое и современное устремление.

Можно считать, что расчет по методу сил окончательно оформился к концу XIX в. Начавшееся в середине XIX в. строительство железнодорожных мостов с большими железными пролетными строениями, представлявшими собой неразрезные балочные системы со сложной решеткой, вызвали искание методов расчета их. К этому периоду времени относится опубликование основных теорем, легших в основу расчета по методу сил.

В 1864 г. Максвелл¹ опубликовал свою теорию расчета статически неопределимой решетки; в этой работе им доказан принцип взаимности линейных перемещений. В 1874 г. Мор (Mohr)² опубликовал свою работу, в которой он на основе выведенного им закона возможных перемещений дал полную теорию ферм со статически неопределимой решеткой. В 1875 г. была опубликована работа Кастильяно³, в которой им при помощи закона

¹ Clerk Maxwell, On the calculation of the equilibrium and stiffness of frames. Philosophical Magazine, т. 27. 1864.

² O. Mohr, Beitrag zur Theorie des Fachwerks, Zeitschrift des Hannov. Arch. u. Ing. Vereins, 1874—1875.

³ A. Castigliano, Nuova teoria intorno dell'equilibrio dei sistemi elastici. Torino, Atti della Accademia delle scienze, 1875.

Клапейрона (1833)¹ установлен принцип наименьшей работы, использованный им в исследовании статически неопределимой решетки. К этому же времени относится работа Бетти (1872)², в которой доказана теорема о взаимности возможной работы.

Эти основные теоремы аналитического выражения перемещений явились основой для оформления метода сил. Но еще раньше был установлен ряд положений, используемых в расчетах по методу сил.

Бесшарнирные своды из тесаного камня возводились в древнейшие времена и поэтому должны рассматриваться как первые статически неопределимые системы. Но в те времена своды не рассчитывались, а возводились по соображению о геометрическом подобии. Считают, что впервые расчетом устойчивости свода занялся Лагир (de la Hire, 1712), который рассматривал действие средней части свода как клина, стремящегося вывернуть наружу боковые части. В 1773 г. Кулон (Coulomb) предложил проводить расчет свода по условию предельного равновесия. По его идее устойчивость свода будет обеспечена, если камни свода, рассматриваемые как клинья, не будут иметь возможности сдвигаться в швах и поворачиваться вокруг нижнего ребра под действием равнодействующей силы, получаемой от сложения горизонтального распора, приложенного в верхней грани ключевого сечения, и весов нагрузки, расположенной от ключа свода до рассматриваемого сечения. Предложение Кулона было дополнено Навье (Navier, 1826), указавшим на необходимость расчета свода не только на устойчивость, но и на прочность. Это предложение связано с тем, что равнодействующая в швах каменных и кирпичных сводов должна проходить в средней трети прямоугольного сечения. Мозлей (Moseley, 1835) один из первых предложил применять для расчета свода кривую давлений; он считал, что в своде проходит множество вполне равноправных кривых давлений с разными величинами распора и предложил вести расчет свода при наименьшей предельной величине распора, когда кривая давлений проходит через высшую точку средней трети в ключевого сечения и через низшую точку средней трети — в пятовом сечении. Расчет каменных сводов по условию предельного равновесия сохранил свое значение в практике расчетов до конца XIX в. Развитие цементной промышленности и применение цемента как связывающего вещества в каменных и кирпичных сводах поставило вопрос о расчете этих сводов как упругих брусьев [Резаль (Resal), 1887]. Окончательный переход к расчету каменных и кирпичных сводов, как упругих, был сделан после опубликования в 1892 г. опытов Общества австрийских инженеров, показавших, что деформации каменных и кирпичных сводов в точности соответствуют деформациям, определяемым как для упругих тел.

Появление с началом железнодорожного строительства металлических арочных пролетных строений, представляющих собой одну связную арку, поставило вопрос о расчете их как упругих брусьев с кривой осью. Попытки такого расчета, повидимому, впервые были сделаны Рейхенбахом (Reichenbach, 1811). Позже в 1854 г. Бресс³ дал точный расчет арки как упругого бруса, проинтегрировав дифференциальное уравнение деформированной оси кривого бруса. Эта работа Бресса должна рассматриваться, как вполне соответствующая современному расчету арок. В последующее время (1870—1890 гг.) ряд ученых (Мор, Винклер, Вейраух, Мюллер-Бреслау и др.) опубликовали работы, уточнявшие и расширявшие приемы расчета арок. Особенно много в этом направлении было сделано Мюллер-Бреслау⁴. В этих работах им была использована и развита идея, предложенная Кронем (Kronh, 1880), об обращении в нуль побочных перемещений путем изменения координатных условий.

Вторым старейшим видом статически неопределимой системы была неразрезная балка. Простой ствол дерева, подпертый в трех точках, уже представляет собой неразрезную балку. Экономичность ее по сравнению с балками, свободно ополетыми, была известна в XVIII в., поэтому неразрезные балки, а позднее фермы были использованы уже в самом начале строительства мостов. Считают, что первый точный расчет неразрезной балки был дан Эйтельвейном (Eytelwein, 1808). Этот расчет он провел, устранив промежуточные опоры и проинтегрировав дифференциальное уравнение изогнутой оси балки под действием нагрузки и неизвестных опорных реакций; для определения последних им было использовано условие равенства нулю прогибов на опорах. Этот прием вполне соответствует современным требованиям, но не применяется из-за своей сложности. Он вполне заслуженно заменен приемом, предложенным Клапейроном (Clapeyron, 1857); по этому приему основная система получается в неразрезной балке путем введения в нее опорных шарниров; о достоинствах его достаточно сказано в изложении метода сил настоящей книги. Идея Клапейрона была развита Брессом (1865); все основные вопросы неразрезных балок им были разрешены. Кульманом (1866)⁵ была развита теория фокусов в неразрез-

¹ Lamé et Clapeyron, Mémoire sur l'équilibre intérieur des corps solides homogènes. Mémoire des savants étrang. d. l'Accad. d. Science à Paris, T. IV, 1833.

² E. Betti, *Il nuovo Cimento*. 2, т. 7 и 8, 1872.

³ Bress J. A. C. H., *Recherches analytiques sur la flexion et la résistance des pièces courbes*, Paris, 1854.

⁴ Müller-Breslau, H. Die neuen Methoden der Festigkeitslehre u. d. Statik d. Baukonstruktionen, 1886. (Есть русский перевод этой работы Н. Митинского: проф. Г. Мюллер-Бреслау „Новые методы строительной механики, основанные на принципе виртуальных перемещений и теоремах о работе деформаций“, СПб, 1898).

Его же, Графическая статика сооружений, т. II, ч. 2, отд. VIII, 1913.

⁵ K. Culmann, Die graphische Statik, Zürich 1866.

ных балках. Леви (1866)¹ развил теорию фокусных отношений и дополнил ее выводом теоремы о двух моментах, устанавливающих связь между моментами в сечениях двух смежных пролетов.

В 1868 г. Мор применил предложенный им прием графоаналитических расчетов к расчету неразрезных балок. Дальнейшее развитие теории неразрезных балок шло по пути усовершенствования и упрощения расчетов; среди лиц, работавших над этими вопросами из среды русских ученых, можно указать И. М. Рабиновича, П. Л. Пастернака, М. М. Филоненко-Бородича и др.

Деревянные фермы со сложной решеткой применялись еще в XVIII в. Появившаяся в 1820 г. дощатая ферма Тауна со сложной решеткой представляет собой статически неопределимую ферму. Этот вид решетки был использован и в первых железных мостах, строившихся в 50-х годах прошлого столетия. Однако правильный расчет их как статически неопределимых систем мог быть сделан только после опубликования основных теорем о деформациях Максвелла, Мора, Кастильяно, Бетти, указанных в начале настоящего параграфа. Параллельно с приемом аналитического определения перемещений в фермах шла разработка графических приемов. Здесь прежде всего надо отметить работу Виллио (1877)², содержащую обоснование способа построения перемещений, носящего имя его автора и используемого в настоящее время при определении прогибов и построении линий влияния статически неопределимых ферм.

Другой путь графических построений деформаций состоял в использовании фиктивных упругих грузов. В 1875 г. Мор опубликовал работу (указанную в сноске на стр. 299), в которой впервые рассматривается линия прогиба фермы, как веревочный многоугольник. Позже в период 1884—1886 гг. Мюллер-Бреслау опубликовал ряд статей, вошедших потом в его известный курс графической статки, в которых он развил идею Мора и разработал теорию фиктивных упругих грузов. Следует отметить также работу Ланда (Land, 1888) в области использования фиктивных упругих грузов, предложившего рассматривать деформацию цепи, как состоящей из жестких звеньев.

Сделанный нами краткий исторический обзор развития расчета основных статически неопределимых систем (сводов, арок, неразрезных балок и ферм) показывает, что расчеты их получили полное оформление к концу прошлого века. Нам не дано освещения развития к этому времени расчета рам, так как те приемы в расчетах рам, которые используются нами в настоящее время, получили свое развитие в позднейшее время. Это объясняется тем, что усовершенствование приемов расчета статически неопределимых систем в XIX в. отвечало на запросы мостостроения, в котором не встречалось сложных рам. В промышленном же строительстве избегали применения металлических рам, заменяя их металлическими колоннами с свободными опертями на них фермами. Необходимо однако отметить, что к этому времени уже были даны приемы, позволяющие приводить к нулю побочные перемещения; прием изменения координатных условий (Кров, 1880), разложение неизвестных на парные (Мюллер-Бреслау).

Толчком к развитию расчета статически неопределимых рам послужило применение железобетона в строительстве больших жилых и промышленных зданий.

Первые подходы к расчету сложных рам были сделаны с появлением в строительстве в конце 90-х годов безраскосных ферм Виренделя (Vierendeel), вызвавшим большие исследования этого вопроса. В 1907 г. псыявилась работа Зигмунд Мюллера (Zsigmund Müller), предложившего способ преобразования канонических уравнений в новую систему, каждое уравнение которой содержит одно неизвестное. Он по существу использовал „групповые“ неизвестные и дал способ вычисления коэффициентов при неизвестных, аналогичных получаемым из решения уравнения алгоритмом Гаусса. О достоинстве последнего было достаточно сказано в изложении расчета рам в настоящем курсе. Н. С. Стрелечкин (1922) была показана статическая интерпретация способа З. Мюллера. Дальнейшие работы по расчету рам методом сил шли в направлении упрощения его путем использования групповых преобразований, выбора единичных эпюры и т. д. [Пирле (Pirlet), Берешагин, И. М. Рабинович и др.]

В 1900 г. Риттер (W. Ritter) распространил способ моментных фокусных соотношений, известный из расчета неразрезных балок, на расчет рам. В последующем этот расчет был детально разработан Зутером (Suter, 1916) и Штрасснером (Strassner, 1916). О достоинствах этого приема, обоснованного на методе сил, сказано в соответствующей главе настоящего курса.

В 20-х годах этого столетия появились первые работы, излагающие основы расчета рам по методу деформаций, сюда должны быть отнесены работы Гелера³ и Бендиксена⁴. Оба автора использовали идею Мора, предложившего в 1892 г. проводить расчет жесткости узловых соединений в фермах, принимая за неизвестные углы поворотов. Заслужоги являются то, что они развили этот метод в применении к расчету рам. В последующий в этот метод были внесены полезные уточнения П. Л. Пастернаком (Pasternak, 1922), Б. Н. Жемочкиным (1927)⁵ и др. Сущность этого метода расчета изложена в соответствующем разделе настоящего курса. Его надо считать окончательно оформившимся.

¹ Maurice Lévy, La statique graphique, Paris 1866.

² Williot, Notations pratiques sur la statique graphique, 1877.

³ Gehler, Der Rahmen, 1913; Геллер, Жесткие рамы, перев. с 3 изд., 1927.

⁴ Bendixen A., Die Methode der Alpha-Gleichungen zur Berechnung von Rahmenkonstruktionen, Berlin 1914

⁵ Жемочкин Б. Н., Общий метод расчета статически неопределимых систем, Москва 1927.

Здесь следует отметить, что параллельно методу моментных фокусов имеется разработанный прием использования угловых фокусов, основанный на методе деформаций. Он был указан Пастернаком (1922) и подробно разработан Жемочкиным¹ (1929).

Большая связь и аналогия, имеющаяся между расчетами рам, по методу сил и методу рам подали мысль о смешанном использовании их. Идея этого приема в общем виде подробно разработана А. А. Гвоздевым (1927).

На этом можно закончить исторический обзор развития точных расчетов рам. Несомненно, в этом вопросе достигнуты большие успехи, однако все эти расчеты связаны с большим вычислительным процессом, требующим много времени и точности вычислений. Это обстоятельство поставило перед инженерами, занимающимися производственными расчетами, вопрос о возможных и допустимых упрощениях, сокращающих вычислительный процесс и обеспечивающих достаточную точность. Среди этих приемов заслуживают внимания прием Лёзера (Löser, 1925), Кросса (Cross, 1930), Перельштейна² (1931) и др. Я не разбираю их в своем изложении, так как по моему мнению разбор этих приемов, как вспомогательных, должен относиться к курсам железобетонных и металлических конструкций.

§ 87. СОВРЕМЕННЫЕ ИСКАНИЯ В ОБЛАСТИ РАСЧЕТОВ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ

В настоящем параграфе я ставлю себе задачей познакомить читателя с теми основными направлениями, которые намечались за последние примерно 15 лет в усовершенствовании расчетов статически неопределимых систем. Ограниченность объема книги и содержания курса заставляет это сделать в очень сжатой форме.

1. Механический расчет. Механический метод расчета статически неопределимых систем имеет своим обоснованием известное положение строительной механики, по которому величина момента или усилия в лишней связи, устраненной из системы, определяется выражением:

$$X_1 = \frac{\delta_{p1}^{(n-1)}}{\delta_{11}^{(n-1)}}.$$

Показатель $(n-1)$ устанавливает, что решение относится к основной системе, $(n-1)$ раз статически неопределимой.

Если в модели, представляющей собой изучаемую систему, создать устранение лишней связи в выбранном сечении и обеспечить единичное воздействие по направлению устраненной связи, то перемещение δ_{p1}^{n-1} , вызванное указанным воздействием по направлению силы P , измеренное в масштабе $\delta_{11}^{n-1} = 1$, определит собой величину искомого неизвестного момента или усилия, вызываемого действием силы P .

Отсюда ясно, что для производства механического расчета необходимо иметь модель и аппаратуру двух видов: создающую единичное воздействие и служащую для измерения перемещений.

Механический метод расчета был впервые оформлен проф. Беггом³, опубликовавшим свои работы в 1922 г.; в последующем он уточнил свой прибор „Deformeter“, т. е. измеритель деформации. На черт. 349а показана установка, сделанная НИИ пути и строительства НКПС по типу установки Беггса. На фотоснимке видна модель a арочной фермы, лежащей на шариках и закрепленной своими концами. С правой стороны видны зажимы b , прикрепленные к модели у места устраненной связи. На черт. 349б эти зажимы показаны в большом масштабе; они лежат на стекле, опирающемся на шарик. На черт. 349а видны три микроскопа, установленные для измерения перемещений δ_{p1} .

Модель может быть изготовлена из любого материала, удовлетворяющего закону Гука (целулоид и т. п.).

В этом процессе расчета прежде всего должна интересоваться достаточная точность его. Сравнение результатов, полученных Беггом по измерениям на модели с таковыми же, полученными аналитически, показали, что расхождение в максимальных ординатах перемещений (линий влияния) не превышает 50%, в малых ординатах это расхождение больше (достигает 500%), но там это не имеет серьезного значения.

Мы не останавливаемся здесь на описании процесса производства установки, измерений и пр., так как это выходит за пределы курса, но отметим, что производство этой работы требует большого навыка, тщательности в работе и научного подхода.

Опубликование Беггом своих работ вызвало появление ряда других приборов (Сопинастат, 1924; Nupubest, 1926, Influentiographie, 1926 и т. д.)⁴, являющихся видоизменением использования того же принципа и видоизменением аппаратуры.

¹ Жемочкин Б. Н., Расчет статически неопределимых рамных систем, Метод угловых фокусов, Москва 1929.

² См. Справочник инженера-проектировщика промсооружений, т. II, стр. 546—549. Москва 1934.

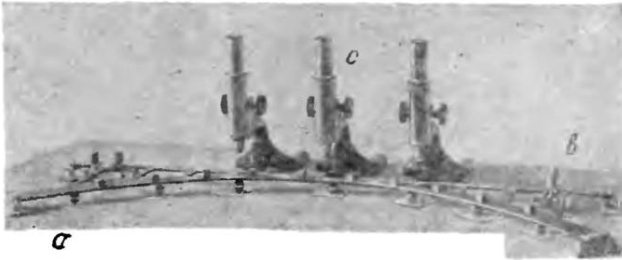
³ Begg's, G. E., American Concrete Institute, 18, 1922.

⁴ Описание их можно найти в статье И. М. Рабиновича, помещенной в Справочнике инженера-проектировщика, т. II, 1934.

Преимущество механического процесса расчета заключается в том, что он устраняет сложный вычислительный процесс, имеющий место при обычных расчетах статически неопределимых систем, избавляет расчет от возможных грубых арифметических просчетов и значительно сокращает время, потребное для расчета. Кроме того он дает возможность производить определение неизвестных в очень сложных системах, расчет которых затруднителен в обычном порядке.

Механический расчет не может полностью заменить аналитический расчет, но он должен быть использован как вспомогательный.

2. Расчет по заданным напряжениям. Расчет статически неопределимых систем обычными приемами связан с необходимостью предварительного определения поперечных сечений; исключением являются системы с постоянным сечением. Это приводит к тому



Черт. 349а.

что при окончательном расчете сечения оказываются недонапряженными и материал недостаточно экономно расходуется. Это навело на мысль искать пути расчета, при котором напряжения по возможности во всех сечениях были бы близки к допускаемым. Гейман (H. Heiman, 1928) наметил путь к возможности такого решения; проф. И. М. Рабинович¹ дал обоснование этого расчета и указал пути развития его.

Мы проследим процесс его на случае однажды статически неопределимой фермы.

Приступая к расчету, задаются напряжениями во всех стержнях фермы, приняв их равными допускаемым $[c]$ и задаются также величиной усилия X_1 в стержне, устраненном из данной системы в качестве лишнего.

Эти две данности позволяют составить два выражения относительного перемещения узлов, ограничивающих устраненный стержень.

1) По удлинению стержня:

$$\Delta l = \frac{X_1 s_1}{F_1 E};$$

2) По теореме Мора:

$$\Delta l = \sum \frac{N \bar{N}_1 s}{EF} = \sum [c] \frac{\bar{N}_1 s}{E};$$

\bar{N}_1 — усилие в каждом стержне основной системы, от силы $\bar{X}_1 = 1$, s_1 — длина каждого стержня.

Приравняв друг другу величины Δl , получим уравнение, из которого можно определить величину неизвестного

$$X_1 = \frac{F_1 E}{s_1} \sum [c] \frac{N_1 s}{E} \quad (a)$$

или напряжение в лишнем стержне:

$$\sigma_1 = \frac{X_1}{F_1} = \frac{E}{s_1} \sum [c] \frac{N_1 s}{E}.$$

¹ Рабинович И. М., проф., К теории расчета статически неопределимых ферм. Трансжелдориздат, 1933.

Если полученное напряжение $\sigma_1 < [\sigma]$ и по знаку соответствует знаку усилия неизвестного, который был принят в предварительном задании, то расчет можно считать удачно законченным. Во всех стержнях, кроме лишнего, напряжения будут близки к допускаемым.

Однако в результате решения может оказаться, что знак напряжения σ_1 не соответствует знаку принятого усилия X_1 или хотя и соответствует, но само напряжение $\sigma_1 > [\sigma]$. И в том и другом случаях потребуются задаваться новой величиной неизвестного и проделать расчет вновь.

Возможные пути выправления расчета указаны проф. И. М. Рабиновичем (см. сноску на предыдущей странице).

При наличии в системе нескольких неизвестных путь расчета остается таким же. Для определения неизвестных в устраненных стержнях получим уравнения, содержащие каждое по одному неизвестному:

$$\frac{X_1 s_1}{EF_1} = \sum [\sigma] \frac{\bar{N}_{1s}}{E}$$

$$\frac{X_2 s_2}{EF_2} = \sum [\sigma] \frac{\bar{N}_{2s}}{E}$$

и т. д.

Здесь могут иметь место те же осложнения, которые были указаны выше.

Проф. И. М. Рабинович распространил изучение этого приема расчета на неразрезные балки¹ и показал ход расчета последних по заданным напряжениям или заданным опорным моментам.

Достоинствами этого приема являются использование полностью поперечных сечений, простота определения самих неизвестных, так как все они определяются из уравнения с одним неизвестным.

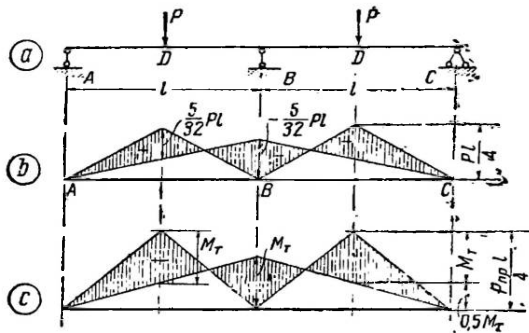
Недостатком его является то, что им дается экономическое решение только для постоянной нагрузки одного вида.

Вообще этот прием расчета по заданным напряжениям заслуживает внимания, но требуется еще дополнительная разработка его для возможности использования в производственных расчетах.

3. Расчет по предельной нагрузке. Под этим названием подразумеваем расчеты, производимые с учетом пластических деформаций. Из курсов сопротивления материалов

известно, что наличие в крайних волокнах поперечного сечения изгибаемого бруса напряжений, достигающих предела текучести материала, еще не вызывает разрушения балки или стержня, если они при этом не теряют боковой устойчивости и если постепенное нарастание нагрузки не вызовет образования в них «пластического шарнира»².

Образование пластического шарнира в балке или арке статически определимой нарушает условие их неизменяемости, благодаря чему они теряют свою грузоподъемность. Таким образом нагрузка, при которой в статически определимой системе



Черт. 350.

образуется пластический шарнир, должна рассматриваться как предельная (критическая³).

В системах статически неопределимых, обладающих излишним числом связей, появление пластических шарниров не создаст потери несущей способности системы, пока число образовавшихся пластических шарниров не превысит на единицу число лишних связей в системе. Но появление каждого нового пластического шарнира будет вызывать перераспределение напряжений в сечениях системы, или, что то же, моментов или усилий в системе.

Для пояснения рассмотрим двухпролетную балку, показанную на черт. 350, с двумя

¹ Рабинович И. М., проф., Расчет неразрезных балок на жестких и упругих опорах методом заданных моментов и напряжений, Сборник «Исследования по теории сооружений», 1936.

² Беляев Н. М., проф., Сопротивление материалов, § 117, 1939.

³ Нередко эту нагрузку, при которой образуется пластический шарнир, называют критической. Я считаю это название неудачным, так как оно смешивается с названием критической нагрузки, соответствующей потере устойчивости, поэтому в последующем сохраняю название «предельные нагрузки» и «предельное напряжение».

равным грузам, расположенными посредине пролетов, сечение балки постоянно. По обычному расчету в пределах упругости наибольшие моменты в сечениях этой балки будут:

$$M_B = -\frac{3}{16}Pl = -0,188 Pl,$$

под грузами

$$M_D = +\frac{5}{32}Pl = +0,156 Pl.$$

Так как $M_B > M_D$, то при увеличении нагрузки P пластический шарнир появится сначала в сечении на опоре B , когда момент достигнет величины M_T и неразрезная балка превратится в две балки, свободно опирающиеся на опоры. При дальнейшем нарастании нагрузки момент M_T на опоре у места образования пластического шарнира не будет нарастать, но будет происходить нарастание напряжений, следовательно и моментов во всех остальных сечениях балки.

Нарастание нагрузки может продолжаться до тех пор, пока в сечениях под грузом не образуются пластические шарниры, после чего балка потеряет несущую способность. Образование шарнира пластичности под грузами произойдет тогда, когда момент в этом сечении достигнет величины M_T , т. е. сравняется с величиной момента на опоре.

Равенство моментов в указанных двух сечениях дает возможность определить величину предельной нагрузки P_{np} :

$$\frac{P_{np}l}{4} - \frac{1}{2}M_T = M_T;$$

отсюда

$$P_{np} = \frac{6M_T}{l}.$$

Можно, наоборот, по величине груза P вычислить момент M_T :

$$M_T = \frac{Pl}{6} = 0,167 Pl.$$

Рассмотренный случай с достаточной ясностью выявляет принцип, положенный Гиркманом¹ в основу предложенного им способа расчета статически неопределимых систем со сплошными сечениями (рам, балок и пр.). Этот способ расчета можно назвать способом „выравнивания моментов“ в системе. Его предложение заключается в следующем.

По заданной нагрузке определяется допустимая предельная величина ее, для чего величина заданной нагрузки помножается на устанавливаемый нормами коэффициент запаса прочности.

Рассматриваемая рама или балка разбивается на отдельные стержни, которые рассматриваются как балки, шарнирно опертые по концам. Для каждой такой балки строится в обычном порядке эпюра моментов от заданной нагрузки.

Так как в действительности стержни закреплены по концам, то на их концах должны возникнуть концевые моменты, вызываемые действием нагрузки, расположенной на стержне. Гиркман считает, что величину этих моментов следует определять как предельную, при которой стержень потеряет несущую способность, что случится в тот момент, когда образуются пластические шарниры у мест наибольших моментов в пролете и на одном или обоих концах его. На основании этих соображений Гиркман предложил определять концевые моменты путем проведения замыкающей в эпюре так, чтобы она обеспечивала равенство наибольших ординат эпюры моментов в пролете и на опорах.

Предположим, что требуется установить предельную нагрузку в раме, показанной на черт. 351. Для того чтобы эта рама потеряла несущую способность, необходимо образование четырех пластических шарниров. Первый пластический шарнир появится под грузом при предельном значении момента M_T . Второй пластический шарнир образуется на конце b ригеля, ближайшем к точке приложения груза, когда момент достигнет величины M_T . При дальнейшем нарастании нагрузки величина момента M_T в точке b , выражающаяся через распор H (черт. 351):

$$M_T = Hz,$$

должна сохранить свою величину; но так как с увеличением нагрузки распор увеличивается, то, очевидно, это должно сопровождаться уменьшением длины отрезка z , т. е. перемещением нулевой точки вверх.

В этот период нарастания нагрузки может образоваться третий пластический шарнир в сечении ригеля у угла c , что вызовет потерю несущей способности ригеля. Если это не

¹ Girkman K., Bemessung von Rahmentragwerken unter Zugrundlegung eines ideal plastischen Stahles. Akademie der Wissenschaften in Wien, 1931.

произойдет, то при дальнейшем нарастании нагрузки и уменьшении длины отрезка z произойдет выравнивание моментов по концам стойки рамы; оно наступит при $z = 0,5 h$ (черт. 351, с):

$$M_a = M_b = M_T.$$

Это поведет к образованию четвертого пластического шарнира в раме, и она потеряет несущую способность.

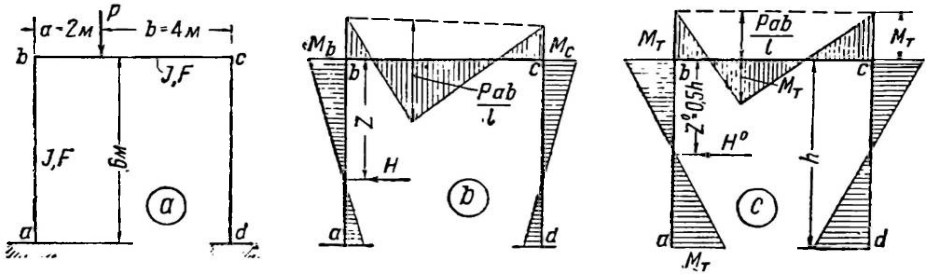
Предельная величина момента M_T определяется из условия:¹

$$2 M_T = \frac{Pab}{l}; \quad M_T = \frac{Pab}{2l} = 6,66 \text{ т.м.}$$

При обычном „упругом“ расчете момент в сечении под грузом в той же раме равен $8,58 \text{ т.м.} > M_T$.

Описанный прием расчета статически неопределимых систем подкупает своей простотой по сравнению со сложными процессами расчета по методу сил и деформаций. Этим объясняется то, что им заинтересовались, уточнили некоторые положения, проверили экспериментально на простейших моделях.

Результаты опытов подтвердили основные положения этого метода.



Черт. 351.

В расчетах рам с несколькими пролетами и ярусами выравнивание моментов в стержнях, сходящихся в одном узле, должно производиться с учетом сохранения равновесия в вырезанном узле. Если в узле сходится k стержней, то варьировать значение момента можно на концах $(k-1)$ стержней. Возможность варьирования вносит в расчет неопределенность, так как приводит к нескольким возможным решениям. Это обстоятельство следует рассматривать, как недостаток метода.

Вообще этот метод может считаться достаточно освоенным для расчета простейших статически неопределимых систем в виде неразрезных балок с небольшим числом пролетов. Применение его к расчету более сложных рам требует еще дополнительной разработки и экспериментирования.

Другой прием расчета статически неопределимых систем предложен Блейхом². В этом способе использовано так называемое состояние самонапряжения, появляющееся в статически неопределимых системах под действием повторяющейся и подвижной нагрузки. Применение его требует построения объемлющей эпюры моментов в сплошных системах и определения крайних значений усилий в стержнях ферм, определенных обычным „упругим“ расчетом, поэтому его нельзя считать самостоятельным, и изучение его следует отнести к курсу металлических конструкций.

Проф. С. А. Бернштейн с достаточной ясностью подчеркнул те трудности, которые имеют место в расчетах статически неопределимых ферм по предельной нагрузке³.

¹ На черт. 351, с размер, определяющий ординату $\frac{Pab}{l}$, должен доходить до вершины треугольника.

² Bleich H., Über die Bemessung statisch unbestimmter Skahltragwerke unter Berücksichtigung des elastisch plastischen Verhaltens des Baustoffes, „Der Bauingenieur“, H. 19/20, 1932.

³ Бернштейн С. А., Работа статически неопределимых ферм в упругопластической стадии, ЦНИПС, 1936.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ И ОТВЕТЫ

1. Система *a*. 12 раз статически неопределима.

Система *b*. 5 раз статически неопределима

$$3 \cdot 6 - 1 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 3 \cdot 2 = 5.$$

Система *c*. Фермочки, входящие в эту систему, надо считать за один диск или стержень. Система *b* раз статически неопределима.

Система *d*. $3 \cdot 15 - 1 \cdot 10 - 2 \cdot 5 = 25.$

2. Система станет 4 раза статически неопределимой.

3. Если бы не было шарниров в узлах, система была бы 15 раз статически неопределима; при наличии шарниров во всех узлах она статически определима.

4. Разницы нет. Надо написать три уравнения с тремя неизвестными каждое. Разница создается при написании перемещений δ и Δ в развернутом виде. Вычисление перемещений для системы (черт. 18, *a*) можно делать сопоставлением эпюр. Перемещения для системы черт. 18, *b* вычисляются при помощи интегралов Мора.

5. Обе группы канонических уравнений идентичны, но различны по своему смыслу: левая группа определяет сумму перемещений по направлению каждого неизвестного, правая — сумму работ всех неизвестных на перемещениях, вызванных единичным воздействием, приложенным по направлению одного из неизвестных.

6. Путем исключения опорных связей могут быть получены: в системе *a* — брус, заделанный одним концом, и брус, свободно опертый в двух точках, в системе *b* — балка, свободно опертая в двух точках с консолями и без них.

Путем введения разрезов: в системе *a* — брус, заделанный одним концом, в системе *b* — брус с консолями, свободно опертые в двух точках.

Путем введения шарниров: в системе *a* — трехшарнирная арка, в системе *b* — три трехшарнирных арки.

7. Введя в балку шарнир у промежуточной опоры и приняв за неизвестное момент, получим:

$$X = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = -P \frac{a(l^2 - a^2)}{4l^2}.$$

Ордината эпюры моментов под грузом *P*:

$$M = P \frac{a(l-a)}{4l^3} (4l^2 - al - a^2).$$

8. Для решения следует заданную нагрузку расчленить на прямо и обратно симметричную. Эпюра от неизвестного момента, приложенного в среднем шарнире, симметрична:

$$X = \frac{qh^3}{24J_h \left(\frac{2}{3} \frac{h}{J_h} + \frac{b}{J_b} \right)} = \frac{3}{4} q.$$

Ординаты эпюры моментов:

$$\text{в углу 1: } M_1 = \frac{33}{4} q; \quad \text{в углу 2: } M_2 = \frac{39}{4} q.$$

9. Под действием силы *P* в ферме работает только нижний пояс, поэтому ферму можно рассматривать как горизонтальную стяжку между вершинами колонн. Для получения основной системы следует разрезать стяжку и принять усилие в ней за неизвестное

$$X = \frac{Ph^3}{3J \left(2 \frac{h^3}{3J} + \frac{b}{F} \right)}.$$

Левая колонна изгибается силой *X*, правая колонна — силой (*P* - *X*).

10. Основная система будет симметричной при исключении из заданной системы стержня 4—5 или при введении в нее шарнира посредине. В последнем случае основная система становится комбинированной, и нагрузка, расположенная на ней, вызывает усилия в частях стержня и моменты в балке; это усложняет подсчеты; поэтому целесообразно выбрать систему с устраненным стержнем 4—5.

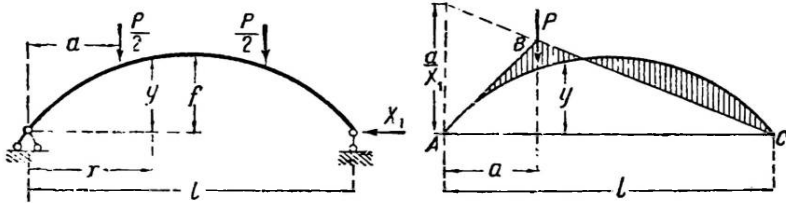
Нагрузку разлагаем на прямо и обратно симметричную:

$$X = \frac{11qa^3 \operatorname{tg} \alpha}{8 \left[5a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha + 3J \left(\frac{3}{F_1} + \frac{2}{F \cos^2 \alpha} + \frac{1}{F} + \frac{2 \operatorname{tg}^3 \alpha}{F_2} \right) \right]}$$

11. За основную систему целесообразно выбрать кривую балку, свободно опирающуюся на опоры (черт. 352); это дает более простое решение, чем трехшарнирная арка:

$$\delta_{11} = \int_0^a y^2 \frac{dx}{EJ} + \int_0^l \frac{dx}{FF} = \frac{8}{15} \cdot \frac{f^2 l}{EJ} + \frac{l}{EF},$$

$$\Delta_{1P} = -2 \int_0^a \frac{P}{2} xy \frac{dx}{EJ} - 2 \int_a^{l/2} \frac{P}{2} ay \frac{dx}{EJ} = -\frac{Pf}{3EJ^2} a(l-a)(l^2 + al - a^2).$$



Черт. 352.

Величина распора:

$$X_1 = \frac{Pa(l-a)(l^2 + al - a^2)}{3f^3 \left(\frac{8}{15} f + \frac{1}{f} \cdot \frac{J}{F} \right)}$$

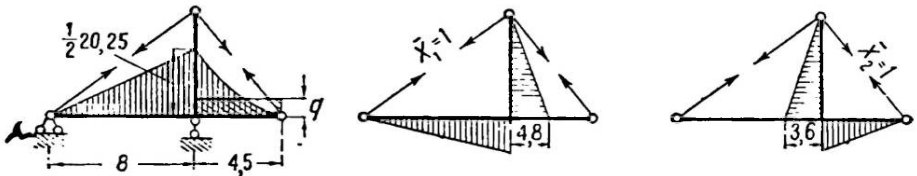
Эпюра моментов определяется уравнением:

$$M = M^0 - X_1 y,$$

где M^0 — ординаты эпюры моментов от груза P в основной системе. Эпюра моментов может быть представлена в виде разности ординат треугольника ACB и ординат оси арки.

$$M = X_1 \left(\frac{M^0}{X_1} - y \right).$$

Масштабом такой эпюры является величина распора.



Черт. 353.

12. Система два раза статически неопределима; за неизвестные принимаем усилия в тягах ab и bc . На черт. 353 показаны контуры эпюр моментов от заданной нагрузки и неизвестных:

$$\delta_{11} = 107,52 + 10 \frac{J}{F}; \quad \delta_{22} = 45,36 + 7,5 \frac{J}{F}; \quad \delta_{12} = -34,56;$$

$$\Delta_{1P} = -129,6 q; \quad \Delta_{2P} = -41,006 q.$$

Отношение $J:F = 4000 \text{ см}^2 = 0,4 \text{ м}^2$.

Из решения канонических уравнений получим:

$$X_1 = 1,83 q; \quad X_2 = 2,16 q.$$

Момент в подошве стойки:

$$M = 1,83 q \cdot 4,8 - 2,16 q \cdot 3,6 = 1,008 q \text{ тм.}$$

13. В любом сечении арки:

$$M = \frac{q}{2} x(t-x) - \frac{4f}{l^2} x(t-x) X; \quad \frac{\partial M}{\partial X} = -\frac{4f}{l^2} x(t-x);$$

$$N = X \cos \varphi - Q^0 \sin \varphi; \quad \frac{\partial N}{\partial X} = \cos \varphi;$$

$$\frac{\partial U}{\partial X} = \left(-\frac{4fq}{2EJl^2} + \frac{16f^2}{EJl^2} X \right) \int_0^l x^2(t-x)^2 dx + \frac{X}{F} \int_0^l dx = 0;$$

$$X = \frac{ql^2}{8f \left(1 + \frac{15}{8} \frac{J}{f^2 F} \right)}.$$

14. Принимаем за неизвестное усилие в тяге $\frac{5}{3} X_1$ и составляем расчетное уравнение:

$$\frac{\partial U}{\partial X_1} = \int_0^4 \left[-P(x+2) + X_1 x \right] x \frac{dx}{EJ} + \int_0^5 \frac{5}{3} X_1 \frac{5}{3} \frac{dx}{EF} = 0;$$

Таблица к решению задачи 15

| Стержни | | Усилие от P | Усилие от X ₁ | $\frac{\partial N_r}{\partial X_1}$ |
|----------------|------------|------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| Число стержней | № стержней | | | |
| 2 | 1—5 | +P | $+\frac{3}{4} X_1$ | $+\frac{3}{4}$ |
| 2 | 5—2 | $-\frac{5}{6} P$ | $-\frac{5}{4} X_1$ | $-\frac{5}{4}$ |
| 1 | 1—2 | $+\frac{4}{3} P$ | $+X_1$ | +1 |
| 1 | 5—4 | 0 | $+X_1$ | 1 |

$$X_1 = \frac{7P}{4 + \frac{125}{48} \frac{J}{F}}$$

Момент в заделке:

$$M = -P \cdot 6 + X_1 \cdot 4.$$

15. Основная система может быть выбрана с устранением любого стержня из средней панели. Устраняем стержень 4—5 верхнего пояса, что дает симметричную основную систему, и разлагаем нагрузку на прямо и обратно симметричную. Последняя не влияет на величину неизвестного, как симметричного.

Составляем таблицу усилий и их производных:

Расчетное уравнение:

$$\frac{\partial U}{\partial X_1} = 2 \left[\left(P + \frac{3}{4} X_1 \right) \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{F} + \left(\frac{5}{6} P + \frac{5}{4} X_1 \right) \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{F} + \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} P + X_1 \right) \frac{4}{F} + \frac{1}{2} \cdot X_1 \frac{4}{F} \right] = 0;$$

$$X_1 = -\frac{3}{4} P.$$

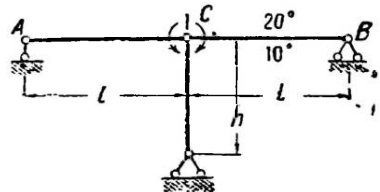
При вычислении полных усилий должна быть учтена полная нагрузка, т. е. действие прямо и обратно симметричного загрузения.

16. Основная система показана на черт. 354. Для нее:

$$v_{11} = \frac{2}{3} \frac{l}{EJ} + \frac{2}{l^2} \frac{h}{EF};$$

$$v_{1t} = -\frac{20^\circ - 10^\circ}{c} al + 10^\circ ah \frac{2}{l};$$

$$X = -\frac{10^\circ a \left(-\frac{l}{c} + \frac{2h}{l} \right) EJ}{2 \left(\frac{l}{3} + \frac{h}{l^2} \frac{J}{F} \right)}.$$



Черт. 354.

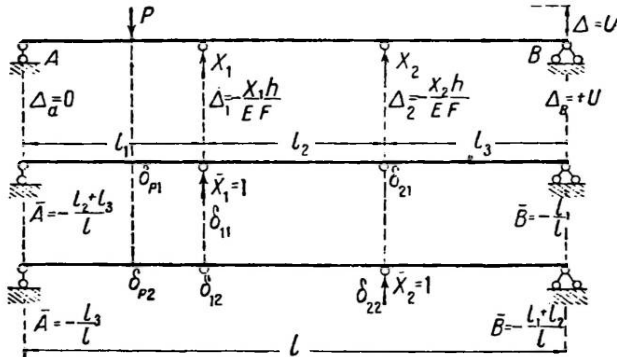
Эпюра моментов имеет наибольшую ординату у опоры C и снижается по прямям до нуля к опорам A и B.

17. Согласно заданию (черт. 29):

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{3}{4}; \quad \cos \alpha = \frac{4}{5}; \quad a = 4. \\ \Delta_{1z} &= -\frac{20^\circ - 10^\circ}{c} a 2a^2 \operatorname{tg} \alpha + 20^\circ a \left(\frac{2}{\cos^2 \alpha} - 2 \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 - \frac{15}{20} \cdot 3 \right); \\ X &= -\frac{60a \left(\frac{4}{c} + 1 \right) EJ}{60 + 23 \frac{J}{F}}. \end{aligned}$$

18. Схема действительного и воображаемых состояний показана на черт. 355. На основании теоремы о взаимности работ получим:

$$\begin{aligned} X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{21} + P \delta_{p1} &= -X_1 \frac{h}{EF} - u \frac{l_1}{l}; \\ X_1 \delta_{12} + X_2 \delta_{22} + P \delta_{p2} &= -X_2 \frac{h}{EF} - u \frac{l_1 + l_3}{l}. \end{aligned}$$



Черт. 355.

Величины δ_{11} , δ_{22} , δ_{12} , δ_{p1} и δ_{p2} определяются обычными приемами по условию загрузки балки пролетом \$l\$ силами:

$$\bar{X}_1 = 1; \quad \bar{X}_2 = 1 \text{ и } P.$$

19. В двухшарнирной арке с опорами, лежащими на одном уровне, горизонтальный распор, принимаемый за неизвестное, не вызывает вертикальных реакций. Поэтому вертикальное смещение пят не войдет в выражение для работы (\$\Delta W = 0\$) и не отзовется на величине распора.

20. Примем за основную систему брус, свободно опертый на двух опорах с неизвестным моментом на левой опоре.

Действительное состояние:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline X_1; & \varphi_u = 0,5^\circ; & \Delta_u = 0; & \Delta_b = 0; \\ \hline \delta_{11} & X_1 = 1; & -\frac{1}{l} & +\frac{1}{l}. \\ \hline \end{array}$$

Воображаемое состояние:

$$X_1 = \frac{\Delta_u}{\delta_{11}} = \frac{0,5 \frac{2\pi}{360}}{10 \frac{1}{3EJ}} = 0,00261 EJ.$$

21. Имеем

в действительном состоянии: силу \$X_1\$, деформацию \$\delta_{11}\$, деформацию \$\Delta = 0,5\$, силу \$X_1 = 1\$.

На основании теоремы о взаимности работ (Бетти) получаем:

$$X_1 = \frac{\Delta \cdot 1}{\delta_{11}} = \frac{0,5 EF}{2b \left(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha + \frac{1}{\cos \alpha \sin^2 \alpha} \right)}.$$

22. Разрезаем раму по оси симметрии; основная система состоит из двух брусев, сделанных каждый одним концом. Сумма фиктивных упругих грузов:

$$\sum \Delta W = \frac{5}{2} \frac{h}{J}.$$

Ордината центра фиктивных упругих сил относительно оси ригеля:

$$(h - c) = c' = \frac{2}{3}h.$$

С переносом неизвестных в указанный центр перемещения δ_{12} , δ_{21} , δ_{31} , δ_{13} становятся равными нулю.

Выражение для распора:

$$X_1 = \frac{\frac{4}{30} h^3 P}{2 \frac{1}{3} \cdot \frac{27}{125} h^3 + 2 \frac{1}{3} \frac{8}{125} h^3 + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{25} h^3}.$$

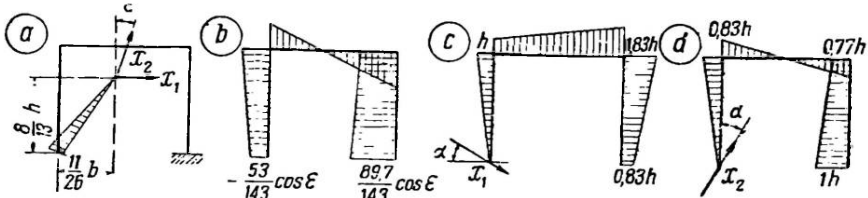
23. Устраняем закрепления в левой опоре; основная система представляет собой брус $abcd$, заделанный одним концом.

Определяем положение центра фиктивных упругих сил относительно осей, проходящих через середины стоек и середину ригеля:

$$c - \frac{h}{2} = \frac{1,5}{13}h; \quad c = \frac{8}{13}h;$$

$$d - \frac{b}{2} = -\frac{2}{26}h; \quad d = \frac{11}{26}h.$$

Обращение в нуль побочного перемещения δ_{12} может быть получено изменением направления одной из сил X_1 или X_2 , а также переходом к главным осям.



Черт. 356.

А) Изменяем направление силы X_2 ; угол ϵ , под которым она должна быть направлена к вертикальной оси, определяется выражением (19):

$$\operatorname{tg} \epsilon = \frac{-\frac{35}{60}h^3 + \frac{11}{26} \cdot \frac{40}{30}h^3}{\frac{95}{90}h^3 - \frac{8}{13} \cdot \frac{40}{30}h^3} = -\frac{9}{110}.$$

Следовательно сила X_2 наклонена вправо от вертикали (черт. 356,а).

Эпюра моментов от действия этой силы очерчивается контуром с ординатами:

$$M_a = (d - c \operatorname{tg} \epsilon) h \cos \epsilon = -\frac{53,3}{143} h \cos \epsilon; \quad M_c = \frac{78}{143} h \cos \epsilon;$$

$$M_b = [d + (h - c) \operatorname{tg} \epsilon] h \cos \epsilon = -\frac{65}{143} h \cos \epsilon; \quad M_d = \frac{89,7}{143} h \cos \epsilon.$$

Проверка правильности:

$$\delta_{12} = \left[\frac{1}{2} 65 \left(\frac{10}{39} + \frac{8}{39} \right) + \frac{1}{2} 53,3 \left(\frac{5}{39} - \frac{16}{39} \right) - \frac{1}{2} 78 \frac{1}{1,5} \left(\frac{10}{39} - \frac{8}{39} \right) - \frac{1}{2} 89,7 \frac{1}{1,5} \left(\frac{5}{39} - \frac{16}{39} \right) + \frac{1}{2} \left(65 - 78 \right) \frac{5}{13} \right] \frac{h^3 \cos \epsilon}{143} = 0.$$

В) Разберем тот же случай в условии перехода к главным осям. Угол наклона осей:

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{2\delta_{12}}{\delta_{11} - \delta_{22}} = \frac{2 \frac{7}{12} h^3}{\frac{95}{90} h^3 - \frac{75}{90} h^3} = \frac{21}{4};$$

$$\alpha = 39^\circ 38'; \quad \operatorname{tg} \alpha = 0,83.$$

На черт. 356, *c*, *d* показаны контуры эпюр.
Проверка правильности:

$$\delta_{12} = \frac{h^3}{f} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,83 + \frac{0,33}{2} + \frac{0,477 \cdot 0,163}{2} + \frac{2}{3} \cdot 0,5 \cdot 0,7233 - \frac{2}{3} \cdot 1,83 \cdot 0,585 \right) \approx 0.$$

24. Координаты центра фиктивных упругих сил относительно левого угла *A*:

$$c = \frac{h}{2 + \frac{b}{\sqrt{h^2 + \frac{1}{4}b^2}}} = \frac{h}{2(1 + \cos\alpha)}; \quad d = \frac{b}{2}.$$

25. Рама симметрична относительно биссектрисы ее угла. Центр фиктивных упругих сил лежит на биссектрисе в точке пересечения ее прямой, проходящей через середины сторон рамы.

26. Арка симметрична, поэтому центр фиктивных упругих сил лежит на оси симметрии. Если пренебречь влиянием продольной силы и кривизны на положение центра фиктивных упругих сил по сравнению с влиянием момента, то ордината упругого центра определится выражением:

$$c = -\frac{4f}{l^2} \cdot \frac{\int_0^{l/2} x^2 \cos^2 \varphi dx}{\int_0^{l/2} \cos^2 \varphi dx},$$

$$\cos^2 \varphi = \frac{1}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{p^2}}; \quad p^2 = \frac{l^2}{8f}.$$

Сделаю подстановку и проинтегрировав, получим:

$$c = -\frac{l - 2p \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{l}{2p}}{4 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{l}{2p}}.$$

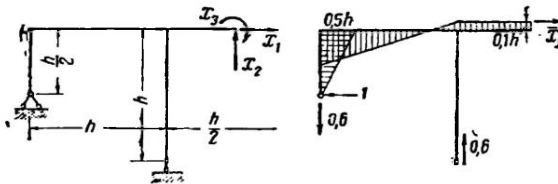
$\operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{l}{2p}$ можно разложить в ряд:

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{l}{2p} = \frac{l}{2p} - \frac{1}{3} \left(\frac{l}{2p}\right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{l}{2p}\right)^5.$$

Приближенно для подъемистых арок можно принять:

$$c = -\frac{l - l + \frac{1}{3} \frac{l^3}{p^2}}{4 \frac{l}{2p}} = -\frac{1}{3} f.$$

27. Разрезаем систему по оси симметрии (черт. 357) и прикладываем неизвестные X_1 , X_2 и X_3 . Координаты мгновенного центра:



Черт. 357.

$$c = -\frac{\delta_{12}}{\delta_{33}}, \quad d = 0.$$

Построив эпюры моментов, определяем величины перемещений и по ним координату *c*:

$$c = -\frac{h}{10}.$$

При переносе неизвестных в мгновенный центр $\delta_{12} = 0$.

С устранением концевых стоек (черт. 69) сила $X_1 = 1$ не будет вызывать моментов в сечениях рамы, поэтому ордината $c = 0$.

28. Устраняем левую опору и принимаем основную систему в виде бруса, заделанного одним концом. Переносим силы в центр фиктивных упругих сил:

$$c = 0,7h; \quad d = 0,4h.$$

При равномерном нагреве имеет место только перемещение:

$$\Delta_{1t} = -\alpha \cdot 10^\circ h.$$

Сила:

$$X_{1t} = \frac{10^\circ \alpha h E J}{h^3 \left[\left(\frac{1}{3} 0,7^3 + \frac{1}{3} 0,3^3 \right) \left(1 + \frac{1}{2} \right) + 0,3^2 \right]} = \frac{10 \alpha E J}{0,275 h^2}.$$

Опорный момент:

$$X_{3t} = -\frac{10^\circ \alpha E J}{0,275 h^2} 0,7 h = -\frac{7 \alpha E J}{0,275 h}.$$

29. Основную систему принимаем в виде двухопорной балки с силой X_1 , приложенной к ней вместо средней опоры.

Уравнения упругой кривой, вызванной действием силы $\bar{X} = 1$: для левой части

$$E J y = \frac{l_2}{6l} x [(l_1 + 2l_2) l_1 - x^2];$$

для правой части

$$E J y = \frac{l_2}{6l} x [(l_1 + 2l_2) l_1 - x^2] + \frac{(x - l_1)^3}{6}.$$

При

$$x = l_1, E J v_{11} = \frac{l_2^2 l_1^2}{3l}.$$

Этим определяется масштаб линии влияния неизвестного X_1 .

Уравнение момента в любом сечении левой части балки при положении груза $P = 1$ справа от сечения:

$$M = \frac{l-x}{l} a - X_1 \frac{l_2}{l} a = \frac{3a}{l_2 l_1^2} \left[(l-x) \frac{l_2 l_1^2}{3l} - y x_1 \right].$$

Прямая, определяемая первым членом в квадратных скобках, имеет ординату под левой опорой $\frac{l_2 l_1^2}{3}$, независимую от абсциссы a положения сечения.

Уравнение линии влияния поперечной силы в любом сечении при положении груза $P = 1$ справа от сечения:

$$Q = \frac{3}{l_2 l_1^2} \left[(l-x) \frac{l_2 l_1^2}{3l} - y x_1 \right].$$

Первый член в квадратных скобках представляет собой ту же прямую, которая имеет место в линии влияния момента.

Контуры линий влияния и их масштабы различны.

30. Сделаем левую опору арки подвижной, принимаем за неизвестное распор. Для получения уравнения линии влияния распора надо получить выражение перемещений v_{p1} и v_{v1} .

Поперечная сила, вызываемая действием вертикальной нагрузки, определяется через $\sin \varphi$:

$$N = (A - P) \sin \varphi.$$

По условиям задачи ее влиянием на перемещение можно пренебречь:

$$\begin{aligned} E v_{p1} &= - \int_0^l \frac{P(l-a)}{l} y \frac{dx}{J} + \int_a^l P(x-a) y \frac{dx}{J} = \\ &= \frac{f}{3l^2 J} a (l-a) (l^2 + la - a^2), \end{aligned}$$

$$E v_{v1} = \int_0^l y^2 \frac{dx}{J} + \int_0^l \frac{dx}{F} = \frac{8}{15} f^2 l \frac{1}{J} + \frac{l}{F}.$$

Величина второго члена незначительна, поэтому пренебрегаем им в целях упрощения вычислений:

$$X = 0,156 \frac{1}{f^3} a (l-a) (l^2 + la - a^2).$$

Давая a ряд значений в долях пролета, получим кривую acb (черт. 358), представляющую собой линию влияния распора.

При $a = \frac{1}{4} l$, $y = 0,694$; при $a = \frac{1}{2} l$, $y = 0,975$.

Уравнение линии влияния момента в сечении на расстоянии $a = \frac{1}{4}l$ от левой опоры при положении груза $P=1$ справа от сечения:

$$M = \left[\frac{(l-x)}{l} \cdot \frac{l}{4} - X \cdot y_a \right] = 3 \left[\frac{l-x}{l} \cdot \frac{l}{4 \cdot 3} - X \right].$$

При

$$a = \frac{1}{4}l, \quad y_a = \frac{4f}{l^2} a(l-a) = \frac{3}{4}f.$$

Линия влияния очерчивается контуром, в котором ордината $aa' = 1,667$. Масштаб линии влияния $y_a = 3$.

Уравнение линии влияния нормальной силы:

$$N = \cos \varphi \left(\frac{l-x}{l} \operatorname{tg} \varphi + X \right).$$

При

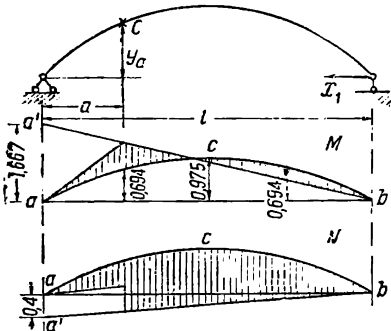
$$a = 5; \quad \operatorname{tg} \varphi = 0,4; \quad \cos \varphi = 0,928.$$

Контур линии влияния показаны на чертеже 358.

31. Определяем величины упругих грузов по формуле $EJW = M \Delta s$ (ч. I, 199) и считаем их приложенными на середине участков:

$$EJW_1 = \frac{3}{2}; \quad EJW_2 = \frac{9}{2};$$

$$EJW_3 = EJW_4 = 6.$$



Черт. 358.

Ординаты эпюры прогибов под точками приложения упругих грузов:

$$EJf_1 = 15; \quad EJf_2 = 42; \quad EJf_3 = 60; \quad EJf_4 = 66.$$

Знаменатель в выражении неизвестного (см. задачу 10):

$$EJ\delta_{11} = 3 \cdot 2(4 + 3 \cdot 3) + \frac{2 \cdot 300}{10\,000} \left(3 + \frac{5}{0,8^2} + 3 \cdot 0,75^2 \right) = 78,75.$$

Ординаты линии влияния неизвестного:

$$y = \frac{1}{78,75} f.$$

На черт. 359 показаны линии влияния момента и поперечной силы в сечении на расстоянии $a=4$ м от левой опоры.

Уравнение линии влияния момента при положении груза $P=1$ справа от сечения:

$$M = \frac{l-x}{l} 4 - 3y_x.$$

Уравнение линии влияния поперечной силы при положении груза $P=1$ слева от сечения:

$$Q = \frac{l-x}{l} - 0,75y_x.$$

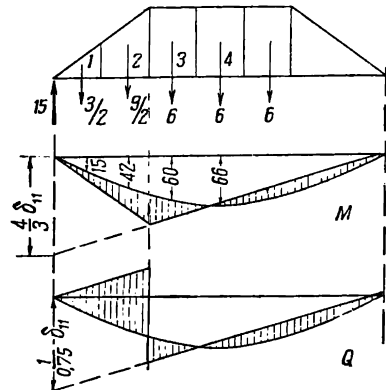
В обоих уравнениях y_x — ордината линии влияния распора под точкой приложения груза.

Например ордината линии влияния момента, когда груз $P=1$ стоит по середине пролета:

$$M = \frac{1}{2} 4 - 3 \cdot 1,1 = -1,3.$$

Ордината линии влияния поперечной силы:

$$Q = \frac{1}{2} 1 - 0,75 \cdot 1,1 = 0,325.$$



Черт. 359.

32. Линия влияния момента определяется уравнением:

$$M_k = M_k^0 - 0,47X_1 + 2,26X_2 + X_3.$$

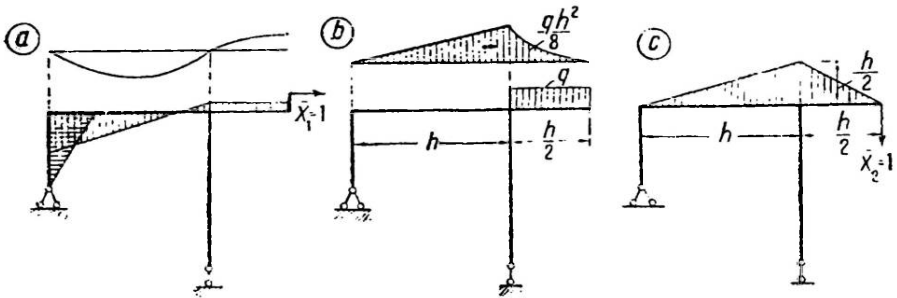
Вычисление ординат делается в табличной форме.

Таблица к решению задачи 32

| Положение груза $P=1$ | M_k^0 | $-0,47X_1$ | $2,26X_2$ | $+X_3$ | M |
|-----------------------|---------|------------|-----------|--------|--------|
| -4,41 | 0 | -0,188 | 0,17 | 0,168 | 0,15 |
| -2,26 | 0 | -0,455 | 0,565 | 0,649 | 0,759 |
| 0 | -2,26 | -0,584 | 1,13 | 1,563 | -0,151 |
| +0 | 0 | -0,584 | -1,13 | 1,563 | -0,151 |
| +2,26 | 0 | -0,455 | -0,565 | 0,649 | -0,371 |
| +4,41 | 0 | -0,188 | -0,17 | 0,168 | -0,190 |

33. Основную систему получаем путем разреза заданной системы по оси симметрии и переносим начало координат в мгновенный центр (задача 27). Согласно черт. 357:

$$EJ_{\text{осн}} = 2 \left[\frac{1}{3} \frac{h^3}{8} + \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{6} h \cdot 0,25 h^2 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} h \frac{h^2}{100} + \frac{1}{2} h \frac{h^2}{100} \right] = \frac{7}{30} h^3.$$



Черт. 360.

Эпюра прогибов, вызываемая действием силы $\bar{X}_1 = 1$, должна иметь очертание, показанное на черт. 360,а. Она представляет собой модель линии влияния силы X_1 , следовательно временная нагрузка, вызывающая наибольшее положительное значение продольной силы, должна быть расположена над средним пролетом.

Величину продольной силы определяем, пользуясь эпюрами моментов (черт. 360, б, с):

$$\Delta_{1q} = -\frac{qh^2}{8} \left[2 \frac{h}{2} \left(0,1h - \frac{0,6h}{3} \right) + \frac{h}{3} \cdot \frac{h}{10} \right] = -\frac{qh^4}{120}.$$

Отсюда

$$X_1 = \frac{qh^4}{120} \cdot \frac{30}{7h^3} = \frac{qh}{28}.$$

34. Основную систему получаем путем разреза заданной по оси ее симметрии.

Контур эпюры моментов, создаваемой действием силы $\bar{X}_2 = 1$ в левой половине, показан на черт. 360,с.

Уравнение упругой кривой в консольной части:

$$EJv = -\frac{1}{24} (3h^3 - 7h^2x + 4x^3) = -\frac{h^3}{8} (1-u) + \frac{h^3}{6} u (1-u^2).$$

Масштаб линии влияния определяется величиной:

$$EJ_{\text{осн}} = 2 \frac{1}{3} h \frac{h^2}{4} \left(1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4} h^3.$$

Ординаты линии влияния в крайнем пролете:

$$y = \frac{1}{3} u (1 - u^2);$$

| | | | | | | |
|-----|---------|--------|--------|-------|-------|-----|
| при | $u = 0$ | 0,2 | 0,4 | 0,6 | 0,8 | 1,0 |
| | $y = 0$ | +0,064 | +0,112 | 0,128 | 0,096 | 0 |

Ординаты линии влияния в среднем пролете:

$$y = \frac{-1}{2} (1 - u) + \frac{2}{3} u (1 - u^2);$$

| | | | | |
|-----|------------|--------|--------|-----|
| при | $u = 0$ | 0,2 | 0,4 | 0,5 |
| | $y = -0,5$ | -0,272 | -0,076 | 0 |

35. За неизвестное принимаем реакцию средней опоры. Нагрузку разбиваем на прямо и обратно симметричную. При вычислении усилий от единичного воздействия следует их рассматривать увеличенными в 8 раз, учтя это увеличение при окончательном вычислении силы. Вычисление делается в табличной форме.

Таблица к решению задачи 35

| № стержня | s | $\frac{F}{F_0}$ | $\frac{s}{F:F_0}$ | N^0 | \bar{N}_1 | $\frac{\bar{N}_1 \cdot s}{F:F_0}$ | $\frac{N^0 \bar{N}_1 s}{F:F_0}$ | $\frac{\bar{N}_1^2 s}{F:F_0}$ | $N = N^0 + \bar{N}_1 X$ | $\frac{N \bar{N}_1 s}{F:F_0}$ |
|--------------------|------------------|-----------------|-------------------|-------|-------------|-----------------------------------|---------------------------------|-------------------------------|-------------------------|-------------------------------|
| 1 | 12 | 2 | 6 | 45 | -3 | -18 | | | | |
| 2 | 12 | 2 | 6 | -90 | +6 | +36 | | | | |
| 3 | 12 | 2 | 6 | +90 | -9 | -54 | | | | |
| 4 | $\frac{1}{2} 12$ | 2 | 3 | -90 | +12 | +36 | | | | |
| 5 | 10 | 1 | 10 | -75 | +5 | +50 | | | | |
| 6 | 10 | 1 | 10 | +75 | -5 | -50 | | | | |
| 7 | 10 | 1 | 10 | 0 | +5 | +50 | | | | |
| 8 | 10 | 1 | 10 | 0 | -5 | -50 | | | | |
| $\Sigma = -1965,0$ | | | | | | | | $= 2188$ | | 0 |

$$X = 8,9808 \cdot 8 \text{ т.}$$

Усилие в каждом стержне от полной нагрузки P и неизвестного:

$$N = N^0 + \frac{1}{8} \bar{N}_1 X = N^0 + \bar{N}_1 \cdot 8,9809.$$

36. За неизвестное принимаем усилие в правой опорной стойке.

Усилие в этой стойке равно нулю. Усилия в стержнях от заданной нагрузки симметричны: усилия же от силы $\bar{X}_1 = 1$ обратно симметричны; поэтому перемещение

$$\Delta_{1P} = \sum N_P \bar{N}_1 \frac{s}{EF} = 0.$$

37. Усилие в затяжке:

$$X = \frac{-1461,9 - 373,1}{192,59 + 50,53 + \frac{1}{2} \cdot \frac{24}{2}} = 7,37.$$

Удлинение затяжки сопровождается смещением подвижной опоры, что не имеет места в арке без затяжки (черт. 153).

38. При нагреве нижнего пояса арки (черт. 153) на 20° распор:

$$X_{1t} = - \frac{20 \cdot 2 \cdot 10 F_0 (2,1 \cdot 8 + 6,3 \cdot 3,4)}{80000 \cdot 243,16} = 787 F_0 \text{ м;}$$

$$E = 2 \cdot 10^7 \text{ т/м}^2.$$

При наличии в арке затяжки (черт. 163) и нагреве ее на 15° :

$$X_{1t} = \frac{5000 F_0 \left(38,22 - \frac{15}{20} \cdot \frac{1}{2} \cdot 24 \right)}{243,16 + 6} = 586 F_0 \text{ т.}$$

39. Величина реакции средней опоры:

$$X_{1t} = \frac{4 \cdot 0,02 \cdot 2 \cdot 107 F_0}{2 \cdot 188 \cdot 2} 8 = 2 \cdot 927 F_0 m;$$

$$E = 2 \cdot 10^7 \text{ м/м}^2;$$

площадь F_0 выражена в м^2 :

$$U_{1z} = -\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} X \cdot 18 = -3 \cdot 295 F_0 m.$$

40.

$$X = -\frac{200 \alpha E F_0 (6 \cdot 12 + 12 \cdot 6)}{2 \cdot 2 \cdot 188} 8 = -5,26 \alpha E F_0.$$

Усилие

$$U_{1z} = \frac{6}{8} X = -3,95 \alpha E F_0.$$

41. Устраняем раскос D_{39} и принимаем усилие в нем за неизвестное. Для построения линии влияния усилия D_{39} вычисляем упругие грузы: в узле 2 (табл. 31, схема d)

$$E W_2 = \frac{1}{F} (2 + \sqrt{2});$$

в узле 3 (табл. 31, схема c)

$$E W_3 = -\frac{1}{F} (2 + \sqrt{2}).$$

Ординаты эпюры прогибов:

$$A_{\phi} = \frac{1}{5EF} (2 + \sqrt{2}) = -B_{\phi};$$

$$E F f_2 = \frac{1}{5} (2 + \sqrt{2}) 2d = -E F f_3.$$

Контур линии влияния показан на черт. 164 правильно.

Масштаб линии влияния:

$$E F \delta_{11} = 2 \left(\frac{1}{2} d + \frac{1}{2} d + 1 \sqrt{2} d \right) = 2(1 + \sqrt{2}) d.$$

Линия влияния усилия в пояском стержне. Устранив стержень U_{23} , следует представить себе, каким должен быть контур эпюры прогибов под действием двух сил, приложенных вместо устраненного стержня. Очевидно, он должен быть симметричным и представлять собой трапецию. Следовательно на черт. 164 контур показан неправильно.

Уравнение линии влияния усилия U_{23} при положении груза $P=1$ справа от сечения:

$$U_{23} = \frac{1}{d} \left(\frac{l-x}{l} 3d - X \frac{1}{\sqrt{2}} d \right).$$

При

$$x = 3d; \quad U_{23} = \frac{1}{d} \left(\frac{6}{5} d - \frac{1}{5} d \right) = 1.$$

Той же величиной определяется ордината под узлом 2.

42. Пренебрегаем влиянием усилий в решетке на величину упругих грузов; это позволяет вычислять их по формуле:

$$E W_k = \frac{M_k}{h_k^3} \cdot \frac{s}{EF}.$$

Ординаты эпюры прогибов определяются по фиктивной балке, для которой:

$$A_{\phi} = \sum_1^9 W + \frac{1}{2} W_{10} = -39,96 \frac{s}{EF}.$$

Масштабный множитель для перехода к линии влияния распора:

$$\delta_{11} = \frac{s}{EF} \left[2 \sum_1^9 y W + y_{10} W_{10} \right] = 114,52 \frac{s}{EF}.$$

Уравнение линии влияния усилия в раскосе при положении груза $P=1$ справа от сечения:

$$D_{7-8} = -\frac{1,33}{7,9} \left[\frac{l-x}{1,85 + X} \right].$$

Первый член в скобках представляет собой прямую, имеющую ординату 1,85 под левой опорой и нуль под правой опорой.

43. 1) При удалении лишнего стержня из арочной части будем иметь в качестве основной системы балочную ферму. При удалении из ферменной части стержня будем иметь в качестве основной комбинированную систему. В комбинированной системе заданная нагрузка вызывает усилия во всех стержнях системы. Целесообразность выбора очевидна.

2) Балочная ферма, находясь под действием двух горизонтальных взаимно противоположных растягивающих сил, приложенных к ней с некоторыми плечами, будет выгибаться книзу по некоторой кривой; ею очерчивается контур эпюры прогибов.

3) Построение эпюры прогибов следует делать по фиктивным упругим грузам. Например, фиктивный груз для узла k :

$$EW_k = \frac{1}{d} \left[\frac{2,4}{F_0} + 1 \right] d + \frac{2,4d}{F_u} + \frac{d}{\cos^2 \varphi \sin \varphi F_d} (\operatorname{tg} \gamma_k - \operatorname{tg} \gamma_{k-1}) + \frac{1}{F_v} (\operatorname{tg} \gamma_k - \operatorname{tg} \gamma_{k-1})$$

4) Масштаб для перехода от эпюры прогибов к линии влияния распора определяется выражением:

$$E\delta_{11} = \sum \frac{(v+h)^2 d}{d^2 F_0} + \sum \frac{y^2 d}{d^2 F_u} + \sum \frac{\operatorname{tg}^2 \gamma}{F_D \sin \varphi \cos \varphi} \frac{d}{\cos \varphi} + \\ + \sum \frac{\operatorname{tg}^2 \gamma}{F_v} d \operatorname{tg} \varphi + \sum \frac{2}{\cos^3 \gamma} \cdot \frac{d}{F_u} + \sum (\operatorname{tg} \gamma_k - \operatorname{tg} \gamma_{k-1})^2 \frac{y}{F}$$

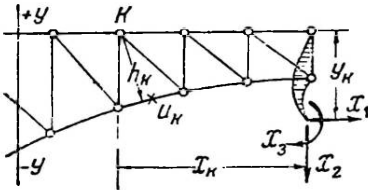
5) Уравнение линии влияния усилия в стержне O_3 :

$$O_3 = -\frac{3d}{d} \left[\frac{l-x}{l} - X \right]$$

Линия влияния строится непосредственно на линии влияния распора. Первый член в скобках определяет прямую с ординатами равными -1 под левой опорой и 0 — под правой. При вычислениях все ординаты должны умножаться на 3 .

6) Уравнение линии влияния усилия в раскосе $D_{2,12}$:

$$D_{2,12} = \frac{\operatorname{tg} \gamma_2}{\sin \varphi} \left[\frac{l-x}{l} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \gamma_2} - X \right]$$



Черт. 361.

44. 1) Арка, показанная на черт. 167, трижды статически неопределима. Перенос начала координат в центр фиктивных упругих грузов обращает все побочные перемещения в нули. Ордината центра фиктивных упругих сил определяется по формуле:

$$c = -\frac{\sum \bar{N}_3 \bar{N}_4 \frac{s}{F}}{\sum \bar{N}_3^2 \frac{s}{F}} = -\frac{\sum \frac{Y}{h^2} \frac{s}{F}}{\sum \frac{1}{h^2} \frac{s}{F}}$$

здесь $\bar{N}_3 = \frac{1}{h}$ — усилия в стержнях пояса фермы от момента $\bar{X}_2 = 1$;

$\bar{N}_1 = \pm \frac{y}{h}$ — усилия в стержнях пояса фермы от силы $\bar{X}_1 = 1$,

$\bar{N}_2 = \pm \frac{x}{h}$ — усилия в стержнях пояса фермы от силы $\bar{X}_2 = 1$.

Центр фиктивных упругих грузов предполагаем внутри контура арки (черт. 361).

2) Сила $\bar{X}_1 = 1$ вызывает снижение обеих половинок фермы. Ординаты линии влияния отрицательны, и сама она имеет двоякую кривизну: $X_1 = -\frac{\partial \rho}{\partial 11}$.

Сила $\bar{X}_2 = 1$ вызывает опускание левой половины арки; в этой части ординаты линии влияния отрицательны.

Сила $\bar{X}_3 = 1$ вызывает опускание обеих половинок арки; знак на всем протяжении среднего пролета отрицательный.

4) Масштаб линии влияния распора определяется величиной:

$$\delta_{11} = \sum \frac{y^2 \cdot s}{h^2 F}$$

его нет на чертеже и он должен быть вычислен или построен при помощи веревочного многоугольника.

Масштаб линии влияния усилия X_3 , определяемый величиной δ_{32} , имеется на чертеже в виде отрезка, на о.и фермы, образующего скачок в кривой.

Масштаб линии влияния момента X_3 , определяемый величиной δ_{32} , имеется на чертеже в виде угла у излома кривой посредине.

5) Величины ординат линии влияния усилия и определяются суммами ординат:

$$a) U_k = \frac{1}{h_k} [y_{x1}y_k - y_{x2}x_k - y_{x3}],$$

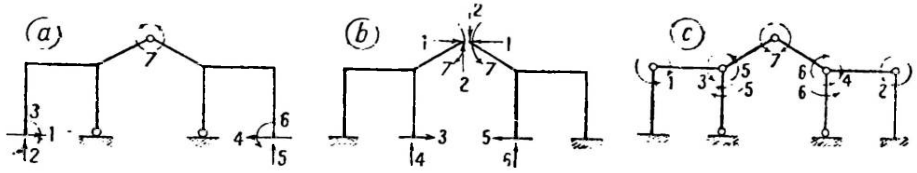
$$b) U_k = \frac{1}{h_k} [-(x_k - a) + y_{x1}y_k - y_{x2}x_k - y_{x3}],$$

с) также, как случай а.

45. На черт. 363 показаны три возможные основные системы.

Вариант а. Трехшарнирная арка с консолями. Только $\delta_{14} = \delta_{41} = 0$.

Вариант б. Две раздельные балки, заделанные концами, поэтому $\delta_{25} = \delta_{52} = \delta_{41} = \delta_{14} = \delta_{17} = 0$. Кроме того по условию обратной симметрии $\delta_{12} = \delta_{27} = 0$.



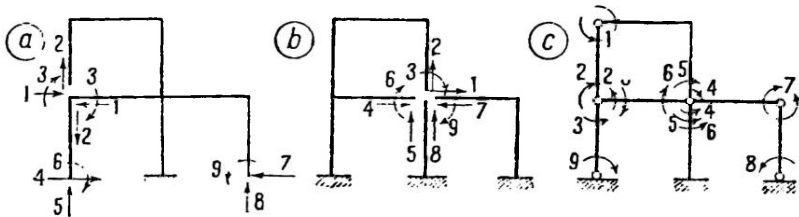
Черт. 362.

Вариант с. Трехшарнирная арка 2-3-4 опирается на две трехшарнирные арки; последние опираются на стержни, заделанные одним концом. Соответственно этому $\delta_{12} = \delta_{25} = \delta_{46} = \delta_{14} = 0$ (номера узлов по черт. 187).

46. На черт. 363 показаны три возможных варианта. В варианте а. Особенность его заключается в том, что эпюры от сил X_1 , X_2 и момента X_3 не распространяются на стержень 1-7 (номера узлов по черт. 188). В канонических уравнениях 24 побочных перемещения обращаются в нули.

Вариант б. Три раздельных бруса. Силы X_1 , X_2 и момент X_3 не создают эпюры моментов в стержне 0-1 и силы X_2 и X_3 не создают эпюры в стержне 4-7. В нули обращаются 38 побочных перемещений.

Вариант с. Основная часть системы — стержень 1-7; на него опираются трехшарнирные арки 0-1-1 и 6-5-4; моменты, приложенные к последним, вызывают моменты в стержне 4-7. Трехшарнирная арка 1-2-1 опирается на нижнюю часть системы.



Черт. 363.

На черт. 364 показаны схемы эпюр моментов от единичных воздействий, приложенных к раме. В этой системе в нули обращаются 20 побочных перемещений.

47. В обоих видах основных систем, предложенных в тексте задачи, шесть побочных перемещений обращаются в нули.

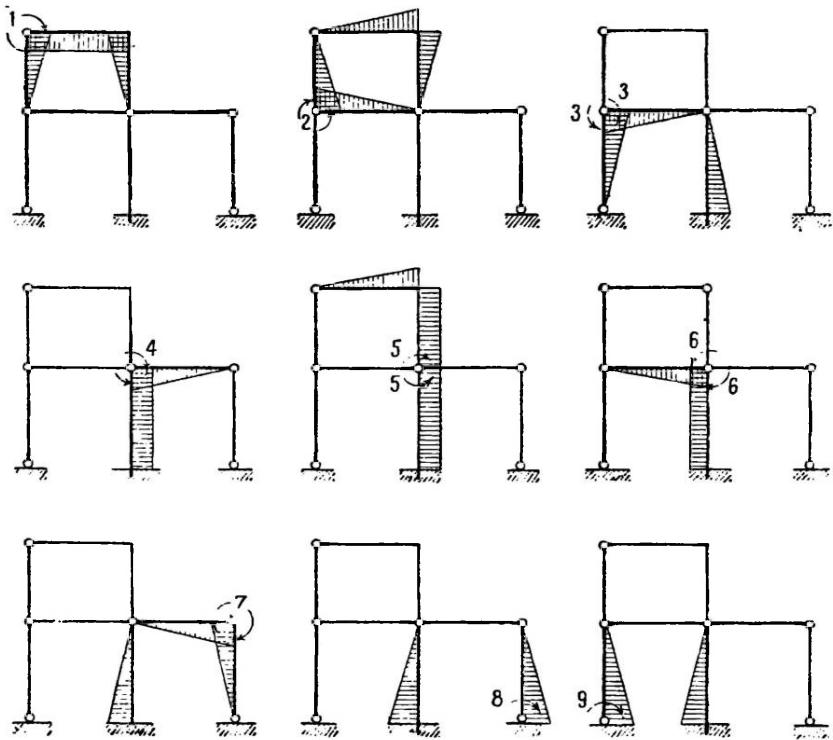
48. Включение шарниров во все узлы и опорные точки создает шарнирную неизменяемую систему, в которой нагрузка приложена только в узлы. Следовательно основная система работает как ферма. Если пренебречь влиянием продольных сил на перемещения, то все $\delta = 0$.

49. Основная система опирается на шарниры 0 и 7. Часть системы 5-4-3-2 работает только на нагрузку, передающуюся на нее, поэтому она является дополнительной частью системы. Контур 7-6-5-10-9-8-7 неизменяем сам по себе. Отсюда следует, что основная часть системы представляет собой трехшарнирную раму 0-2-7.

50. Образуя основную систему включением только шарниров, следует расположить их по осям симметрии. При таком расположении шарниров основная система представляет собой две трехшарнирные арки, смыкающиеся пятнами. Моменты, прикладываемые по концам стержня ef (черт. 219), уравновешиваются каждый двумя равными моментами,

приложенными к ригелю. Неизвестные моменты, вводимые в систему, следует разбить на прямо и обратно симметричные. При этих условиях 26 побочных перемещений обращаются в нули, и канонические уравнения распадаются на 4 группы.

При образовании основной системы путем разрывов последние следует расположить на оси симметрии и разложить неизвестные на прямо и обратно симметричные. В этом случае канонические уравнения также распадаются на 4 группы.



Черт. 364.

51. Сопоставляем следующие основные системы.

а) Делаем разрез (черт. 220) по оси симметрии и вводим шарниры в пятах средних стоек X_4 и X_5 . Перенос сил (X_1 , X_2) и момента (X_3) из разреза в центр фиктивных упругих сил и разложение моментов X_4 и X_5 на парные прямо и обратно симметричные обращают в нули следующие перемещения: $\delta_{12} = \delta_{13} = \delta_{14} = \delta_{23} = \delta_{25} = \delta_{34} = \delta_{45} = 0$.

б) Образует основную систему включением только шарниров (черт. 220) в пятах средних стоек X_4 и X_5 , в средних узлах X_2 и X_3 и на оси симметрии X_1 . Основная система представляет собой три трехшарнирные арки. При разложении неравных симметричных неизвестных на парные следующие побочные перемещения и им взаимные обращаются в нули $\delta_{13} = \delta_{15} = \delta_{23} = \delta_{25} = \delta_{34} = \delta_{45} = 0$.

52. а) Первая система (черт. 365, а) получена введением трех разрезов с последующим переносом неизвестных сил и моментов в центры фиктивных упругих сил каждого контура. В нули обращаются 36 побочных перемещений.

б) Вто, ая система (черт. 365, б) получена введением трех разрезов с последующим переносом сил и моментов среднего контура в центр фиктивных упругих сил. В крайних контурах силы и моменты перенесены на середину высоты стоек смыкания их со средним контуром. Обращаются в нули 44 побочных перемещения (матрица А).

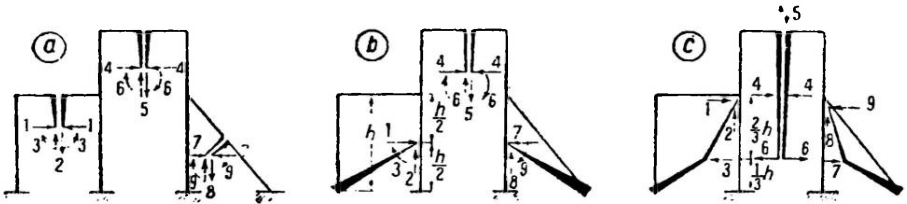
в) Третья основная система (черт. 365, в) образована тремя разрезами. Момент в разрезах боковых контуров заменен парой силой с плечом, равным $\frac{2}{3}h$. В среднем контуре горизонтальная сила и момент, имеющиеся в разрезе, заменены двумя неравными горизонтальными силами X_4 и X_6 , расположенными на уровне сил X_1 и X_3 , чем обеспечивается обращение в нуль побочных перемещений δ_{15} , δ_{34} . Указанными переносами и заменами моментов парами обеспечивается обращение в нуль 43 побочных перемещений (матрица Б).

Матрица А

Матрица В

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 1 | | | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | | | | | | | 0 | 0 | 0 |
| 4 | | 0 | | | 0 | 0 | | 0 | |
| 5 | 0 | 0 | | | | 0 | 0 | 0 | |
| 6 | 0 | 0 | | 0 | 0 | | 0 | 0 | |
| 7 | 0 | 0 | 0 | | 0 | 0 | | | |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | | |
| 9 | 0 | 0 | 0 | | | | | | |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 1 | | | 0 | | | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | | | | | | 0 | 0 | 0 |
| 4 | | 0 | 0 | | | 0 | | 0 | 0 |
| 5 | | 0 | | | | 0 | | | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | | | 0 | | | 0 |
| 7 | 0 | 0 | 0 | | | | | | 0 |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | |
| 9 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | |

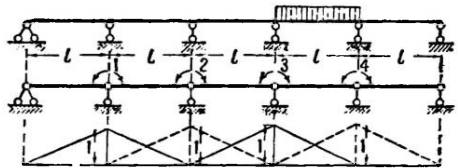


Черт. 365.

53. Для получения основной системы следует ввести шарниры у опор и принять в качестве неизвестных опорные моменты. На черт. 366 показаны эпюры от моментов, равных единице, примененных по направлению неизвестных¹.

После вычисления перемещений канонические уравнения приводятся к следующему виду:

$$\begin{aligned} 4X_1 + X_2 &= 0, \\ X_1 + 4X_2 + X_3 &= 0, \\ X_2 + 4X_3 + X_4 &= 0, \\ X_3 + 4X_4 + X_5 &= -\frac{ql^2}{4}, \\ X_4 + 4X_5 &= -\frac{ql^2}{4}. \end{aligned}$$



Черт. 366.

Решение их проводится способом Гаусса. Процесс значительно упрощается, так как переходные множители:

$$\begin{aligned} \alpha_{13} = \alpha_{14} = \alpha_{15} = \alpha_{24} = \alpha_{25} = \alpha_{35} &= 0; \\ \alpha_{12} = -\frac{1}{4}; \alpha_{23} = -0.267; \alpha_{34} = -0.268; \alpha_{45} &= -0.268. \end{aligned}$$

Результаты решения:

$$X_5 = -0.196; X_4 = -0.216; X_3 = 0.0579; X_2 = -0.0155; X_1 = 0.00386.$$

54. Принимаем высоту балки равной c . По условию неравномерного нагрева

$$\Delta_{1f} = \Delta_{2f} = \dots = -2 \frac{(20^\circ - 10^\circ) \alpha l}{2c}.$$

¹ На черт. 366 должно быть шесть пролетов согласно черт. 244.

Система канонических уравнений:

$$4X_1 + X_2 = 60 \frac{\alpha}{c} EJ.$$

$$X_1 + 4X_2 + X_3 = 60 \frac{\alpha}{c} EJ,$$

$$X_2 + 4X_3 + X_4 = 60 \frac{\alpha}{c} EJ$$

и т. д.

При решении используются результаты предыдущей задачи:

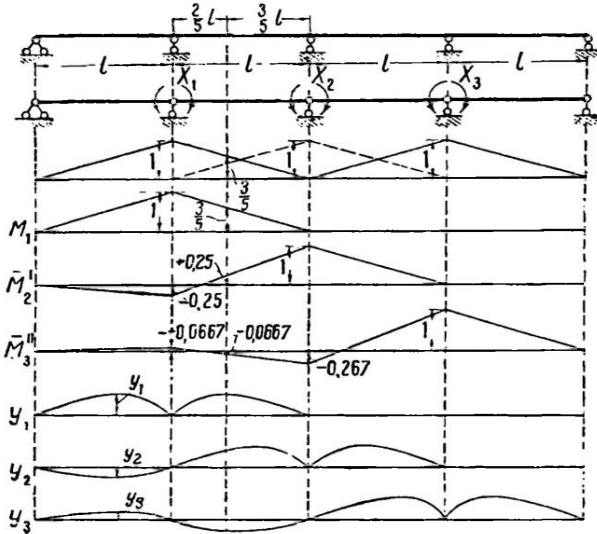
$$X_1 = X_5 = 1,269 \frac{\alpha}{c} EJ; \quad X_2 = X_4 = 0,923 \frac{\alpha}{c} EJ;$$

$$X_3 = 1,038 \frac{\alpha}{c} EJ.$$

55. Воспользуемся для построения линий влияния моментов и поперечных сил в сечениях неразрезной балки приемом, изложенным в § 55.

Образует основную статически определимую систему включением опорных шарниров и вводим в нее неизвестные моменты \bar{X}_1 , \bar{X}_2 и \bar{X}_3 . На черт. 367 построены эпюры от единичных моментов \bar{X}_1 , \bar{X}_2 и \bar{X}_3 . Вычисляем по ним перемещения:

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = \frac{1}{EJ} \frac{2}{3} l; \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EJ} \frac{1}{6} l; \quad \delta_{13} = 0.$$



Черт. 367.

Преобразуем неизвестные X_1 , X_2 и X_3 в групповые неизвестные Y_1 , Y_2 , Y_3 при помощи коэффициентов α (§ 51 и 52) и сделаем таким путем переход к основным статически неопределимым системам:

$$\alpha_{12} = -\frac{1}{4}; \quad \alpha_{13} = 0; \quad \alpha_{23} = -\frac{4}{15} = -0,267.$$

На черт. 367 построены групповые эпюры моментов от единичных воздействий, вычисление производится по формулам (§ 53):

$$M_2^I = \bar{M}_2 + \alpha_{12} \bar{M}_1; \quad M_3^{II} = \bar{M}_1 + \alpha_{13} \bar{M}_1 + \alpha_{23} \bar{M}_2^I.$$

Вычисляем ординаты эпюр прогибов, вызываемых единичными неизвестными \bar{Y}_1 , \bar{Y}_2 и \bar{Y}_3 по формулам (35) и (36), пользуясь табл. 2. На черт. 367 показаны контуры этих эпюр, представляющих собой модели линий влияния неизвестных. Ординаты этих эпюр вычисляются увеличенными в EJ раз.

Масштабом перехода от эпюр прогибов к линиям влияния неизвестных служат величины:

$$\zeta_{11} = \frac{2}{3} l; \quad \zeta_{22}^I = \frac{5}{8} l; \quad \zeta_{33}^{II} = \frac{28}{45} l.$$

Они также увеличены в EJ раз, чем компенсируется увеличение ординат прогибов.

Имея линии влияния групповых неизвестных, можно построить линии влияния моментов и поперечных сил в любом сечении балки, в том числе и опорном, используя для этого формулу (40).

Ординаты линии влияния момента в сечении, указанном в тексте задачи, вычисляются по выражению (чсрт. 367):

$$y = y_p^0 + \bar{M}_1 \frac{1}{\zeta_{11}} y_1 + \bar{M}_2^I \frac{1}{\zeta_{22}^I} y_2 + \bar{M}_3^{II} \frac{1}{\zeta_{33}^{II}} y_3;$$

$$y = y_p^0 + \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{2} y_1 + 0,25 \frac{8}{5} y_2 - 0,0667 \frac{45}{28} y_3.$$

Здесь y_p^0 — ордината линии влияния того же момента в основной статически определимой системе.

Ординаты линии влияния опорного момента X_2 определяются по выражению:

$$y = 1 \frac{1}{\zeta_{22}^I} y_2 - 0,267 \frac{1}{\zeta_{33}^{II}} y_3.$$

Отметим, что построение линий влияния в неразрезных балках целесообразно делать при помощи фокусных точек (§ 76).

56.

| схема a | Число неизвестных | |
|-----------|----------------------|---------------|
| | По методу деформаций | По методу сил |
| " b | $3 + 1 = 4$ | 6 |
| " c | $5 + 3 = 8$ | 6 |
| " d | $6 + 3 = 9$ | 9 |
| " e | $12 + 5 = 17$ | 21 |
| " f | $7 + 3 = 10$ | 11 |
| " g | $6 + 3 = 9$ | 9 |

57. Заданная рама требует введения трех закреплений

| | | |
|--------------|---|-------------|
| По схеме a | 3 | закрепления |
| " b | 6 | " |
| " c | 6 | " |
| " d | 3 | " |
| " e | 4 | " |

58. а) Погонные жесткости стоек $i_c = \frac{1}{8}$, ригелей $i_p = \frac{1}{6}$; для удобства написания уравнений увеличиваем их в 24 раза: $i_c = 3$ и $i_p = 4$. Вводим закрепления против поворота в узлах 1, 2, 3, 4 и против линейных смещений в узлах 4 и 2 и составляем уравнения:

$$28Z_1 + 8Z_2 + 6Z_3 + 0 - 4,5Z_5 + 4,5Z_6 + \frac{4}{3} W = 0,$$

$$8Z_1 + 28Z_2 + 0 + 6Z_4 - 4,5Z_5 + 4,5Z_5 = 0,$$

$$6Z_1 + 0 + 40Z_3 + 8Z_4 - 4,5Z_5 + 0 = 0,$$

$$0 + 6Z_2 + 8Z_3 + 40Z_4 - 4,5Z_6 + 0 = 0,$$

$$-4,5Z_1 - 4,5Z_2 - 4,5Z_3 - 4,5Z_4 + 4,5Z_5 - 4,5Z_6 - 2W = 0,$$

$$+4,5Z_1 + 4,5Z_2 + 0 + 0 - 4,5Z_5 + 9Z_6 - 4W = 0.$$

б) Вводим в раму закрепления в узлах 1, 2, 3, 4, 5 и 6 и закрепления против линейных смещений 7 и 8. Коэффициенты при неизвестных и грузовые члены даны в таблице.

59. Неизвестный угол Z_1 поворота определяется уравнением:

$$Z_1 \cdot 19 = \frac{Pl}{8}; \quad Z_1 = 0,006575Pl.$$

Моменты по концам стержней:

$$M_{01} = -0,1513Pl; \quad M_{10} = -0,0724Pl;$$

$$M_{12} = -0,0526Pl; \quad M_{21} = -0,01975Pl.$$

Моменты под грузом $M = 0,1381Pl$.

Таблица к решению задачи 58

| Z_1 | Z_2 | Z_3 | Z_4 | Z_5 | Z_6 | Z_7 | Z_8 | P |
|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|------------------------------------|----------------------------|------|
| $4(i_2 + i_3)$ | $2i_3$ | $2i_2$ | — | — | — | $6 \frac{i_2}{d}$ | $-6 \frac{i_3}{h}$ | 0 |
| $2i_3$ | $4(i_2 + i_3)$ | — | $2i_2$ | — | — | $6 \frac{i_2}{d}$ | $-6 \frac{i_3}{h}$ | 0 |
| $2i_2$ | — | $4(2i_2 + i_3)$ | $2i_3$ | $2i_2$ | — | — | $-6 \frac{i_3}{h}$ | 0 |
| — | $2i_2$ | $2i_3$ | $4(2i_2 + i_3)$ | — | $2i_2$ | — | $-6 \frac{i_3}{h}$ | 0 |
| — | — | $2i_2$ | — | $4(i_2 + i_3)$ | $2i_3$ | $-6 \frac{i_2}{d}$ | $-6 \frac{i_3}{h}$ | 0 |
| — | — | — | $2i_2$ | $2i_3$ | $4i_2 + i_3$ | $-6 \frac{i_2}{d}$ | $-6 \frac{i_3}{h}$ | 0 |
| $6 \frac{i_2}{d}$ | $6 \frac{i_2}{d}$ | — | — | $-6 \frac{i_2}{d}$ | $-6 \frac{i_2}{d}$ | $2 \cdot 12 \cdot 2 \frac{i_2}{d}$ | — | $+P$ |
| $-6 \frac{i_3}{h}$ | $-6 \frac{i_3}{h}$ | $-6 \frac{i_3}{h}$ | $-6 \frac{i_3}{h}$ | $-6 \frac{i_3}{h}$ | $-6 \frac{i_3}{h}$ | — | $3 \cdot 12 \frac{i_3}{h}$ | 0 |

60. Во всех рамах неизвестным является угол поворота среднего узла, определяемый уравнением:

$$Z \left(4 \frac{J_1 E}{l} + 4 \frac{E J_2}{l} + 3 \frac{E J_3}{1,5l} \right) - \frac{P l}{8} = 0.$$

Оно одинаково для всех рам, следовательно Z одинаково во всех рамах.

61. Неизвестные Z_1 и Z_2 — углы поворотов в узлах 1 и 2 (черт. 277) определяются из уравнений:

$$44Z_2 + 10Z_1 - q \cdot \frac{6^2}{8} = 0.$$

$$10Z_2 + 55Z_1 = 0.$$

При написании уравнений погонные жесткости увеличены в $\frac{20}{3}$ раза.

$$Z_1 = 0,1067q, \quad Z_2 = -0,0194q.$$

Моменты по концам стержней:

$$M_{10} = 0,388q; \quad M_{12} = -0,680q; \quad M_{14} = 0,398q;$$

$$M_{21} = 1,940q; \quad M_{24} = -1,939q.$$

62. По условию симметрии нагрузки углы поворотов в узлах 1 и 3 равны по величине, но противоположны по знаку. Величины их определяются уравнением:

$$Z_1 (3 \cdot 2 + 4 \cdot 1,5 + 4 \cdot 2 - 2 \cdot 1,5) - \frac{P l}{8} - \frac{P l}{16} = 0;$$

$$Z_1 = \frac{3}{272} P l.$$

Ординаты эпюр моментов по концам стержней:

$$M_{10} = \frac{9}{272} P l; \quad M_{12} = -\frac{7}{272} P l; \quad M_{13} = -\frac{25}{272} P l; \quad M_{21} = \frac{29}{272} P l.$$

Моменты под грузами:

$$\text{стержень } 1-2 \quad M = \frac{23}{272} P l; \quad \text{стержень } 1-3 \quad M = \frac{43}{272} P l.$$

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Арки бесшарнирные 61, 64, 70, 83, 85, 105, 106, 110
 — — круговые с радиальной нагрузкой 109
 — — параболические 73
 — — с осью очерченной по катеноиду 106
 — — — произвольного очертания 109
 — двухшарнирные 61, 111, 119
 — — параболические 113, 114
 — круговые с радиальной нагрузкой 109
 — одношарнирные 61
 — с затяжкой 120
 — с осью произвольного очертания 119
 — с параболической осью 73
 — сплошные 61
 — с рациональной осью 103
 — трехшарнирные 61, 106
 Арочные фермы 124, 126, 131, 144, 146,
 — — бесшарнирные 146
 — — двухшарнирные 124, 131, 135, 144
 — — с затяжкой 144
 Балки неразрезные 51, 277, 280, 282
 — — и рамы 51, 277, 284
 Взаимность групповых перемещений 178
 — единичных реакций 221
 — линейных перемещений 16, 272
 — перемещений и реакций от единичных воздействий 225, 272
 Виллио диаграмма 152
 Влияние деформации решетки ферм на величину неизвестных 133, 135
 — изменения температуры при расчете бесшарнирных арок 102
 — — — рамных систем 204
 Влияние кривизны, продольной и поперечной силы при расчете бесшарнирных арок 69
 — — — при расчете двухшарнирных арок 112
 — перемещений оси арки на величину моментов в ней 121
 — усадки бетона в бесшарнирной арке 102
 Выбор направления неизвестных 31
 — основной системы 11
 — полюсного расстояния 97
 Выравнивание моментов 305
 Вычисление неизвестных при решении способом Гаусса 186
 Гаусса способ решения канонических уравнений 181, 233
 Главные коэффициенты (перемещения) 28, 248
 — оси фиктивных упругих грузов 37, 38
 Графическое определение смещений в рамах с непараллельными стойками 242
 — центра фиктивных сил 37, 129
 — построение линий влияния 95, 97
 Грузовые члены в канонических уравнениях 15, 222
 Групповые единичные эпюры моментов 193
 Групповые неизвестные 178, 191
 — перемещения 178, 193
 Деформации в рамной системе 162
 — в статически неопределимых системах 22, 24, 25
 — метод 10
 — рамы 162, 171, 172, 173
 — решетки ферм, — влияние на величину неизвестного 133, 135
 — — — влияние на величину распора двухшарнирной арочной фермы 135
 — симметричных систем 236, 237
 Деформированная рамная система 162
 Диаграмма Виллио 152
 — Кремоны 152
 — скоростей 152
 Дополнительные натяжения в системах с внешней статической неопределимостью 25
 — части основной системы 155
 Использование симметрии для упрощений 28
 — — — при расчете на несимметричный нагрев 204, 250
 — — — при расчете сложных рам методом деформаций 236
 — — — при расчете сложных рам методом сил 167
 — — — при расчете ферм 125
 Итерация 246
 Канонические уравнения, контроль вычисления 41
 — — метода деформаций 219
 — — сил 14
 — — по условиям равновесия 219
 — — пяти опорных моментов 210
 — — решение способом Гаусса 181, 184, 191, 194
 — — — исключения неизвестных 181
 — — — приближения (итерации) 246
 — — смешанный прием 270
 — — составление по методу сложения перемещений 15
 — — — по теореме о взаимности работ 15, 226
 — — с симметричными и обратно симметричными неизвестными 168
 — — — трех опорных моментов 206, 278
 — — трехчленные 148, 206, 278
 — — упрощения путем выбора направления неизвестных 31
 — — — путем переноса неизвестных 174

- Канонические уравнения, упрощенные путем переноса сил в центр фиктивных грузов 33, 37
- — — путем перехода к параллельным осям 33, 36
- Кастильяно теорема 16, 20, 21
- Катеноид Легея 106
- Кинематический метод 152
- Комбинированные приемы расчета рам 270, 276
- Контроль в канонических уравнениях 41
- вычисления известных грузовых членов 44
- — коэффициентов при неизвестных 41
- — фокусных отношений и коэффициентов распределения моментов 294
- окончательных эпюр в сплошных системах 44
- — — по перемещениям 45
- — — по сумме проекций 46
- расчета ферм 133
- Комбинированный прием расчета рам 276
- Концевые моменты в загруженном пролете 288
- в стержнях рам (табл. 61) 297
- Коэффициенты главные 28, 248
- для построения линий влияния (табл. 2) 52
- (перемещение) побочных 27, 229
- при неизвестных 15, 219
- распределения концевого момента 287
- Кремоны диаграмма 152
- Кривая (многоугольник) давлений 72
- — — в арках, как эпюра моментов 72, 113
- — — в двухшарнирной арке 113
- Легея 62, 63
- Легея катеноид 106
- Линейные смещения в рамах 165
- — — с непараллельными стойками (учет по методу деформаций) 242
- — — с параллельными стойками (учет по методу деформаций) 217, 221, 231
- — и повороты сечения в опорах рам 257
- — опор статически неопределимых систем 24, 257
- — расчет методом фокусов 291
- — узлов в рамах (линии влияния) 259
- Линии влияния в бесшарнирной арке — аналитическое построение 83
- — — построение при помощи упругих фиктивных грузов 97
- — — сопоставление результатов по точным и упрощенным формулам (табл. 17) 101
- — — — с осью по катеноиду 109
- — — — с осью произвольного очертания 93
- — — в двухшарнирной арке с осью произвольного очертания 120
- — — с параболической осью 117
- — — арочной ферме 145
- — в сложных рамах (метод деформаций) 196
- — в фермах 137
- — — со сложной решеткой 148, 153
- — графическое построение 95, 97
- — масштаб 47, 49, 51, 55, 57
- — модели 56
- — неизвестных 46, 258
- — опорных моментов в бесшарнирной арке 85
- — — в неразрезных балках 282
- — поперечной силы в сечениях балки 55, 57
- — распора бесшарнирной арки 57
- — — в двухшарнирной параболической арке 114
- Линии влияния реакции в трехпролетной балке 56
- — — таблица коэффициентов 52
- — — углов поворота и смещения узлов рам 258
- — — усилий и моментов в сечениях элементов системы 53
- Линия (кривая) опорных сопротивлений 118
- Масштаб линий влияния 47, 49, 51, 55, 57
- модели линий влияния 57
- Матрица коэффициентов в канонических уравнениях 156
- обратного хода по Гауссу 196
- Мгновенный центр вращения 33, 126, 130
- Метод деформаций 10, 214
- сил 10
- Механический метод расчета статически неопределимых систем 302
- Многоугольник (кривая) давления 72
- — — в арке как эпюра моментов 113
- Модели линий влияния 56
- Момент в сечении статически неопределимой системы 14
- Моментные фокусы 277, 279
- Момент полный в замкнутом контуре рамы в расчетах методом моментных фокусов 292, 294
- расчетный при групповых неизвестных 194
- Моменты концевые 222, 234
- Мора теорема 21
- формула 252
- Нагрев равномерный и неравномерный 23
- Нагрузка на арки 63, 80, 115, 131, 137
- обратнo симметричная 28, 30, 237
- симметричная 28, 30, 236
- Нагрузки первого и второго состояний 15
- Направление неизвестных (выбор) 31
- Натяжения дополнительные 24
- искусственные 22, 25
- начальные 22
- Неизвестные, групповые 178, 191
- парные 28
- прямо и обратнo симметричные 29
- Неразрезные балки 51, 277, 280, 282
- Обжатия в арках с рациональной осью 103
- Обратный ход вычисления неизвестных по Гауссу 194
- Обращение в нуль побочных коэффициентов 27, 29, 31, 33, 37, 38, 126, 148, 156, 169, 174, 178, 229
- Объемлющая эпюра моментов 58
- Окончательные расчетные эпюры (метод деформаций) 234
- Опорные моменты в неразрезной балке 280
- Опоры упруго оседающие 208
- Осадка опор в рамах и балках 208
- — в статически неопределимых системах 24, 257
- Основная или расчетная система в методе сил 11
- — — — в методе деформаций 214
- — — — для бесшарнирной арки 65
- — — — при расчете сложных рам методом сил 154
- — — — при расчете ферм с простой решеткой 123
- — — — при расчете ферм со сложной решеткой 147
- Основная часть основной системы 155
- Основные статически неопределимые системы 191
- Ось арки 62, 121

- Ось арки по кривым Легея и Штрасснера 62
Парные неизвестные 28
— — прямо и обратно симметричные 29
Перекося рамной системы 164
Переменность сечений стержней рамы в расчетах по методу деформаций 267
— — — в расчетах по методу сил 211
Перемены главные 28, 157, 248
— групповые 178
— побочные 27, 157, 229
Перенос сил в центр упругих и фиктивных сил 33, 37
Пластический шарнир 304
Побочные коэффициенты (обращение в нуль) 27, 229
Поворот узлов — влияние на деформацию рамной системы 162
— — (линия влияния в рамах) 258
Повороты сечений опор статически неопределимых систем 24, 257
Полная симметрия 34, 37
Полное расстояние 95, 97
Поперечные силы (влияние) в расчете арок бесшарнирных 69
— — — в расчете арок двухшарнирных 112
Правила знаков 12, 225
Предельное равновесие — способ расчета арок 73
Преобразование неизвестных 167
Принцип наименьшей работы 20
Продольные силы в расчете бесшарнирных арок 69
Прямо и обратно симметричные неизвестные 30
— — — парные неизвестные 29
- Рамы сложные 154
— — в деформированном состоянии 162
— — несимметричные, расчет путей переноса неизвестных 175
Раскрытие (развернутые) уравнения моментов в узлах рамы 231
— — — усилий при линейных смещениях 232
Распор арки бесшарнирной 70, 105
— — — параболической двухшарнирной 113
— — — трех-, двух- и бесшарнирной 116
— — — арочной двухшарнирной фермы 135
— — — дополнительный в бесшарнирной арке от обжатия оси 106, 110
— — — параболической арке (табл. 19) 106
— — — от обжатия для круговой арки 110
— — — полный в бесшарнирной арке 104, 105
Расчет арки бесшарнирной круговой с радиальной погрузкой 109
— — — очерченной по катеноиду 106
— — — параболической 73
— — — при помощи упругих фиктивных грузов 93
— — — с осью произвольного очертания 88, 93
— — — численный интегрированием 88
— — — двухшарнирной параболической 114
— — — с затяжкой 120
— — — с осью произвольного очертания 119
— — — по способу предельного равновесия 73
— — — неразрезных балок способом моментных фокусов 277, 299
— — — рам по методу деформаций 214
— — — — моментных фокусов 277
— — — — сил 154
— — — комбинированным приемом 276
— — — по основным статически неопределимым системам 191
- Расчет рам симметричных по условным основным системам 170
— — — сложных несимметричных путем переноса неизвестных 175
— — — смешанным присом 269
— — — систем с одной или двумя лишними связями 17
— — — статически неопределимых систем по методу деформаций 214
— — — — механический 302
— — — — по заданным напряжениям 303
— — — — по предельной нагрузке 304
— — — — способом выравнивания момс-тов 305
— — — ферм 123, 133
— — — арочных 131
— — — двухрешетчатых со стойками 154
— — — неразрезных 139
— — — со сложной решеткой 153
Реактивные моменты и силы в расчетах рам методом деформации 220, 224
Решетки ферм сложные 147
Риттера формула изменения сечения бесшарнирной арки 64
- Своды 61, 64, 106, 107
Сечение переменной бесшарнирной арки 64
— — — двухшарнирной арки 114
Симметрия в рамной системе 236
— — — упругая 28
Симметричная и обратно симметричная погрузка 237, 238
Симметричные неизвестные 28
Симметричный и обратно симметричный нагрев 204, 254
Симпсона формула 88
Системы с одной и двумя лишними связями 17
Сложение деформаций по принципу независимости действия сил 15
Смешанный прием расчета рам 269, 277
— — — составлении канонических уравнений 270
Смещения в рамах с непараллельными стойками 242
— — — и повороты сечения в опорах рам 257
— — — опор в статически неопределимых системах 22, 24
— — — узлов стоек в многоярусных рамах 243
— — — рам 250
Составление канонических уравнений 14, 219
Состояние самонапряжений 306
Способ предельного равновесия 73
Статически неопределимые системы 8
— — — очерк развития 299
— — — современные искания в области расчетов 302
Стержни в балках и рамных системах 51
52, 297
Степень статической неопределимости 9
- Таблица влияния закона изменения сечения параболической арки на величину распора 114
— — — учета деформации решетки на величину распора двухшарнирной арочной фермы 135
— — — кривизны, поперечной и нормальной силы при расчете бесшарнирной арки 69
— — — кривизны поперечной и нормальной силы распора параболической двухшарнирной арки 112
— — — вычисления ординат упругих линий осей стержней 260
— — — коэффициентов для построения линий влияния 52

- Таблица коэффициентов обратного хода по Гауссу 195
- последовательного решения по способу Гаусса 185
 - углов поворота концевых сечений балки свободно опертой 282
 - ординат оси свода, очерченной по катеноиду 107
 - сопоставления величин распора в трех-, двух- и бесшарнирной параболических арках 116
 - — расчетных моментов в ригелях сложной рамы 212
 - реактивных моментов и сил в дополнительных связях от единичных поворотов и смещений узлов и от нагрузок 223
 - фиктивных упругих грузов в фермах 138
- Температурное влияние на развитие внутренних усилий в статически неопределимых системах 22
- Температурные изменения в бесшарнирной арке 102
- — в сложных рамах 204, 249
 - — в фермах 134
- Упрощения в расчете рам, получаемые использованием симметрии 38, 167, 236
- — — путем выбора направления неизвестных 31
 - — — — путем переноса неизвестных 174
 - — — — путем переноса сил в центр фиктивных упругих узлов 33, 37
 - — — — путем перехода к параллельным осям 33, 36
 - — — — путем переноса сил в центр упругих фиктивных грузов 33, 37
 - — — — путем перехода к параллельным осям 33, 36
 - канонических уравнений в симметричных системах 28
 - — — — путем выбора направления неизвестных 31
- Упругая заделка 162
- Упругие перемещения оси арки, влияние на величину моментов в ней 121
- Упруго оседающие опоры рам 208
- Уравнения для расчета рам методом деформаций 242
- канонические см. канонические уравнения
 - равновесия моментов в узлах рам при расчете по методу деформаций 229
- Уравнения равновесия сил при линейных смещениях рам при расчете по методу деформации 232
- пяти моментов 210
 - расчетных 270
 - решение способом Гаусса 191
 - — — последовательного приближения 246
 - трех моментов 278
- Усилия и деформации в статически неопределимых системах 13
- Условия равновесия при составлении канонических уравнений методом деформации 219
- Условные обозначения при составлении канонических уравнений методом деформации 219
- Фермы 123
- арочные 144, 145
 - — двухшарнирные 124, 131, 135, 144
 - двухраскосные 148
 - двухрешетчатые 154
 - — без стоек и со стойками 147, 148
 - комбинированные 124
 - неразрезные 139
 - со сложной решеткой 124, 147, 153
 - статически неопределимые по наличию лишних связей во внутреннем оборудовании 124
 - — по наличию лишних связей в опорных закреплениях 124
- Фиктивные упругие грузы 33, 37, 93, 96, 97, 107, 110, 119, 127, 157
- — — в фермах (табл. 31) 138
 - — — — упрощенные формулы 97, 119, 120
- Фокусные отношения в неразрезных балках 277, 279
- — в рамах 284
 - точки в неразрезных балках 277, 279
- Формулы для определения неизвестных в бесшарнирной арке 67
- Центр упругих фиктивных сил 33, 37, 93, 96, 97, 107, 110, 119, 127, 137, 138
- Численное интегрирование 88, 119
- Эпюры моментов окончательные, расчетные 234, 294,
- — — в сплошных системах 44
 - — — расчетные, построение по групповым единичным эпюрам 193
 - объемлющие 58
 - прогибов 47